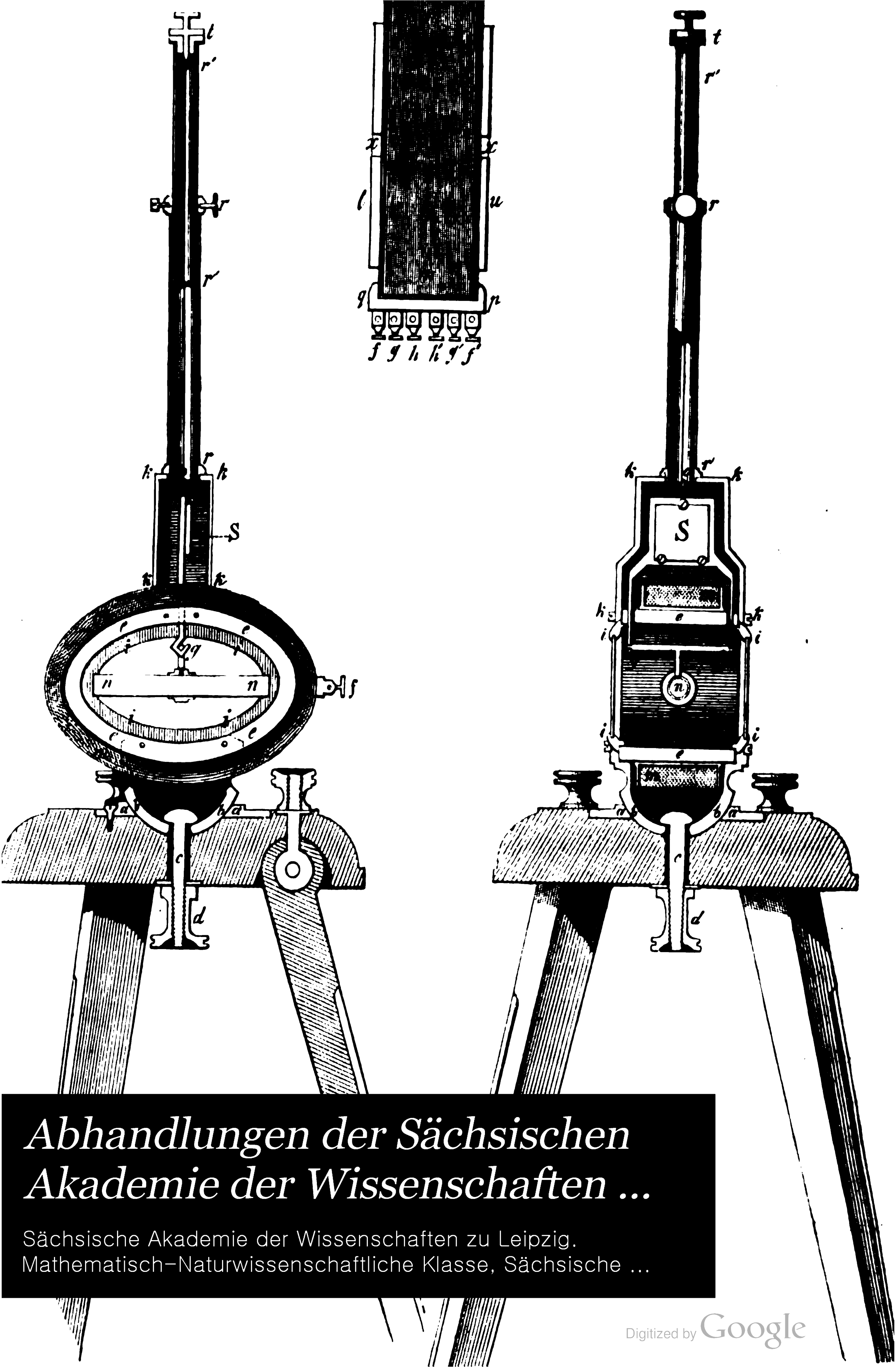


Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften ...

Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Sächsische ...

ABHANDLUNGEN

ERSTER BAND.

DRUCK VON BREITKOPF UND HÄRTEL IN LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



ERSTER BAND.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1852.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



ERSTER BAND.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1852.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



ERSTER BAND.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1852.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



ERSTER BAND.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1852.

INHALT.

ÜBER DIE GRUNDFORMEN

DER

LINIEN DER DRITTEN ORDNUNG

VON

A. F. MÖBIUS.

---

§. 1.

Seitdem Descartes die Algebra auf die Theorie der krummen Linien angewendet hat, und in Folge dessen die algebraischen Linien nach dem Grade der einer jeden zukommenden Gleichung in Ordnungen eingetheilt worden sind, ist es allgemein bekannt, dass, während zur ersten Ordnung bloss die gerade Linie gehört, alle Linien der zweiten Ordnung aus einem und demselben Kegel mit kreisförmiger Basis geschnitten werden können und somit keine andern, als die schon von den alten griechischen Geometern betrachteten Kegelschnitte, die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel, sind.

Nach den Erörterungen, die ich in meinem «barycentrischen Calcul» über die Verwandtschaften geometrischer Figuren gegeben habe, sind je zwei ebene Figuren, welche sich aus demselben Kegel schneiden lassen, oder — mit andern Worten — je zwei ebene Figuren, von denen die eine das perspectivische Bild der andern ist, einander collinear verwandt. Und umgekehrt können je zwei einander collineare ebene Figuren in eine solche Lage gegen einander gebracht werden, dass alle Geraden, welche je zwei einander entsprechende Punkte der einen und der andern Figur verbinden, sich in Einem Punkte O, der Spitze des Kegels oder dem Orte des Auges, schneiden. Dabei liegen die den unendlich entfernten Punkten der einen Ebene entsprechenden Punkte der andern in einer im Allgemeinen endlich entfernten geraden Linie. — Rückt der Punkt O in die Unendlichkeit hinaus, und verwandelt sich damit der Kegel in einen Cylinder, so entsprechen den unendlich entfernten Punkten der einen Ebene die unendlich entfernten der andern, und die zwei Figuren stehen in der engern Verwandtschaft der Affinität.

Alle Linien der zweiten Ordnung sind hiernach einander collinear verwandt. Und da aus einem und demselben Cylinder, dessen Basis eine Ellipse (Hyperbel) ist, jede andere Ellipse (Hyperbel), oder, wo nicht sie selbst, doch eine ihr ähnliche geschnitten werden kann, so sind

von den zwei Hauptarten, in welche die Linien der zweiten Ordnung zerfallen, alle zu einer und derselben Hauptart gehörigen Linien einander affin. Ausserdem giebt es noch eine Uebergangsart, die Parabel, und alle zu dieser gehörigen Linien sind, wie man weiss, einander ähnlich.

§. 2.

Nach dem, was jetzt über die Linien der zweiten Ordnung bemerkt worden, könnte man sich versucht fühlen, auch bei den Linien der dritten oder einer höhern Ordnung die verwandtschaftlichen Beziehungen, in denen sie zu einander stehen, zur Eintheilung jeder Ordnung in Arten zu benutzen. Einen Versuch dieser Art in Bezug auf die Linien der dritten Ordnung, wenigstens den Anfang zu einem solchen, beabsichtigt die vorliegende Abhandlung. Es weichen nämlich die Linien der dritten und höherer Ordnungen von denen der zweiten darin ab, dass nicht eben so, wie die letzteren, auch alle Linien einer und derselben höheren Ordnung einander collinear sind. Ehe man es daher unternimmt, sie in Arten zu sondern, wird man sie zuvor nach einem höheren Collectivbegriff — nach Gattungen — einzutheilen haben, so dass alle einander collinearen Linien derselben Ordnung zu einerlei Gattung dieser Ordnung, und hierauf alle einander affinen Linien derselben Gattung zu einerlei Art dieser Gattung gerechnet werden.

Der Hauptzweck der nachfolgenden Untersuchungen ist nun die Eintheilung der Linien dritter Ordnung in Gattungen. Die alsdann vorzunehmende Eintheilung jeder Gattung in ihre Arten ist ein zwar gehörige Umsicht erforderndes, aber durchaus mit keiner Schwierigkeit verbundenes Geschäft, und bleibt hier ausgeschlossen.

§. 3.

Sei l irgend eine Linie der dritten oder einer höheren Ordnung, O ein ausserhalb ihrer Ebene beliebigwo liegender Punkt, und werde die Kegelfläche construiert, von welcher O die Spitze und l die leitende Linie ist. Alle Schnitte dieser Fläche mit Ebenen werden, als einander collineare Linien, mit l zu einerlei Gattung gehören. Und umgekehrt: ist l' eine mit l zu derselben Gattung gehörige Linie, so wird, wenn auch nicht l' selbst, doch eine mit l' zu einerlei Art gehörige, d. i. eine mit l' affine Linie l'', aus der Kegelfläche geschnitten werden können. Denn weil, wenn l'' mit l' affin sein soll, die unendlich entfernten Punkte in der

Ebene von l'' den unendlich entfernten Punkten in der Ebene von l' entsprechen müssen, so hat man, wenn g die Gerade in der Ebene von l ist, deren Punkten die unendlich entfernten Punkte in der Ebene von l' entsprechen, die Ebene, welche den Kegel in l'' schneiden soll, so zu legen, dass in ihr die von O aus projicierte Gerade g in die Unendlichkeit fällt; d. h. die Ebene von l'' muss mit der durch O und g zu legenden Ebene parallel gelegt werden.

Alle zu einerlei Gattung gehörigen Arten können hiernach immer als Schnitte eines und desselben Kegels vorstellig gemacht werden, und es hat daher jede der zu einerlei Ordnung gehörigen Gattungen von Linien eine gewisse Kegelfläche als Repräsentantin. Da aber schon bei den Linien der dritten Ordnung es einige Schwierigkeit hat, eine solche Kegelfläche sich klar vorzustellen, so wollen wir an die Stelle derselben die immer leicht zur Anschauung zu bringende Curve setzen, in welcher eine um die Spitze O des Kegels als Mittelpunkt mit einem beliebigen Halbmesser beschriebene Kugelfläche von der Kegelfläche geschnitten wird; oder, was dasselbe ausdrückt: wir wollen als Repräsentantin jeder Gattung die sphärische Curve λ betrachten, welche die Centralprojection irgend einer zu der Gattung gehörigen Linie l ist, indem man durch centrale Projection von λ auf eine mit der Ebene von l nicht parallele Ebene, wenn auch nicht jede andere mit l zu derselben Gattung gehörige Linie l' selbst, doch eine mit l' zu einerlei Art gehörige l'' erhalten kann.

§. 4.

Eine Kegelfläche wird, wenn sie von einer, und damit auch von jeder andern Ebene in einer Linie der $n$ten Ordnung geschnitten wird, eine Kegelfläche der $n$ten Ordnung genannt. Den Schnitt einer Kegelfläche der $n$ten Ordnung mit einer um die Spitze derselben als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche wollen wir eine sphärische Linie der $n$ten Ordnung nennen, welche daher auch als die Centralprojection einer ebenen Linie der $n$ten Ordnung auf die Kugelfläche definiert werden kann. Weil die verschiedenen Arten derselben Gattung von ebenen Linien durch eine und dieselbe sphärische Linie vorstellig gemacht werden, so wird bei sphärischen Linien irgend einer Ordnung zwar derselbe Unterschied zwischen Gattungen, wie bei den ebenen Linien von gleicher Ordnung, bestehen; die sphärischen Linien Einer Gattung werden aber nicht, gleich den ebenen, in Arten zerfallen.

Es dürfte nicht überflüssig sein, die Natur der sphärischen Linien uns vorläufig an denen der beiden ersten Ordnungen in etwas zu erläutern.

Jeder Punkt P des Raums hat zu seiner sphärischen Projection zwei Punkte *P* und *P'*, diejenigen nämlich, in welchen eine durch P und den Mittelpunkt O der Kugel gelegte Gerade die Fläche derselben schneidet. Ist nun die zu projicierende ebene Linie von der ersten Ordnung, also eine Gerade, und bezeichnen A und B die zwei nach entgegengesetzten Richtungen liegenden unendlich entfernten Punkte derselben, so wird, während P in dieser Linie von A bis B fortgeht, *P* die eine und *P'* die andere Hälfte des Hauptkreises beschreiben, in welchem die Kugelfläche von der Kegelfläche, welche O zur Spitze und AB zur leitenden Linie hat, d. i. von der Ebene OAB, geschnitten wird. Eine sphärische Linie der ersten Ordnung ist demnach immer ein Hauptkreis. — Man bemerke noch, dass die Punkte, in denen jene zwei Halbkreise zusammenstossen, oder die Endpunkte des mit der Geraden parallelen Durchmessers des Kreises, die Projection sowohl von A, als von B, also überhaupt des unendlich entfernten Punktes der Geraden sind.

Um uns ferner einen Begriff von der Gestalt einer sphärischen Linie der zweiten Ordnung zu bilden, dürfen wir uns nur des Satzes erinnern, dass zu einer Kegelfläche, welche irgend eine ebene Linie der zweiten Ordnung zur leitenden Linie hat, eine Ebene sich immer so legen lässt, dass sie die Fläche in einem Kreise schneidet, und dass daher auch dieser Kreis als leitende Linie betrachtet werden kann. Von einer Kegelfläche mit kreisförmiger Basis wird aber eine um ihre Spitze als Mittelpunkt beschriebene Kugelfläche offenbar in zwei gesonderten Curven geschnitten, deren jede in sich zurückläuft, und von denen die eine die Gegencurve der andern ist, d. h. die Gegenpunkte der andern enthält.

Während es also drei verschieden geformte Arten von ebenen Linien zweiter Ordnung giebt, haben die sphärischen Linien derselben Ordnung nur die eben beschriebene Eine Form, — übereinstimmend mit dem schon Bemerkten, dass bei sphärischen Linien der Unterschied zwischen Arten wegfällt.

§. 5.

Sei l eine ebene Curve und g eine in ihrer Ebene gezogene Gerade; λ und γ die sphärischen Projectionen von l und g, also γ ein Hauptkreis. Wird nun l von g in m Punkten geschnitten, so wird, weil jeder Punkt

der Ebene auf der Kugel sich doppelt abbildet (vor. §.), λ von γ in $2\,m$ Punkten geschnitten, welche paarweise einander gegenüber liegen. Gehen zwei Durchschnitte von l mit g in einen Berührungspunkt zusammen, so wird λ von γ in den zwei Gegenpunkten, welche die Projectionen des Berührungspunktes sind, berührt. Und wenn mit zwei einander unendlich nahen Punkten der Curve l noch ihr nächstfolgender dritter Punkt in einer Geraden g liegt, so dass die Curve an dieser Stelle eine Wendung macht, und die diesen drei Punkten nächst vorhergehenden und folgenden Theile von l auf entgegengesetzten Seiten von g liegen, so werden auch die dieser Stelle entsprechenden zwei Gegenpunkte auf der Kugel Wendepunkte in λ sein und γ zur gemeinschaftlichen Tangente haben. Auf gleiche Art wird jeder in l vorkommende Knoten oder Doppelpunkt, jede Spitze u. s. w. als ein Punkt von der nämlichen Beschaffenheit doppelt in λ vorhanden seyn.

Hieraus, und weil eine ebene Linie der $n$ten Ordnung von einer in ihrer Ebene gezogenen Geraden in n, oder $n-2$, oder $n-4$, u. s. w. Punkten geschnitten wird, folgern wir: Eine sphärische Linie der $n$ten Ordnung wird von einem Hauptkreise in $2n$, oder $2n-4$, oder $2n-8$, u. s. w. Punkten geschnitten, welche paarweise einander gegenüber liegen; und so viel, als eine ebene Linie der $n$ten Ordnung Wendepunkte oder andere merkwürdige Punkte haben kann, eben so viel Paare merkwürdiger Punkte *) von gleicher Beschaffenheit können einer sphärischen Linie der $n$ten Ordnung zukommen.

§. 6.

Wie wir in §. 4. sahen, ist auf der Kugel eine Linie der ersten Ordnung immer ein Hauptkreis, und eine Linie der zweiten Ordnung ein System zweier geschlossener Curven. Auf gleiche Art besteht nun auch jede sphärische Linie höherer Ordnung oder die sphärische Projection einer ebenen Linie höherer Ordnung aus einer, oder zwei, oder auch mehreren Curven, deren jede in sich zurückläuft. Um dieses zu zeigen, gehe ich von dem bekannten Satze aus, dass eine ebene algebraische Linie l an keiner endlichen Stelle ihres Laufs plötzlich abbricht. Sollte daher ihre sphärische Projection λ irgendwo unterbrochen sein, so

*) Unter einem Paare von Punkten auf der Kugel soll hier und im Folgenden immer nur ein Paar einander gegenüber liegender Punkte verstanden werden.

könnte dieses nur an einer Stelle $\mathfrak{A}$ sein, welche, um mich so auszudrücken zu dürfen, dem letzten Punkte A eines unendlichen Astes von l entspricht. Dass aber auch hier keine Unterbrechung statt finden kann, erkennt man sogleich, wenn man l oder λ, welches gleichviel ist, vom Mittelpunkte der Kugel aus auf eine andere Ebene projiciert, die mit der Richtung, nach welcher der unendliche Ast von l fortgeht, nicht parallel ist. Heisse l_1 diese Projection von l oder λ. Wäre nun λ in $\mathfrak{A}$ unterbrochen, so müsste es auch l_1 in A_1, als der Projection von A oder $\mathfrak{A}$ auf die andere Ebene, sein, welches aber, weil A_1 ein endlich gelegener Punkt im Laufe von l_1 ist, dem aufgestellten Princip widerspricht.

Eine sphärische Curve aber, welche nirgends abbricht, kehrt nothwendig in sich zurück, — sie müsste denn, was gleichfalls noch denkbar wäre, sich einer andern geschlossenen sphärischen Curve oder auch einem Punkte mit unendlich vielen Windungen asymptotisch nähern. Allein dieser Fall kann hier nicht stattfinden, weil alsdann ein Hauptkreis offenbar so gelegt werden könnte, dass er die Curve in unendlich vielen Punkten schnitte, was gegen die Natur einer sphärischen Curve von bestimmter Ordnung streitet.

§. 7.

Schon aus dem Bisherigen mag man einigermassen ersehen, welchen Nutzen es hat, die ebenen algebraischen Linien auf die Kugel zu projicieren. Man entkleidet sie dadurch von ihren unwesentlichern Eigenschaften; die wesentlichern Eigenschaften, d. i. diejenigen, welche die projicierte Linie mit allen andern zu derselben Gattung gehörigen gemein hat, bleiben ungeändert. Während eine ebene Linie durch die unendlichen Aeste, welche ihr meistentheils zukommen, entstellt und zerrissen erscheint, ist die sphärische Curve ganz und unzertheilt auf einer endlichen Fläche enthalten, und somit das Zusammengehörige ungleich leichter, als in der Ebene, zu überschauen. Auch können die Eigenschaften, welche einer ebenen Linie in Bezug auf ihre unendlichen Aeste zukommen, nicht zu den wesentlichern gerechnet werden, da, jenachdem man die sphärische Curve bald auf diese, bald auf jene Ebene zurück projiciert, diejenigen Theile der Curve, welche zufällig von dem mit der Projectionsebene parallelen Hauptkreise getroffen werden, sich in der Ebene als unendliche Aeste abbilden.

Der Vortheil, den die Betrachtung der sphärischen Curven gewährt,

zeigt sich aber besonders noch darin, dass man auf solche Weise, wenigstens bei den Linien der zweiten und der dritten Ordnung, die wesentlich verschiedenen Formen dieser Linien zu bestimmen im Stande ist, ohne etwas Anderes, als den Satz von der möglichen Anzahl der Durchschnitte einer sphärischen Linie mit einem Hauptkreise (§. 5.) berücksichtigen zu dürfen. Die folgende rein geometrische Discussion wird diese Behauptung rechtfertigen.

Von den Grundformen der algebraischen Linien überhaupt.

§. 8.

Nach §. 6. ist eine sphärische Linie von irgend welcher Ordnung entweder eine einzige in sich zurücklaufende Curve, oder ein System von mehreren dergleichen. Weil, wenn P ein Punkt der sphärischen Linie ist, immer auch der Gegenpunkt von P in der Linie liegt, so werden die verschiedenen das System bildenden Curven in der Regel paarweise, als Curve und Gegencurve, zusammengehören. Indessen kann es auch geschehen, dass eine der Curven mit ihrer Gegencurve coincidiert, wie dies z. B. bei einem Hauptkreise der Fall ist. Eine solche in sich zurücklaufende Curve, welche von jedem ihrer Punkte den Gegenpunkt mit enthält, werde eine einfache Curve genannt. Dagegen wollen wir eine geschlossene sphärische Curve, welche von ihrer Gegencurve verschieden ist, in Verbindung mit letzterer gedacht, eine Zwillingscurve nennen. Beispiel einer solchen ist das System der beiden Polarkreise der Erdkugel.

§. 9.

Aus dem jetzt aufgestellten Begriffe einer einfachen Curve ergeben sich unmittelbar nachstehende Eigenschaften derselben:

1) Sind $A, B, C, \ldots$ Punkte einer einfachen Curve, und werden, wie dies in der Folge immer geschehen soll, die Gegenpunkte von andern durch die nämlichen, nur accentuierten, Buchstaben bezeichnet, so liegen auch $A', B', C', \ldots$ in der Curve. Dabei sind die Theile der Curve von A bis B, von B bis C, u. s. w. resp. denen von A' bis B', von B' bis C', u. s. w. gleich und ähnlich, können aber mit letztern nicht zur Deckung gebracht werden, eben so wenig, als ein sphärisches Dreieck mit seinem

Gegendreiecke. Ist daher A irgend ein merkwürdiger Punkt der Curve, so ist A' ein merkwürdiger Punkt von derselben Beschaffenheit.

2) Eine einfache Curve wird durch jedes Paar in ihr liegender Gegenpunkte in zwei einander gleiche und ähnliche, aber nicht congruirende Hälften getheilt. Dabei stehen die Theile einer und derselben Hälfte in keiner aus dem Begriffe einer einfachen Curve folgenden gegenseitigen Abhängigkeit. Um daher eine solche zu bilden, lasse man einen Punkt von irgend einem Punkte A der Kugelfläche auf dieser auf beliebigem Wege bis A' fortgehen, — nur dass, wenn A und A' keine Ecken oder Spitzen der Curve werden sollen, die Richtungen der Bewegung beim Fortgange von A und beim Eintreffen in A' einander direct entgegengesetzt sind. — Hiermit ist die eine Hälfte der einfachen Curve construiert, und man hat, um die ganze zu erhalten, zu dieser Hälfte nur noch die Gegencurve hinzuzufügen.

3) Sind auf einer Kugelfläche eine einfache Curve und ein Hauptkreis verzeichnet, so liegen irgend zwei Gegenpunkte der Curve, wenn sie nicht Punkte des Kreises selbst sind, auf entgegengesetzten Seiten desselben. Hieraus aber und aus der geschlossenen Gestalt beider Linien ist weiter zu folgern, dass eine einfache Curve und ein Hauptkreis wenigstens ein Paar Gegenpunkte gemein haben müssen.

4) Stellen wir uns vor, dass ein von A aus in der Curve fortgehender Punkt, ehe er darin bis A' gelangt, den Curvenpunkten $B, C, D, \ldots M$ der Reihe nach begegnet, und daher auf der zweiten Hälfte seines Weges von A' bis A die Punkte $B', C', D', \ldots M'$ in derselben Ordnung trifft. Nehmen wir ferner an, dass die genannten Punkte, und ausser ihnen keine andern, die Durchgangspunkte eines Hauptkreises μ mit der Curve sind. Alsdann werden, wenn wir uns, um die Ideen zu fixieren, den Hauptkreis μ horizontal denken, und wenn der Curvenbogen AB über μ, folglich BC unter μ, CD über μ, und so fort liegt, die Curvenbögen $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, u. s. w. abwechselnd unter und über μ fallen. Damit aber der Bogen $A'B'$ unter μ fallen kann, muss der nächstvorhergehende MA', eben so wie AB selbst, über μ liegen. Dieses ist offenbar nicht anders möglich, als wenn die Anzahl der zwischen A und A' begriffenen Durchgangspunkte $B, \ldots M$ gerade, $= 2m$, Null mit einbegriffen, ist. Hiernach ist die Anzahl aller Durchgangspunkte

$$\begin{array}{ccccccc} A; & B, C, \ldots M; & A'; & B', C', \ldots M' & \\ = 1 & + \; 2m & + \; 1 & + \; 2m & = 2(1+2m). \end{array}$$

Eine einfache Curve wird demnach von einem Hauptkreise in einem, oder in drei, oder fünf, u.s.w., überhaupt in einer ungeraden Zahl Paare von Gegenpunkten durchgangen.

§. 10.

Berührt ein Hauptkreis μ eine einfache Curve in einem Punkte A, so berührt er sie auch im Gegenpunkte A' des erstern. Sei A kein merkwürdiger Punkt der Curve, und liegen daher ihr dem A nächstvorhergehender Theil ZA (Fig. 1.) und ihr nächstfolgender Theil AB auf einerlei Seite von μ. Alsdann werden auch die Curvenbögen $Z'A'$ und $A'B'$ auf einerlei Seite von μ liegen, aber auf der entgegengesetzten von derjenigen, auf welcher ZA und AB sind. Weil die Bögen ZAB und $Z'A'B'$ ihre erhabenen Seiten dem Hauptkreise μ zukehren und auf verschiedenen Seiten desselben liegen, so wird einem auf der Kugelfläche in der Curve von A aus nach B zu und dann weiter durch Z', A', B' Fortgehenden und zuletzt durch Z nach A Zurückkehrenden, wenn ihm Anfangs bei A der Hauptkreis μ und damit die erhabene Seite der Curve zur Linken war, auf seinem sphärischen Wege bei A' der Hauptkreis und damit die erhabene Seite der Curve zur Rechten liegen. Er muss folglich auf dem Wege von A bis A' wenigstens durch einen, oder auch durch drei, oder fünf u. s. w. Punkte gegangen sein, in denen die Seite der Curve, welche vorher erhaben war, hohl wird, und umgekehrt, d. i. durch eine ungerade Anzahl von Wendepunkten; und da ebensoviel solcher Punkte von A' bis A liegen müssen, so folgern wir:

Eine einfache Curve hat immer eine ungerade Anzahl von Paaren einander gegenüber liegender Wendepunkte.

Sie kann aber — so lange wenigstens, als keine Knoten und Spitzen zugelassen werden — nicht bloss Ein Paar haben. Denn gesetzt, es wären die Punkte W und W' einer solchen Curve, durch welche sie in die zwei Hälften w und w' getheilt werde, ihr einziges Paar Wendepunkte. Da ein Curvenpunkt W (oder W') erst durch Vergleichung der Krümmungen des vorangehenden und des folgenden Theils der Curve, nicht aus einem derselben allein, als Wendepunkt erkannt wird, so würde sich alsdann von einem Punkte W der Kugelfläche bis zu seinem Gegenpunkte W' eine Curve w (oder w') ohne alle

merkwürdige Punkte ziehen lassen, — welches nicht möglich ist*). — Deshalb und zu Folge des obigen Satzes muss eine einfache Curve, in welcher keine Knoten oder Spitzen vorkommen, wenigstens drei Paare von Wendepunkten haben.

Dass aber einfache Curven ohne Knoten und Spitzen mit dieser geringen Anzahl (sechs) von Wendepunkten auch wirklich existiren, erhellet aus folgendem einfachen Beispiele. — Man theile einen Hauptkreis in sechs gleiche Theile und beschreibe vom ersten Theilpunkte bis zum zweiten, vom zweiten bis zum dritten u. s. w. und zuletzt vom sechsten bis zum ersten abwechselnd auf die eine und die andere Seite des Hauptkreises fallende Bögen eines und desselben kleineren Kreises, deren jeder kleiner als ein Halbkreis sein mag. Diese sechs Bögen werden daher einander gleich sein und eine geschlossene Curve ohne Knoten und Spitzen bilden, welche die sechs Theilpunkte zu Wendepunkten hat. Zudem wird die Curve eine einfache sein, da der erste Bogen dem vierten, der zweite dem fünften und der dritte dem sechsten diametral gegenüber liegt.

---

*) Um sich von dieser Unmöglichkeit zu überzeugen, denke man sich auf der Kugelfläche von einem Punkte A derselben bis zu seinem Gegenpunkte A' eine von einem Halbkreise verschiedene Curve, welche keine Spitzen oder Ecken hat, gezogen. Der dem A zunächst liegende Theil dieser Curve wird dem A seine hohle Seite zukehren, d. h. von einem durch A und irgend einen der nächstfolgenden Curvenpunkte, er heisse B, gelegten Hauptkreise wird der Bogen AB, welcher kleiner als ein Halbkreis ist, mit seinem bei B an die Curve stossenden Elemente auf der hohlen Seite der Curve liegen; und eben so wird der dem A' nächstliegende Theil der Curve gegen A' hohl, folglich gegen A erhaben sein. Indem man daher von A bis A' in der Curve fortgeht, wird man nothwendig auf einen Punkt C treffen, wo die bis dahin gegen A hohle Curve gegen A erhaben zu werden anfängt. Es muss folglich C entweder ein Wendepunkt sein, oder es muss, wenn C ein gewöhnlicher Curvenpunkt ist, der in ihm die Curve berührende Hauptkreis, ehe er noch von C aus nach der Richtung des Fortgangs der Curve bis zu einem Halbkreise angewachsen ist, den Punkt A treffen (Fig. 2.). Im letztern Falle ist der auf C nächstfolgende Theil der Curve innerhalb des vom Curvenbogen ABC und vom Kreisbogen CA begrenzten, den Punkt A' ausschliessenden Raumes der Kugelfläche enthalten, und es muss daher die Curve, um in ihrem weitern Fortgange nach A' zu gelangen, entweder den von ihr schon zurückgelegten Theil ABC oder den Kreisbogen CA irgendwo durchschneiden. Letzteres ist aber ersichtlich nicht möglich, ohne noch vor dem Durchschnitte mit CA eine Wendung zu machen. Mithin ist es auch nicht möglich, von A bis A' eine von einem Halbkreise verschiedene Curve zu ziehen, welche keine Spitze oder Ecke, keinen Wendepunkt, oder keinen Durchschnitt mit sich selbst, also überhaupt keinen merkwürdigen Punkt hat.

Hat eine einfache Curve ein Knoten- oder ein Spitzenpaar, so reicht Ein Paar Wendepunkte hin. Denn ein Knoten, so wie eine Spitze*), lässt sich als durch das Zusammengehen zweier Wendepunkte entstanden betrachten, mit dem Unterschiede, dass das zwischen den vereinigten Wendepunkten liegende Curvenstück beim Knoten von endlicher Grösse bleibt, bei der Spitze dagegen verschwindet. Siehe Fig. 3. und 3.*, wo durch den Buchstaben W die vorherigen Wendepunkte angedeutet werden.

Eine Curve der letztgedachten Art wird unter andern erhalten, wenn man einen Hauptkreis in den Punkten A, B, A', B' in vier Quadranten theilt und über AB und BA' zwei auf der einen, über $A'B'$ und $B'A$ zwei auf der andern Seite des Hauptkreises liegende Halbkreise beschreibt. Denn die aus diesen vier Halbkreisen zusammengesetzte Curve wird eine einfache sein und in B und B' Spitzen, in A und A' Wendepunkte haben.

§. 11.

Weniges bleibt noch über die Zwillingscurven hinzuzufügen übrig. — Ist A ein Punkt einer der zwei geschlossenen eine Zwillingscurve bildenden Curven, so liegt A' in der andern. Ein Bogen AB der einen Curve ist dem Bogen $A'B'$ der andern gleich und ähnlich, obwohl nicht auf ihn passend; und dasselbe gilt auch von den zwei Curven in ihrer Totalität.

Da ferner ein durch A gelegter Hauptkreis auch den Punkt A' trifft, und da eine geschlossene sphärische Curve von einem Hauptkreise entweder gar nicht, oder in einer geraden Anzahl von Punkten durchgangen wird, so wird eine Zwillingscurve von einem Hauptkreise entweder gar nicht, oder in einer geraden Anzahl Paare von Punkten

---

*) Hier, so wie im Folgenden, ist unter Spitze ohne weiteren Zusatz stets eine sogenannte Spitze der ersten Art gemeint, d. h. eine solche, bei welcher die zwei die Spitze bildenden Curvenbögen ihre erhabenen Seiten einander zukehren.

Eine Spitze der zweiten Art, als bei welcher die erhabene Seite des einen Bogens der hohlen des andern zugewendet ist, kann, wie hier noch bemerkt werden mag, erst bei Linien der vierten oder einer höhern Ordnung sich bilden. Denn eine an den erstern jener zwei Bögen sehr nahe bei der Spitze selbst gelegte Tangente schneidet den andern in zwei Punkten und hat daher, den Berührungspunkt als die Vereinigung zweier gedacht, mit der Curve vier Punkte gemein.

durchgangen. — Ein Hauptkreis, welcher die eine Curve in A berührt, berührt die andere in A'.

Was noch die Wendepunkte anlangt, so ist die Anzahl derselben bei einer geschlossenen Curve gerade, Null mit eingeschlossen. Denn wenn Demjenigen, welcher, von einem nicht merkwürdigen Punkte der Curve ausgehend, sie ganz durchschreitet, die hohle Seite derselben Anfangs etwa zur Rechten liegt, so wird ihm auch am Ende des Wegs die hohle Seite zur Rechten sein, und er wird folglich entweder keine oder eine gerade Anzahl von Wendungen gemacht haben. Eine Zwillingscurve, als ein System zweier einander gleichen und ähnlichen Curven, hat folglich keine oder eine gerade Anzahl Paare von Wendepunkten.

§. 12.

Weitere Folgerungen. 1) Eine sphärische Linie von gerader (ungerader) Ordnung wird von einem Hauptkreise in einer geraden (ungeraden) Zahl Paare von Punkten geschnitten (§. 5.). Da nun von einem Hauptkreise eine einfache Curve in einer ungeraden und eine Zwillingscurve in einer geraden Anzahl Paare von Punkten durchgangen wird, so können von den Curven, aus denen eine sphärische Linie von ungerader Ordnung zusammengesetzt ist, nicht alle Zwillingscurven sein, sondern wenigstens eine von ihnen, oder drei, oder fünf, u. s. w., überhaupt eine ungerade Anzahl derselben müssen einfache Curven sein. Eben so erhellet, dass unter den Curven einer sphärischen Linie von gerader Ordnung einfache Curven nur in gerader Anzahl vorkommen können. Die Anzahl der Zwillingscurven hingegen kann in beiden Fällen sowohl gerade, als ungerade sein. — Uebrigens ist hier, und so auch im Folgenden, unter den geraden Zahlen stets Null mit einbegriffen.

2) Eine einfache Curve hat eine ungerade und eine Zwillingscurve eine gerade Anzahl Paare von Wendepunkten. Die Anzahl solcher Paare wird folglich bei einem aus einfachen und Zwillingscurven zusammengesetzten System ungerade oder gerade sein, je nachdem die Zahl der einfachen Curven ungerade oder gerade ist. Hieraus aber fliesst in Verbindung mit dem vorigen Satze, dass eine sphärische Linie von ungerader Ordnung eine ungerade, von gerader Ordnung

eine gerade Anzahl Paare von Wendepunkten hat. — Eine Linie von ungerader Ordnung hat daher wenigstens ein Paar, und, dafern sie keine Knoten oder Spitzen hat, wenigstens drei Paar Wendepunkte.

§. 13.

Ich kann diese allgemeinen Betrachtungen über sphärische Linien nicht verlassen, ohne noch auf einige der Folgerungen aufmerksam gemacht zu haben, welche sich aus ihnen in Bezug auf ebene algebraische Linien, als die Projectionen sphärischer, ableiten lassen.

Bezeichne γ eine der Curven, aus denen eine sphärische algebraische Linie zusammengesetzt ist, und zwar zuerst eine der zwei eine Zwillingscurve bildenden. Indem man sich dieselbe von einem Punkte P durchlaufen denkt, sei P die Centralprojection von P auf eine bestimmte Ebene, c die von P in der Ebene beschriebene Curve, also die Projection von γ auf diese Ebene; endlich sei ν der mit der Ebene parallele Hauptkreis der Kugel. Wenn nun, wie dies bei einer Zwillingscurve möglich ist, die Curve γ ganz auf der einen Seite des Hauptkreises ν liegt und ihm auch in keinem Punkte begegnet, so ist c eine ebene auf einen endlichen Raum beschränkte und in sich zurücklaufende Curve. — Trifft γ den Kreis ν irgendwo, ohne ihn zu durchgehen, so entfernt sich, wenn P an dieser Stelle anlangt, P in das Unendliche und kehrt von derselben Seite der Ebene her in das Endliche wieder zurück, und die Curve c erhält somit zwei nach einerlei Richtung sich in das Unendliche erstreckende Aeste. — So oft dagegen γ den Kreis ν nicht bloss trifft, sondern zugleich durchgeht, bilden sich in der Ebene zwei Aeste, die sich nach entgegengesetzten Richtungen im Unendlichen verlieren. Die Anzahl der Aestepaare letzterer Art wird aber gerade sein, da γ, als eine geschlossene Curve, von ν in einer geraden Anzahl von Punkten durchgangen wird. — Es wird kaum nöthig seyn, hinzuzufügen, dass die andere Curve, welche mit γ in Vereinigung die Zwillingscurve bildet, dieselbe Projection c, wie γ selbst, giebt.

Anders verhält es sich, wenn γ eine der einfachen Curven der sphärischen Linie ist. Heisse alsdann K der Punkt in γ, von welchem P bei seiner Beschreibung der Curve ausgeht. Durch ihn und seinen Gegenpunkt K' wird γ in zwei Hälften getheilt, deren jede die nämliche Projection hat, eben so wie die Projectionen von K und K' einer und

derselbe Punkt sind, welchen man mit K bezeichne. Da nun jede der beiden Hälften von γ den Kreis ν in einer ungeraden Anzahl von Punkten durchgeht (§. 9.), so muss die Curve c, als die Abbildung einer solchen Hälfte, eine ungerade Anzahl Paare von Aesten enthalten, die sich nach entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche erstrecken.

§. 14.

Sowie eine sphärische algebraische Linie aus einer, zwei, oder mehreren Curven besteht, welche theils einfache, theils Zwillingscurven sind, so ist auch eine ebene algebraische Linie, da sie immer als die Projection einer sphärischen angesehen werden kann, entweder eine einzige Curve, oder ein System mehrerer. Nach den im vor. §. gegebenen Erörterungen hat es, wenigstens im Allgemeinen, keine Schwierigkeit, eine ebene Linie in die einzelnen Curven, aus denen sie zusammengesetzt ist, zu zerlegen und von jeder derselben zu bestimmen, ob die sphärische Curve, von welcher sie die Projection ist, zu den einfachen oder Zwillingscurven gehört. Wenn man nämlich in einer ebenen Linie von einem beliebigen Punkte K derselben aus fortgeht und dabei jederzeit, wenn man zu dem letzten Punkte (§. 6.) eines unendlichen Astes gekommen ist, zu dem letzten Punkte des zugehörigen dem vorigen parallelen Astes überspringt und in diesem zweiten Aste nach dem endlichen Theile der Ebene zurückgeht, so wird man zuletzt zum Punkte K zurückkommen, und der durchgangene Weg wird eine der einzelnen Curven sein, aus denen die Linie zusammengesetzt ist. Dieser Curve aber wird auf der Kugel eine einfache oder Zwillingscurve entsprechen, jenachdem die Zahl derjenigen Paare ihrer unendlichen Aeste, deren Aeste einander entgegengesetzte Richtungen haben, ungerade oder gerade ist; oder, wie man auch sagen kann: jenachdem unter den zu machenden Sprüngen die Anzahl derer, bei welchen die zwei Punkte, zwischen denen zu springen ist, nach entgegengesetzten Richtungen liegen, ungerade oder gerade ist.

Als Beispiel hierzu können uns schon die Linien der zweiten Ordnung dienen. — Die Ellipse wird von einem in ihr sich bewegenden Punkte ohne allen Sprung zurückgelegt. — Bei der Parabel findet ein Sprung statt, der aber hier nicht zu zählen ist, weil die letzten Punkte der zwei Aeste dieser Curve nach einerlei Richtung liegen. — Die Hyperbel besteht aus zwei gesonderten Hälften, deren jede zwei unendliche

Aeste hat, welche paarweise, nämlich ein Ast der einen und ein Ast der andern Hälfte, sich nach entgegengesetzten Richtungen erstrecken. Heissen A, B die letzten Punkte der zwei Aeste der einen Hälfte und A′, B′ die ihnen resp. gegenüberliegenden letzten Punkte der andern Hälfte. Man gehe nun in der erstern Hälfte von einem beliebigen Punkte K derselben aus bis B fort, springe hierauf von B nach B′ in die andere Hälfte, durchwandere diese ganz von B′ bis A′, springe dann von A′ nach A in die erste Hälfte zurück und gehe in dieser von A bis K. Somit hat man die Hyperbel ganz durchgangen und dabei zwei unendliche Sprünge in das Entgegengesetzte gemacht. — Jede der drei Formen einer Linie der zweiten Ordnung muss sich daher auf der Kugel als eine Zwillingscurve abbilden. Vergl. §. 4.

§. 15.

Um die gegenseitigen Beziehungen zwischen ebenen und sphärischen Curven noch augenfälliger darstellen zu können, wollen wir den Begriff geschlossener ebener Curven auch auf solche mit ausdehnen, welche unendliche Aeste haben, dafern nur ihre sphärischen Projectionen geschlossene Curven sind. Nennen wir ferner eine geschlossene ebene Curve, jenachdem sie zu ihrer Projection auf der Kugel eine einfache oder eine Zwillingscurve hat, eine Curve der ersten oder der zweiten Art, so können wir nach dem Bisherigen folgende Sätze aufstellen:

1) Eine Curve der ersten (zweiten) Art wird von jeder in ihrer Ebene gezogenen Geraden in einer ungeraden (geraden) Anzahl von Punkten durchgangen, — hat daher eine ungerade (gerade) Anzahl Paare nach entgegengesetzten Richtungen laufender unendlicher Aeste*), — und hat eine ungerade (gerade) Anzahl von Wendepunkten.

Da diese Sätze von exclusiver Natur sind, so gelten sie auch umgekehrt, und es kann daher aus dem Vorhandensein irgend einer der drei gedachten Eigenschaften auf das Dasein der jedesmal zwei übrigen geschlossen werden, so dass z. B. eine geschlossene Curve mit einer ungeraden (geraden) Anzahl von Paaren entgegengesetzter Aeste eine ungerade (gerade) Anzahl von Wendepunkten hat.

*) Weil jedes Paar solcher Aeste auf einen Durchgang der Curve durch die in ihrer Ebene unendlich entfernt liegende Gerade, — sphärisch auf einen Durchgang durch den Hauptkreis ν (§. 13.), — hinzeigt.

2) Unter den Curven, aus denen eine ebene algebraische Linie zusammengesetzt ist, ist bei ungerader (gerader) Ordnungszahl der Linie eine ungerade (gerade) Anzahl von Curven der ersten Art begriffen; woraus, wie in §. 12. 2., noch folgt, dass eine ebene Linie von ungerader (gerader) Ordnung eine ungerade (gerade) Anzahl von Wendepunkten, und überhaupt dieselben drei Eigenschaften hat, welche im vorhergehenden Satze von den Curven der ersten (zweiten) Art ausgesagt wurden.

Schliesslich ist noch zu erinnern, dass man bei Zählung der Punkte, in denen eine ebene Curve von einer in ihrer Ebene gezogenen Geraden durchgangen wird, und bei Zählung der Wendepunkte diejenigen unter ihnen nicht übersehe, welche in unendlicher Entfernung liegen, indem sonst die Sätze in 1) und 2) ihre allgemeine Gültigkeit verlören. — Ist die gezogene Gerade mit einem Paare unendlicher Aeste der Curve parallel, so hat sie mit letzterer einen unendlich entfernten Punkt gemein; zugleich durchgeht sie die Curve in diesem Punkte, wenn die beiden Aeste, jenachdem sie einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben, auf entgegengesetzten oder einerlei Seiten der Geraden sich befinden. — Ein unendlich entfernter Wendepunkt giebt sich dadurch zu erkennen, dass zwei nach entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche sich erstreckende Aeste auf einer und derselben Seite ihrer gemeinsamen geradlinigen Asymptote, der Tangente im Wendepunkte, liegen. Es kann aber auch geschehen, dass nicht bloss der Wendepunkt, sondern auch seine Tangente unendlich entfernt liegt. In diesem Falle sind die zwei entgegengesetzten Aeste von parabolischer Form, während sie vorher eine hyperbolische hatten, und liegen auf einerlei Seite jeder mit ihnen in der Ebene parallel gezogenen Geraden.

Von der Richtigkeit dieser Behauptungen wird man sich leicht überzeugen, wenn man die Curve auf die Kugel, und zwar zunächst auf die der Ebene der Curve zugewendete, durch den Hauptkreis ν (§. 13.) begrenzte Halbkugel, projiciert und dabei erwägt, dass das sphärische Bild eines unendlich entfernten Punktes Q der Ebene ein Punkt $\dot{Q}$ des Kreises ν ist, dass eine in der Ebene nach Q gerichtete Gerade a einen durch Q gehenden Hauptkreis α zum Bilde hat; dass, wenn a in der Ebene unendlich entfernt liegt, α mit ν zusammenfällt; dass daher ein hyperbolischer Ast, welcher die in endlicher Entfernung gelegene Gerade a zur Asymptote hat, sich als ein in Q endigender und daselbst

von α berührter Bogen abbildet, und dass ein parabolischer nach Q gerichteter Ast sich auf der Kugel als ein in Q endigender und daselbst von ν berührter Bogen darstellt. Ergänzt man zuletzt die solchergestalt auf der einen Kugelhälfte construierte Curve durch ihre Gegencurve auf der andern Hälfte, so ersieht man die Beschaffenheit der nun vollständigen Curve in ihren Begegnungen mit ν, und wird damit die obigen Behauptungen bestätigt finden

Geometrische Entwickelung der Grundformen der sphärischen Linien der dritten Ordnung.

§. 16.

Die voranstehenden allgemeinen Betrachtungen über algebraische Linien wollen wir jetzt auf die Linien der dritten Ordnung anwenden; wir wollen die Curven, aus denen eine Linie dieser Ordnung zusammengesetzt ist, ihrer Zahl und Beschaffenheit nach zu bestimmen und dadurch die verschiedenen Grundformen der Linie selbst, soweit dieses ohne Zuhülfenahme des Calculs geschehen kann, zu ermitteln suchen. — Eine ähnliche Untersuchung für die Linien der zweiten Ordnung vorangehen zu lassen, halte ich für überflüssig, da aus den nachstehenden Betrachtungen über die Linien der dritten Ordnung sich zur Genüge ergeben wird, wie ähnlicherweise der Beweis zu führen ist, dass eine sphärische Linie der zweiten Ordnung eine einzige Zwillingscurve (§. 4.) ohne alle merkwürdige Punkte ist.

Als Criterium für eine sphärische Linie der dritten Ordnung wird uns bei der nun folgenden Untersuchung der Satz dienen, dass eine solche Linie — wir wollen sie inskünftige kurz mit λ bezeichnen — von einem Hauptkreise in drei Paaren von Punkten, oder in einem Paare geschnitten wird; dass daher ein sie in einem Punktenpaare berührender Hauptkreis sie in einem zweiten schneidet, nicht aber in einem zweiten berühren kann, und dass in dem besondern Falle, wenn der Hauptkreis die Linie λ in einem Paare von Wendepunkten oder Knoten oder Spitzen berührt, er mit ihr kein zweites Punktenpaar gemein hat.

§. 17.

Unter den Curven, aus denen λ, als eine Linie von ungerader Ordnung, zusammengesetzt ist, ist nach §. 12. 1. entweder eine, oder sind

drei, fünf u. s. w. einfache Curven enthalten. Es kann aber der λ nicht mehr als Eine einfache Curve — sie heisse ε — zukommen. Denn da eine einfache Curve von einem Hauptkreise stets in einer ungeraden Anzahl von Punktenpaaren durchgangen wird (§. 9.), so trifft ein durch zwei Punktenpaare der Curve ε gelegter Hauptkreis dieselbe noch in einem dritten Paare, und würde einer zweiten zu λ gehörigen einfachen Curve wenigstens in Einem Punktenpaare, dem vierten, begegnen, was gegen das obige Criterium streitet.

Unter der einstweiligen Annahme, dass in der zu λ gehörigen einfachen Curve ε keine Knoten oder Spitzen vorkommen, hat ε nach §. 10. wenigstens drei Paare von Wendepunkten, oder fünf, oder sieben u. s. w. Es wird sich aber wieder mit Hülfe unsers Criteriums zeigen lassen, dass ε nicht mehr als drei Paare solcher Punkte haben kann.

Denn setzen wir, dass der Curve ε fünf Paare zukommen, und nennen fünf Wendepunkte in der Ordnung, in welcher sie auf einander folgen: A, B, C, D, E; also die fünf übrigen in derselben Folge: $A', \ldots E'$. Man ziehe einen die Curve in A und A' berührenden Hauptkreis ν und projiciere sie auf eine mit ν parallele Ebene. Heissen B, C,... die Projectionen von B und B', C und C' u. s. w. und e die Projection von ε selbst. Weil ν die ε in dem Wendepunktenpaare A, A' berührt, so hat die ebene Curve e zwei einander entgegengesetzte parabolische Aeste, welche auf einerlei Seite jeder mit ihnen in der Ebene der Curve parallelen Geraden a liegen (§. 15.); ausser ihnen aber nicht noch andere unendliche Aeste, indem sonst ε von ν noch in andern Punkten, als in A und A', getroffen werden müsste, — gegen das Criterium. — Die Curve e wird sich daher vom letzten Punkte des einen parabolischen Astes bis zum letzten Punkte des andern ununterbrochen fortziehen und dabei in B, C, D, E Wendungen machen. Die letzten Elemente der zwei Aeste, also auch die ihnen parallele Gerade a wollen wir uns horizontal denken und in der Ebene die Seite von a, auf welcher die Aeste liegen, als die untere vorstellen. Uebrigens wollen wir die Gerade so gelegt annehmen, dass die vier Wendepunkte B, ... E sämmtlich auf ihre obere Seite fallen. Sie wird alsdann die e schneiden, aber nur in zwei Punkten, weil sie mit e schon ihren unendlich entfernten Punkt gemein hat. Heissen A_1 und A_2 die beiden Schneidepunkte, welche mit den vier Wendepunkten in ihrer Aufeinanderfolge die Reihe A_1BCDEA_2 bilden; A_1 liege zur Linken, A_2 zur Rechten.

Weil sich die Curve e in A_1 über die Gerade a erhebt und in A_2 wieder zu ihr hinabsenkt, so wird sie zwischen A_1 und A_2 einen oder auch mehrere höchste Punkte haben. Sie kann aber nicht mehr als einen haben. Denn hätte sie zwei höchste Punkte F und G (Fig. 4.), und legte man an den niedrigern, welcher F sei, eine Tangente f, welche horizontal sein und den Punkt G über sich liegen haben würde, so müsste die Curve auf ihrem Wege von F nach G hin, weil sie von F aus zunächst unter f hinabsteigt, sich über f bis G wieder erheben, dann aber, um die tiefere Horizontale a in A_2 (oder in A_1) zu treffen, durch f zurückgehen müssen. Die in F an die Curve gelegte Tangente f würde sie daher in noch zwei Punkten schneiden — dem Criterium entgegen. — Eben so wenig können die zwei höchsten Punkte gleiche Höhe haben; denn alsdann würde die an den einen gelegte Tangente die Curve auch in dem andern berühren.

Nun lässt sich ferner darthun, dass wenigstens eine der zwischen B und C an die Curve e gelegten Tangenten horizontal sein, und daher der Bogen BC wenigstens einen höchsten oder tiefsten Punkt haben muss. Denn wo nicht (Fig. 4.*), so lege man an die Curve e eine sie in B selbst berührende Gerade t und drehe diese dergestalt, dass sie mit e in Berührung bleibt, und der Berührungspunkt von B bis C rückt. Weil B ein Wendepunkt ist, so hat die Gerade t in ihrer anfänglichen Lage drei nächstfolgende Punkte mit e gemein. Von diesen drei Punkten rücken bei der nachherigen Drehung von t zwei, in Vereinigung bleibend und den Berührungspunkt bildend, von B bis C; der dritte gemeinsame Punkt von e und t geht nach der entgegengesetzten Richtung, also von B nach A_1 zu, auch wohl noch über A_1 hinaus in dem linken unendlichen Aste fort, ohne jedoch bis zum letzten Punkte des Astes zu gelangen, weil keine der Tangenten von B bis C horizontal, also keine mit der Richtung des Astes in seinem letzten Punkte parallel sein soll. Auch kann dieser dritte Punkt nicht nach B zurückkehren, weil der Bogen BC nach einer und derselben Seite zu hohl ist, und folglich keine an BC gelegte Tangente, mit Ausnahme der Tangente in B selbst, B treffen kann. Die bis C fortgedrehte Tangente t würde daher dem linken Aste in einem von B nach A_1 zu gelegenen Punkte begegnen, welches aber, weil C ein Wendepunkt ist, dem Criterium widerspricht.

Dieser Widerspruch fällt weg, wenn der Bogen BC zwischen seinen Endpunkten wenigstens Einen höchsten oder tiefsten Punkt hat.

Hätte er aber einen tiefsten Punkt T, so müsste eine an T gelegte und daher horizontale Tangente die Curve *e* zwischen A_1 und T schneiden, weil A_1 tiefer als T liegt. Aus gleichem Grunde müsste diese Tangente die *e* noch einmal zwischen T und A_2 treffen, — gegen das Criterium. — Mithin kann der Bogen BC keinen tiefsten, sondern muss einen höchsten Punkt haben.

Vollkommen eben so zeigt sich, dass auch der Bogen DE einen höchsten Punkt haben muss, sobald man nur in den vorigen Schlüssen A_1, B, C mit A_2, E, D und den linken Ast mit dem rechten vertauscht. Hiernach hätte aber die Curve zwei höchste Punkte, was dem vorher Erwiesenen entgegen ist. Mithin muss die Voraussetzung unrichtig sein, dass die Curve *e* fünf Wendepunkte hat; und noch weniger kann sie sieben oder mehrere haben.

Es hat demnach auch die sphärische Curve ε nur drei Paare von Wendepunkten, von denen jedoch, wie schon bemerkt worden (§. 10.), zwei Paare zu einem Knoten- oder Spitzenpaare zusammengehen können. Auch würde sich durch ähnliche auf die Geometrie der Lage gegründete Betrachtungen, wie vorhin, geradezu darthun lassen, dass in der Curve ε, wenn sie ein Knoten- oder Spitzenpaar und ein Paar Wendepunkte hat, nicht noch andere merkwürdige Punkte dieser Art vorhanden sein können. Uebrigens kann es nicht geschehen, dass in ε alle drei Paare von Wendepunkten sich in einem Punktenpaare vereinigen, indem sonst die Curve von dem einen dieser beiden Punkte bis zum andern gegenüberliegenden ohne Wendung und ohne sich selbst zu schneiden, fortgehen müsste, welches nach §. 10. nicht möglich ist.

§. 18.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen übrig, ob und wenn eine Linie der dritten Ordnung λ ausser der einfachen Curve ε, welche ihr unbedingt zukommen muss, noch eine Zwillingscurve haben kann. Denn dass es nicht zwei oder mehrere sein können, folgt sogleich daraus, dass eine Zwillingscurve mit einem Hauptkreise immer eine gerade Anzahl von Punktenpaaren gemein hat (§. 11.), und dass daher bei zwei Zwillingscurven ein durch ein Punktenpaar der einen und ein Punktenpaar der andern gelegter Hauptkreis den Curven in wenigstens noch zwei andern Paaren, also überhaupt wenigstens in vier Paaren begegnet — gegen §. 16. — Aus gleichem Grunde erhellet, dass eine

zu λ gehörige Zwillingscurve, wenn anders eine solche bei λ überhaupt möglich ist, von keinem Hauptkreise in mehr als zwei Punktenpaaren getroffen werden darf, dass sie also keine Wendepunkte, Knoten oder Spitzen haben darf, dass von den zwei einzelnen Curven, aus denen sie besteht, jede für sich ganz auf einer und derselben Seite, und folglich beide auf verschiedenen Seiten eines sie in einem Punktenpaare berührenden Hauptkreises liegen müssen, und dass endlich weder die einfache Curve ε selbst, noch ein an ε berührend gelegter Hauptkreis der Zwillingscurve begegnen darf, dass folglich die zwei einzelnen Curven der Zwillingscurve auf entgegengesetzten Seiten der einfachen liegen müssen.

Hat nun die einfache Curve ε drei gesondert liegende Paare von Wendepunkten, so kann, obschon nicht jederzeit, eine Zwillingscurve noch statt finden. Um uns die Möglichkeit hiervon, wenn auch nur an einem sehr extremen Falle, begreiflich zu machen, wollen wir durch zwei Punktenpaare von ε einen Hauptkreis α legen, welcher der ε in noch einem dritten Punktenpaare begegnen wird, und wollen annehmen, dass nicht nur alle übrigen Punkte von ε in grosser Nähe von α liegen, sondern dass auch alle an ε berührend gelegten Hauptkreise mit α sehr kleine Winkel machen, — wie dies unter andern der Fall sein würde, wenn in dem in §. 10. gegebenen Beispiele die abwechselnd an die eine und die andere Seite der sechs gleichen Abschnitte eines Hauptkreises gelegten Bögen insgesammt sehr flach, Theile eines von einem Hauptkreise nur wenig verschiedenen kleineren Kreises, wären. — Alsdann wird jeder durch ein in der Nähe der Pole von α befindliches Punktenpaar gelegter Hauptkreis die ε nur in einem Punktenpaare schneiden; und wenn wir daher noch annehmen, dass die zwei einzelnen mit keinen merkwürdigen Punkten versehenen Curven der Zwillingscurve sehr klein, etwa zwei kleinere Kreise von nur geringem Durchmesser, sind, und dass die eine derselben in grosser Nähe des einen, mithin die andere in eben so grosser Nähe des andern Pols von α liegt, so wird, wie erforderlich, kein Hauptkreis die aus ε und der Zwillingscurve zusammengesetzte Linie λ in mehr als drei Punktenpaaren schneiden können.

Hat dagegen die einfache Curve ε nur Ein Paar Wendepunkte und zum Ersatz der beiden andern ein Knoten- oder ein Spitzenpaar, so kann sie mit einer Zwillingscurve nicht verbunden sein. Denn weil in

einem Knoten zwei Curvenpunkte vereinigt sind, so wird ein durch das Knotenpaar gelegter Hauptkreis die s immer noch in einem andern Punktenpaare schneiden. Wäre daher noch eine Zwillingscurve vorhanden, so würde ein durch ein Punktenpaar der letztern und durch das Knotenpaar in s gezogener Hauptkreis sowohl die Zwillingscurve als die s in noch einem Punktenpaare treffen, was gegen unser Criterium ist. — Und das von Knoten Gesagte gilt wörtlich auch von Spitzen.

§. 19.

Nach diesem Allen, und wenn wir noch bemerken, dass die zwei einzelnen Curven einer Zwillingscurve sich zu zwei isolierten Punkten zusammenziehen können, hat jede Linie der dritten Ordnung eine der nachstehenden fünf Formen. Es besteht nämlich eine solche entweder

1) aus einer einfachen Curve mit drei Paaren von Wendepunkten und aus einer Zwillingscurve ohne merkwürdige Punkte, oder
2) aus einer einfachen Curve mit drei Paaren von Wendepunkten und aus einem isolierten Punktenpaare, oder sie ist
3) bloss eine einfache Curve mit drei Paaren von Wendepunkten, oder
4) eine einfache Curve mit einem Paar Wendepunkte und einem Knotenpaar, oder
5) eine einfache Curve mit einem Paar Wendepunkte und einem Spitzenpaar.

Ob nun alle diese fünf Formen, welche die sphärischen Linien der dritten Ordnung bei alleiniger Berücksichtigung des oft gedachten Criteriums haben können, ihnen auch in Folge ihrer algebraischen Gleichung zukommen, ist eine Frage, welche erst durch Rechnung entschieden werden kann. Für jetzt steht nur dieses fest, dass eine solche Linie keine Form haben kann, welche nicht unter diesen fünf mit enthalten wäre, dass sie also namentlich immer wenigstens ein Paar, und wenn zwei, auch ein drittes, aber nicht mehr Paare von Wendepunkten hat. Die folgende Untersuchung wird uns indessen auch von der algebraischen Wirklichkeit der erhaltenen fünf Formen überzeugen.

Ich werde dabei von dem Algorithmus Gebrauch machen, den ich in meiner Abhandlung «über eine neue Behandlungsweise der

analytischen Sphärik» *) veröffentlicht habe. Da ich jedoch nicht voraussetzen kann, dass allen Lesern des Vorliegenden jene Abhandlung zu Gesicht gekommen, so will ich eine Erklärung des Fundaments und der Beschaffenheit meines sphärischen Algorithmus, so weit wir desselben hier bedürfen, vorangehen lassen, und, um dieses in möglichster Kürze zu thun, ihn nicht, wie dort geschah, auf geometrische Principien, sondern auf die ersten Sätze vom Gleichgewichte zurückführen, als von welchen seine Formeln, wenn man will, als Symbole angesehen werden können.

Der sphärische Algorithmus.

§. 20.

1) Sind $A, B, \dots$ Punkte auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt O heisse, und $a, b \dots$ irgend welche Zahlen, so sollen

$$aA,\ bB, \dots$$

Kräfte bedeuten, welche auf den als frei beweglich zu denkenden Punkt O nach den Richtungen OA, $OB, \dots$ wirken, und deren Intensitäten sich wie die Zahlen $a, b, \dots$ verhalten.

Durch die Gleichung

$$(a) \quad aA + bB + \dots = 0$$

werde ausgedrückt, dass die Kräfte aA, $bB, \dots$ sich das Gleichgewicht halten; durch die Gleichung

$$(b) \quad aA + bB + \dots = pP,$$

dass die Kraft pP die Resultante der Kräfte aA, $bB, \dots$ ist; durch die Gleichung

$$(c) \quad aA + bB + \dots = pP + qQ + \dots,$$

dass die Kräfte aA, $bB, \dots$ in Vereinigung dieselbe Wirkung, wie die Kräfte pP, $qQ, \dots$ in Vereinigung, haben.

2) Zwei einander gleiche Kräfte, deren Richtungen einander entgegengesetzt sind, können auch als solche betrachtet werden, welche einerlei Richtung haben, und deren Intensitäten, ihrem absoluten Werthe nach einander gleich, entgegengesetzte Vorzeichen haben. Wenn daher in den Gleichungen (a), (b), (c), in denen wir vorhin stillschweigend alle

*) Sie befindet sich in der Sammlung von Abhandlungen, herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft. Leipzig, 1846.



die die Intensitäten ausdrückenden Zahlen als positiv annahmen, ein oder etliche negative Glieder sich vorfinden, so sind die dadurch dargestellten Kräfte Kräften mit eben so grossen positiven Intensitäten, aber mit entgegengesetzten Richtungen, gleich zu achten, und man kann demnach, wenn es gefällt, das Minuszeichen eines Gliedes mit dem Pluszeichen, so wie auch umgekehrt, vertauschen, dafern man nur gleichzeitig statt des in dem Gliede enthaltenen Punktes seinen Gegenpunkt setzt. So ist z. B. $\mp aA$ gleichbedeutend mit $\pm aA'$ (§. 9. 1.).

3) Da es in den Gleichungen (a), (b) und (c) nicht auf die absoluten Werthe der Coefficienten $a, b, \ldots, p, q, \ldots$, sondern nur auf ihr gegenseitiges Verhältniss ankömmt, so bleibt jede dieser Gleichungen noch richtig, wenn alle ihre Glieder mit einer und derselben Zahl multipliciert oder dividiert werden. Aus dem bekannten Satze der Statik, dass, wenn von zwei oder mehreren Systemen von Kräften jedes für sich im Gleichgewichte ist, auch die Kräfte aller Systeme zusammen sich das Gleichgewicht halten, aus diesem Satze und ihm ähnlichen folgt ferner, dass man zwei oder mehrere solcher Gleichungen, wie (a), (b), (c), zu einander addieren, die eine von der andern subtrahieren, Glieder von der einen Seite des Gleichheitszeichens auf die andere mit entgegengesetzten Vorzeichen bringen, und überhaupt mit diesen Gleichungen alle die algebraischen Operationen vornehmen darf, bei welchen die einzelnen Glieder ihre obige Form behalten, also Punkte mit numerischen Coefficienten bleiben.

4) Zwei auf O wirkende Kräfte sind nur dann und dann immer von gleicher Wirkung, wenn sie einerlei Richtung und einander gleiche Intensitäten haben. Aus der Gleichung

$$aA = pP$$

ist daher zu schliessen, dass P ein mit A identischer Punkt, und dass $p = a$ ist, oder auch, dass P der Gegenpunkt von A, und $p = -a$ ist.

5) Aus der Gleichung

$$aA + bB = pP$$

ist nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte zu schliessen, dass die drei Geraden OA, OB, OP in einer Ebene liegen, und dass, wenn man in dieser Ebene ein Parallelogramm construiert, von welchem zwei Seiten und die eine Diagonale in OA, OB und in OP fallen, jene zwei Seiten und diese Diagonale sich wie die Zahlen a, b, p verhalten. Oder, was dasselbe ausdrückt: In Bezug auf ein in der Ebene OAB

enthaltenes Coordinatensystem, dessen Axen die Richtungen OA, OB haben, sind die Coordinaten des in dieser Ebene gleichfalls begriffenen Punktes P und der Abstand des P vom Anfangspunkte O der Coordinaten den Zahlen a, b, p proportional.

Oder mit noch andern Worten: Es liegen die Punkte A, B, P in einem Hauptkreise, und dieses dergestalt, dass sich

$$\sin PB : \sin AP : \sin AB = a : b : p$$

verhalten, wobei die Bögen von P bis B, von A bis P und von A bis B nach einem und demselben Sinne zu rechnen sind.

6) Eben so folgt nach dem Satze vom Parallelepipedum der Kräfte, und vorausgesetzt, dass A, B, C nicht in einem Hauptkreise liegen, aus der Gleichung

$$aA + bB + cC = pP,$$

dass a, b, c sich wie die Coordinaten von P in Bezug auf drei Axen verhalten, deren Richtungen OA, OB, OC sind, und dass nach demselben Verhältnisse der Coefficient p dem Abstande des P vom Anfangspunkte O der Coordinaten oder dem Kugelhalbmesser proportional ist.

Mit der gegenseitigen Lage der Punkte A, B, C, P sind demnach die Verhältnisse zwischen a, b, c, p unzweideutig bestimmt. Und umgekehrt: Sind die Punkte A, B, C und die Verhältnisse zwischen ihren Coefficienten a, b, c gegeben, so sind damit zwei einander gegenüberliegende Punkte der Kugelfläche unzweideutig bestimmt; es sind nämlich die Durchschnitte P und P' der Fläche mit einer durch O dergestalt gelegten Geraden, dass in Bezug auf OA, OB, OC, als Axen, die Coordinaten jedes Punktes dieser Geraden sich wie a, b, c verhalten.

7) Indem wir auf solche Weise alle Punkte P der Kugelfläche auf drei nicht in einem Hauptkreise liegende Punkte A, B, C beziehen, wollen wir letztere Punkte die Fundamentalpunkte, die drei durch je zwei von ihnen zu legenden Hauptkreise BC, CA, AB die Fundamentalkreise und das von ihnen gebildete Dreieck ABC das Fundamentaldreieck nennen.

Das Aggregat

$$aA + bB + cC,$$

in welchem die Coefficienten a, b, c die Coordinaten von P in Bezug auf OA, OB, OC als Axen sind, oder doch diesen Coordinaten proportionale Grössen vorstellen, und wodurch der Punkt P, sowie sein Gegenpunkt P' bestimmt wird, heisse der Ausdruck des Punktenpaares P, P', oder kurz: des Punktes P, indem wir unter P seinen Gegen-

punkt mit verstehen. Welcher von beiden Punkten gemeint ist, wird erst aus dem Vorzeichen seines Coefficienten p erkannt. Um bloss anzuzeigen, dass $aA+..$ der Ausdruck des P (und seines Gegenpunktes) ist, werden wir uns, mit Weglassung von p, des Zeichens ($\equiv$) bedienen und schreiben

$$aA+bB+cC\equiv P, \text{ statt } =pP \text{ oder } =-pP'.$$

Ist einer der drei Coefficienten des Ausdrucks, z. B. c, Null, also $P\equiv aA+bB$, so liegt P im F.kreise AB (5.); sind zwei Coefficienten zugleich Null, etwa b und c, so fällt P mit A zusammen (4.). Dass diese Sätze auch umgekehrt gelten, ist von selbst klar.

8) Heissen jetzt x, y, z die Coefficienten von A, B, C, und α, β die Exponenten der Verhältnisse $x:z$, $y:z$. Sind diese Exponenten gegeben, so ist es auch der durch $xA+yB+zC$ ausgedrückte Punkt P; es sind nämlich

$$\frac{x}{z}=\alpha \text{ und } \frac{y}{z}=\beta$$

die Gleichungen der Geraden OP, wenn OA, OB, OC als Axen der x, y, z genommen werden. Sind aber α, β nicht selbst, sondern nur eine Gleichung $\beta=f(\alpha)$ zwischen ihnen gegeben, so dass immer andern Werthen von α immer andere von β zugehören, so bilden alle somit sich ergebenden Geraden eine Kegelfläche, welche O zur Spitze hat, und deren Gleichung

$$(u)\ \dots\ \frac{y}{z}=f\left(\frac{x}{z}\right),$$

also eine homogene Gleichung zwischen x, y, z ist; und alle durch $xA+\dots$ ausgedrückten Punkte bilden eine sphärische Curve, welche keine andere, als der Durchschnitt der Kugelfläche mit jener Kegelfläche ist.

Durch den Ausdruck $xA+yB+zC$ in Verbindung mit einer homogenen Gleichung zwischen x, y, z wird demnach immer eine sphärische Curve dargestellt, diejenige nämlich, in welcher die Kugelfläche von einer durch dieselbe Gleichung dargestellten Kegelfläche geschnitten wird, wenn die Coordinaten x, y, z der Gleichung auf OA, OB, OC als Axen bezogen werden.

9) Ist die homogene Gleichung (u) eine algebraische, und nach Wegschaffung der Bruchform vom $n$ten Grade, so dass in jedem ihrer Glieder die Summe der Exponenten von x, y, z gleich n ist, so gehört die durch sie ausgedrückte Kegelfläche, mithin auch (§. 4.) die durch dieselbe Gleichung dargestellte sphärische Curve zur $n$ten Ordnung.



Die allgemeine Form einer homogenen Gleichung des ersten Grades ist

$$ax + by + cz = 0.$$

Die hierdurch ausgedrückte Kegelfläche ist eine den Punkt O enthaltende Ebene, und daher die sphärische Curve ein Hauptkreis (ebds.). Für $x = 0$ wird $y : z = -c : b$. Hiermit verwandelt sich der Ausdruck $xA + yB + zC$ in $cB - bC$; d. h. der Hauptkreis, dessen Gleichung $ax + \ldots = 0$ ist, schneidet den F. kreis BC in einem Punkte, dessen Ausdruck $cB - bC$. Eben so finden sich $aC - cA$ und $bA - aB$ als die Ausdrücke für die Durchschnitte des Hauptkreises mit den F. kreisen CA und AB.

Ist die Constante $a = 0$, so reduciren sich die letzteren zwei Ausdrücke auf $-cA$ und bA; d. h. der Hauptkreis, dessen Gleichung

$$by + cz = 0,$$

geht durch den F. punkt A und schneidet den F. kreis BC im Punkte $cB - bC$.

Ist auch noch $b = 0$, so wird letzterer Durchschnitt $\equiv B$; d. h. der Hauptkreis, dessen Gleichung

$$z = 0$$

ist der F. kreis AB selbst; und ähnlicher Weise sind $x = 0$ und $y = 0$ die Gleichungen der F. kreise BC und CA.

10) Die Bequemlichkeit unsers sphärischen Algorithmus zeigt sich insbesondere beim Uebergange von einem F. dreieck oder Coordinatensystem zu einem andern desgleichen. Ist nämlich eine homogene Gleichung zwischen x, y, z, als Gleichung einer sphärischen Curve in Bezug auf die F. punkte A, B, C gegeben, und soll ihre Gleichung in Bezug auf irgend drei andere F. punkte A_1, B_1, C_1 gefunden werden, so setze man, es seien die neuen F. punkte, durch die alten ausgedrückt:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} A_1 = aA + bB + cC, \\ B_1 = a'A + b'B + c'C, \\ C_1 = a''A + b''B + c''C, \end{cases}$$

so dass, den Kugelhalbmesser $= 1$ angenommen, a, b, c die Coordinaten von A_1, u. s. w. in Bezug auf OA, OB, OC, als Axen, sind. Seien ferner t, u, v drei von den Veränderlichen x, y, z und den Constanten a, b, c, $a' \ldots c''$ dergestalt abhängige Veränderliche, dass

$$(\beta) \quad \begin{cases} at + a'u + a''v = x, \\ bt + b'u + b''v = y, \\ ct + c'u + c''v = z, \end{cases}$$

so kommt, wenn man die drei Gleichungen (α) der Reihe nach mit t, u, v multiplicirt und sie hierauf addirt:

$$tA_1 + uB_1 + vC_1 = xA + yB + zC.$$

Da also, wenn t, u, v auf die durch (β) ausgedrückte Weise von x, y, z abhängen, die durch $tA_1 + \ldots$ und $xA + \ldots$ ausgedrückten Punkte der Kugelfläche identisch sind, so hat man nur die Werthe von x, y, z aus (β) in der gegebenen Curvengleichung zu substituiren, und es wird die hervorgehende homogene Gleichung zwischen t, u, v dieselbe auf A_1, B_1, C_1, als F.punkte, bezogene Curve darstellen.

So war z. B. $x = 0$ die Gleichung des F.kreises BC; mithin ist $at + a'u + a''v = 0$ die Gleichung des auf A_1, B_1, C_1 bezogenen Hauptkreises BC; eben so $bt + b'u + b''v = 0$ die Gleichung des Hauptkreises CA; u. s. w.

Analytische Entwickelung der Grundformen der sphärischen Linien der dritten Ordnung.

§. 21.

Mit Anwendung des jetzt erörterten Calculs wollen wir nunmehr die verschiedenen Formen, welche eine sphärische Linie der dritten Ordnung zu Folge ihrer Gleichung haben kann, zu erforschen suchen und dabei von den vorhin durch geometrische Betrachtungen gefundenen Eigenschaften einer solchen zunächst nur den Satz benutzen, dass sie immer wenigstens Einen Wendepunkt*) hat.

Die allgemeine Gleichung einer sphärischen Linie der dritten Ordnung ist:

$$(A)\; ax^3 + by^3 + cz^3 + fy^2z + gz^2x + hx^2y + iyz^2 + kzx^2 + lxy^2 + mxyz = 0.$$

Ohne an Allgemeinheit zu verlieren wird sich diese Gleichung etwas einfacher gestalten, wenn wir das F.dreieck ABC so gelegt annehmen, dass B in den einen nothwendig vorhandenen Wendepunkt der Curve fällt, und diese daselbst von AB berührt wird, oder mit andern Worten: dass der Punkt B und zwei ihm in AB nächstliegende Punkte der Curve angehören.

*) Nicht Ein Paar Wendepunkte, da jetzt, wie schon erinnert worden (§. 20. 7.), unter jedem Punkte der Curve zugleich mit sein Gegenpunkt, als ein ebenfalls der Curve angehöriger Punkt, verstanden wird.



Nun ist für die der Curve mit dem F. kreis AB gemeinsamen Punkte $z = 0$ (§. 20. 7.), und daher

$$(a)\quad ax^3 + by^3 + hx^2y + lxy^2 = 0.$$

Die Punkte selbst aber werden durch $xA + yB$ ausgedrückt, nachdem darin für das Verhältniss $x:y$ die drei aus (a) folgenden Werthe desselben nach einander substituiert worden.

Soll B einer dieser drei Punkte sein, soll also die Curve durch B gehen, so muss, weil sich der Ausdruck $xA + yB$ nur für $x = 0$ auf B reduciert, der Gleichung (a) Genüge geschehen, wenn man $x = 0$ setzt, und es muss folglich die Constante $b = 0$ sein. In der That reducirt sich damit (a) auf

$$ax^3 + hx^2y + lxy^2 = 0,$$

wovon die linke Seite den Factor x enthält. Sondert man denselben ab, so kommt die Gleichung

$$(b)\quad ax^2 + hxy + ly^2 = 0,$$

durch deren Auflösung sich die beiden andern Durchschnitte der Curve mit AB ergeben.

Soll noch einer derselben in B fallen, soll also die Curve durch B gehen und daselbst von AB berührt werden, so muss aus gleichem Grunde, wie vorhin, $l = 0$ sein, als wodurch sich (b) in die abermals mit dem Factor x begleitete Gleichung

$$ax^2 + hxy = 0$$

verwandelt. Nach Division mit demselben findet sich für den noch übrigen Durchschnitt der Curve mit AB

$$(c)\quad ax + hy = 0.$$

Soll daher, wie gefordert wird, auch dieser noch mit B identisch sein, so hat man noch $h = 0$, also überhaupt die Coefficienten von y^3, xy^2 und x^2y in (A) einzeln $= 0$ zu setzen.

Bei einer solchen Lage des F. dreiecks gegen eine Linie der dritten Ordnung, dass B in einen Wendepunkt der Linie fällt, und sie daselbst von AB berührt wird, ist demnach ihre allgemeine Gleichung

$$ax^3 + cz^3 + fy^2z + gz^2x + iyz^2 + kzx^2 + mxyz = 0,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(B)\quad [fy^2 + (mx + iz)y]\,z + ax^3 + kzx^2 + gz^2x + cz^3 = 0,$$

eine Gleichung, die sich durch nachstehende Betrachtungen noch weiter vereinfachen lässt.



§. 22.

Sei P' (Fig. 5.) ein beliebiger Punkt der Curve, und sein Ausdruck

$$(a)\quad p'P' = x'A + y'B + z'C,$$

so dass x', y', z', für x, y, z in der Gleichung (B) substituirt, ihr Genüge leisten. Weil die Gleichung nach y quadratisch ist, so wird, wenn man in ihr $x = x'$ und $z = z'$ setzt, sich für y nächst y' noch ein zweiter sie befriedigender Werth y'' finden. Der demselben zugehörige Curvenpunkt heisse P'', so dass

$$(b)\quad p''P'' = x'A + y''B + z'C.$$

Aus (a) und (b) folgt

$$(c)\quad p'P' - p''P'' = (y' - y'')B,$$ und wenn

$$(d)\quad p'P' + p''P'' = qQ$$ gesetzt wird:

$$(e)\quad qQ = 2x'A + (y' + y'')B + 2z'C.$$

Zu Folge der nach y quadratischen Gleichung (B) ist aber $y' + y''$ $= -\frac{mx' + iz'}{f}$. Hiermit verwandelt sich (e) in

$$fqQ = 2fx'A - (mx' + iz')B + 2fz'C,$$

und es wird daher, wenn man noch

$$(f)\quad 2fA - mB = dD$$ und

$$(g)\quad 2fC - iB = eE$$ setzt:

$$(h)\quad Q \equiv dx'D + ez'E.$$

Nun liegen nach (c) die zwei Curvenpunkte P' und P'' mit B in einem Hauptkreise, in welchem nach (d) auch der Punkt Q mit begriffen ist. Dabei verhalten sich (§. 20. 5.)

$$\sin P'B : \sin BP'' = -p'' : p'$$ und

$$\sin P'Q : \sin QP'' = p'' : p',$$ folglich

$$\sin P'B : \sin BP'' = -\sin P'Q : \sin QP'',$$

und es wird demnach der Bogen $P'P''$ in B und Q harmonisch getheilt. — Endlich ist nach (h) Q ein Punkt des zu Folge (f) und (g) von dem willkührlich angenommenen P' unabhängigen Hauptkreises DE, und wir schliessen daher:

Wird in jeder von drei oder mehreren sich in einem Wendepunkte B schneidenden sphärischen Sehnen $P'P''$ der Curve ein Punkt Q so bestimmt, dass die Sehne durch ihn und durch B harmonisch getheilt wird, so liegen alle diese Punkte Q in einem Hauptkreise DE.

Wir wollen diesen Hauptkreis, nach Analogie einer ähnlichen Eigenschaft bei den Linien der zweiten Ordnung, die Polare des Wendepunktes B nennen.

Ist die Sehne $P'P''$ unendlich klein, und liegt B ausserhalb ihrer Endpunkte, so fällt der Punkt Q der Polare nach der Natur der harmonischen Theilung zwischen die Endpunkte, d. h.:

Der Berührungspunkt einer durch einen Wendepunkt B an die Curve gelegten Tangente ist, wo nicht B selbst, ein Punkt der Polare von B. — Und umgekehrt wird die Curve von einem Hauptkreise, welcher durch B und einen ihrer Durchschnitte mit der Polare von B gelegt worden, in dem Durchschnitte berührt.

§. 23.

Die Reduction der allgemeinen Gleichung (A) der Curve auf die einfachere Form (B) wurde dadurch bewirkt, dass wir den F. punkt B mit dem einen Wendepunkte der Curve und den F. kreis AB mit der Tangente daselbst zusammenfallen liessen. Der F. kreis CA und der durch B zu legende BC blieben dabei der Willkühr überlassen. Zu noch mehrerer Vereinfachung der Gleichung wollen wir jetzt annehmen, dass, während die F. kreise AB und BC ihre vorige Lage unverändert behalten, der dritte CA mit der Polare DE des Wendepunktes B identisch wird, dass also, weil DE die BA und BC nach den Formeln (f) und (g) in D und E schnitt, jetzt A mit D und C mit E zusammenfällt. Wegen des Ersteren ist nach (f) nöthig, dass $m = 0$, und wegen des Letzteren nach (g), dass $i = 0$. Hiermit reduciert sich die allgemeine Gleichung (B) einer sphärischen Linie der dritten Ordnung auf

$$(C) \quad fy^2z + ax^3 + kzx^2 + gz^2x + cz^3 = 0.$$

§. 24.

Um die Beschaffenheit der durch (C) ausgedrückten Curve zu erforschen, wollen wir zunächst nicht sie selbst, sondern ihre Projection auf eine mit dem F. kreise AB parallele Ebene in Untersuchung ziehen. Da die Gleichung einer sphärischen Curve nach §. 20. 8) auch als die Gleichung einer auf OA, OB, OC, als coordinierte Axen, bezogene Gleichung einer Kegelfläche betrachtet werden kann, welche der Kugel Mittelpunkt O zur Spitze und die sphärische Curve zur leitenden Linie hat, und da in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem die Gleichung einer durch den Punkt C der Axe OC parallel mit der Ebene OAB gelegten Ebene

$$z = OC$$

ist, so werden wir die verlangte Projection, als den Durchschnitt jener Kegelfläche mit dieser Ebene, sogleich erhalten, wenn wir in (C) der Coordinate z den constanten Werth OC beilegen. Setzen wir demnach die jetzt constanten Grössen

$$a:fz = -\alpha,\ k:f = -\beta,\ gz:f = -\gamma,\ cz^2:f = -\delta,$$

so ergiebt sich als die Gleichung der Projection

$$(C^*)\ y^2 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Hierbei sind die Axen der x und der y mit OA und OB parallel. Ihr gemeinschaftlicher Anfangspunkt ist C oder die Projection von C, daher diese Axen auch als die Projectionen der F.kreise CA und CB anzusehen sind.

Der Lauf der sphärischen Curve bei B wird, weil B ein Punkt des mit der Projectionsebene parallelen Hauptkreises AB ist, durch zwei unendliche mit OB oder der Axe der y parallel zu werden strebende Aeste dargestellt (Fig. 6.). Weil die sphärische Curve in B den Kreis AB berührt und daselbst eine Wendung macht, so sind diese Aeste von parabolischer Form und laufen auf einer und derselben Seite der Axe der y, welcher sie ihre hohle Seite zuwenden, nach entgegengesetzten Richtungen (§. 15.). Der Wendepunkt B der ebenen Curve, welcher dem Wendepunkte B der sphärischen entspricht, liegt demnach unendlich entfernt nach einer mit der Axe der y parallelen Richtung. Seine Polare ist die Axe der x, als die Projection der Polare CA von B. So wie jede durch B gehende Sehne $P'P''$ der sphärischen Curve in B und von CA in Q harmonisch getheilt wird (§. 22.), so wird auch jede nach B gerichtete, d. i. mit der Axe der y parallele Sehne P′P″ der ebenen Curve in B und von der Axe der x, es sei in Q, harmonisch, d. h. also getheilt, dass P′B : BP″ = — P′Q : QP″*). Wegen der unendlichen Entfernung von B ist aber der Exponent des erstern dieser beiden Verhältnisse = — 1, folglich P′Q = QP″, wie auch un-

*) Nach dem bekannten Satze, dass, wenn P', P'', B, Q irgend vier Punkte eines Hauptkreises und P′, P″, B, P ihre Projectionen auf eine beliebige Ebene und daher vier in einer Geraden liegende Punkte sind, die zwei Verhältnisse

$$\frac{\sin P'B}{\sin BP''} : \frac{\sin P'Q}{\sin QP''} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{P'B}}{\mathrm{BP''}} : \frac{\mathrm{P'Q}}{\mathrm{QP''}}$$

einander gleich sind. Liegen die vier erstern Punkte harmonisch, so ist das erstere, folglich auch das letztere Verhältniss, = — 1, und die vier letztern Punkte haben daher gleichfalls eine harmonische Lage.



mittelbar aus der Gleichung (C^*) fliesst, als nach welcher jeder Abscisse CQ zwei einander gleiche und entgegengesetzte Ordinaten QP′ und QP″ zugehören.

§. 25.

Die sphärische Curve, deren Gleichung (C), und die ebene, deren Gleichung (C^*) ist, liegen in einer und derselben den Punkt O zur Spitze habenden Kegelfläche, und es sind daher die Projectionen beider Curven durch Linien aus O auf irgend eine andere Ebene mit einander identisch. Da nun die Gleichung (C) dieselben Curven, wie die allgemeine Gleichung (A), umfasst, indem sie aus (A) durch Annahme einer besondern Lage des F.dreiecks hervorgegangen, und da folglich aus der durch (C) ausgedrückten sphärischen Curve nach den verschiedenen Werthen der in (C) vorkommenden Constanten und nach der verschiedenen Lage der Ebene, auf welche sie projiciert wird, alle möglichen ebenen Linien der dritten Ordnung entstehen können, so muss dasselbe auch von der durch (C^*) dargestellten ebenen Curve gelten.

In der That ist es die Gleichung (C^*), aus welcher Newton in seiner Enumeratio linearum tertii ordinis die fünf von ihm sogenannten divergierenden Parabeln ableitet, fünf Curven, die, wie er hinzusetzt, mit ihren Schatten alle übrigen Linien der dritten Ordnung erzeugen, ebenso, wie jede Linie der zweiten Ordnung der Schatten eines Kreises ist.

Die fünf verschiedenen Formen aber, welche die mit der Gleichung (C^*) construierte ebene Curve annehmen kann, erhält Newton unmittelbar durch Betrachtung der drei Wurzeln der Gleichung

$$(x)\quad \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0.$$

Denn entweder sind alle drei Wurzeln reell, oder nur eine reell und die beiden andern imaginär. Unter der erstern Annahme sind von den drei reellen Wurzeln entweder

I. keine zwei einander gleich, oder
II. die beiden kleinern, oder
III. die beiden grössern, oder
IV. alle drei einander gleich; wozu noch
V. der Fall kommt, wenn die Gleichung (x) nur eine reelle Wurzel hat.

Die diesen fünf Fällen entsprechenden fünf Curven wollen wir gleichfalls mit I., II., ...V. bezeichnen und ihre Formen einzeln zu bestimmen suchen.

Zuvor noch die Bemerkung, dass jede dieser fünf Curven zu Folge ihrer gemeinsamen Gleichung (C^*), wenn das Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist, durch die Axe der x in zwei symmetrische Hälften getheilt wird, dass wir aber hier den Ausdruck symmetrisch auch bei schiefwinkligen Systemen gebrauchen und je zwei Punkte gegen die Axe der x symmetrisch liegend nennen werden, wenn die sie verbindende gerade Linie mit der Axe der y parallel ist und von der Axe der x, welche vorzugsweise die Axe heisse, halbiert wird. Man gewahrt augenblicklich, dass auch bei dieser Erweiterung des Begriffs symmetrischer Lage, wenn drei oder mehrere Punkte der Ebene in einer Geraden sind, die ihnen symmetrisch entsprechenden gleichfalls in einer Geraden liegen, dass beide Gerade sich in einem Punkte der Axe schneiden, dass die gegenseitigen Entfernungen der erstern Punkte in denselben Verhältnissen, wie die gegenseitigen Entfernungen der letztern, zu einander stehen; dass daher, wenn vier Punkte harmonisch liegen, auch die ihnen entsprechenden vier harmonische Punkte sind; dass ferner, wenn eine Curve von der Axe in zwei symmetrische Theile getheilt wird, die an zwei einander entsprechende Punkte beider Theile gezogenen Tangenten zwei symmetrisch liegende Gerade sind, dass, wenn der eine der beiden Punkte ein Wendepunkt ist, es auch der andere ist, u. s. w.

§. 26.

Unter der Annahme, dass die drei Wurzeln der Gleichung (x) reell sind, können wir die Gleichung (C^*) schreiben:

$$y^2 = \alpha\ (x - l)\ (x - m)\ (x - n).$$

Sei nun P ein beliebiger Curvenpunkt, und Q der Punkt, in welchem die Axe der x von einer durch P mit der Axe der y gelegten Parallele geschnitten wird, also $y = QP$, $x = CQ$. Man trage — mit Rücksicht auf die Vorzeichen — auf die Axe der x von ihrem Anfangspunkte C aus die Längen $CL = l$, $CM = m$, $CN = n$, so wird $x - l = LQ$, $x - m = MQ$, $x - n = NQ$, und die Curvengleichung verwandelt sich in

$$y^2 = \alpha\ .\ LQ.\ MQ.\ NQ.$$

Dabei wollen wir die Constante α als positiv betrachten, indem der Fall, wenn α negativ sein sollte, sich sogleich dadurch auf den

erstern reducieren lässt, dass man die vorher negative Richtung der Axe der x zur positiven, und umgekehrt, nimmt. Wir wollen ferner annehmen, dass die Punkte L, M, N in dieser Ordnung nach der positiven Richtung der Axe der x auf einander folgen, dass also die Abschnitte LM und MN beide positiv sind.

Bei der Curve I. sind nun L, M, N drei verschiedene Punkte und zugleich die einzigen, in welchen $y=0$ wird. Liegt Q zwischen L und M, oder auf der positiven Seite von N, so ist die rechte Seite der Gleichung positiv; negativ dagegen, wenn Q zwischen M und N, oder auf die negative Seite von L fällt. Hieraus folgt, dass von N aus nach der positiven Seite der Axe hin zwei symmetrisch gegen sie liegende Aeste sich ins Unendliche erstrecken, und dass zwischen L und M und bis zu diesen Grenzen eine in sich zurücklaufende und daher von jenen Aesten isolirte Curve (ovalis) enthalten ist. (Fig. 7.).

Liegt Q dem N unendlich nahe, so kann statt der vorigen Gleichung geschrieben werden:

$$y^2 = \alpha.\ \mathrm{LN.\ MN.\ NQ},$$

Es ist dies die Gleichung einer Parabel der zweiten Ordnung, welche die Axe der x zu ihrer Axe und N zum Scheitel hat, und wir schliessen hieraus, dass die Curve in unmittelbarer Nähe von N gegen die Axe hohl ist. Da aber die zwei unendlichen Aeste der Curve der Axe der y ihre hohle (§. 24.) und mithin der Axe der x ihre erhabene Seite zukehren, so muss, ehe dieses geschieht, jeder der beiden Aeste eine Wendung*) machen, und die Curve muss daher über die positive Seite von N hinaus zwei symmetrisch liegende, in der Figur mit F und G bezeichnete Wendepunkte haben.

Newton nennt hiernach die Curve I.: parabola campaniformis cum ovali.

Die Curve II., bei welcher $l = m$ ist, unterscheidet sich von der vorigen nur dadurch, dass die Punkte L und M hier vereinigt sind, und damit die vorhin zwischen ihnen enthaltene Curve sich in einen isolierten Punkt L zusammengezogen hat (Fig. 8.). Sie führt bei Newton den Namen parabola punctata, und ihre Gleichung ist

$$y^2 = \alpha\ (x-l)^2\ (x-n),\ \text{wo}\ l < n.$$

*) oder drei, fünf, u. s. w. Wendungen, — wodurch aber eine grössere Zahl von Wendepunkten entstünde, als bei einer Linie der dritten Ordnung statt haben kann (§. 17.).



Die Curve V., deren Gleichung wir also schreiben können:

$$y^2 = \alpha\ [(x - f)^2 + g^2]\ (x - n),$$

hat mit der Axe bloss den Punkt N, einen parabolischen Scheitel, gemein, von welchem aus, wie bei I. und II., zwei symmetrisch gegen die Axe liegende unendliche Aeste fortgehen, welche ihr Anfangs die hohle, später die erhabene Seite zuwenden, indem sie zuletzt der Axe der y parallel werden (Fig. 9.). Es ist die parabola pura.

Für die Curve III. ist $m = n$, und daher die Gleichung derselben:

$$y^2 = \alpha\ (x - l)\ (x - n)^2, \text{ wo } l < n, \text{ oder}$$
$$y^2 = \alpha.\ \text{LQ}.\ \text{NQ}^2, \text{ wo LN positiv.}$$

Hier ist also die bei I. stattfindende Ovale geblieben; nur hat sich von ihren zwei Scheiteln derjenige M, welcher dem Scheitel N der Parabel am nächsten lag, bis an N herangezogen. Um den Gang der Curve bei N zu bestimmen, wollen wir Q einen dem N unendlich nahe liegenden Punkt sein lassen. Die Gleichung wird alsdann sehr nahe:

$$(u)\quad y^2 = \alpha.\ \text{LN}.\ \text{NQ}^2.$$

Sie gehört zwei sich in N schneidenden gegen die Axe symmetrisch liegenden Geraden an, den Tangenten der Curve in N; und wir ersehen hieraus, dass die zwei Aeste der Curve sich jetzt in N kreuzen, und somit N ein Knoten geworden ist, die vorige Ovale aber die Gestalt einer Schleife angenommen hat (Fig. 10.). — Parabola nodata.

Die Constante α lässt sich hier auf eine eigenthümliche Weise bestimmen. Wird nämlich durch L eine mit der Axe der y parallele Gerade gelegt, welche die eine jener zwei Tangenten, gleichviel welche, in K schneidet, so ist LK die Ordinate dieses Durchschnittspunktes und L der Endpunkt seiner Abscisse, also zu Folge der Gleichung (u):

$$\text{LK}^2 = \alpha.\ \text{LN}.\ \text{NL}^2 \text{ und } \alpha = \frac{\text{LK}^2}{\text{LN}^3}.$$

Durch Substitution dieses Werthes von α in der Curvengleichung wird letztere:

$$\frac{y^2}{\text{LK}^2} = \frac{\text{LQ}.\ \text{NQ}^2}{\text{LN}^3},$$

oder, wenn man die Längen $\text{LN} = a$, $\text{LK} = b$ und die vom Knoten N aus gerechnete Abscisse $\text{NQ} = x$ setzt, welches $\text{LQ} = \text{LN} + \text{NQ} = a + x$ giebt:

$$(v)\quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3}.$$

Wenn endlich auch noch der Punkt L mit N zusammenfällt, so entsteht die Curve IV., welcher daher die Gleichung

$$y^2 = \alpha\ (x - n)^3 \text{ oder } y^2 = \alpha.\ \text{NQ}^3$$

zukommt. Ist hierin NQ eine unendlich kleine Linie der ersten Ordnung, so wird y eine Linie von der noch höhern Ordnung $\frac{3}{2}$. Die zwei symmetrischen Aeste der Curve werden daher in N, wo sich die vorige Schleife in eine Spitze zusammengezogen hat, von der Axe berührt (Fig. 11.). — Parabola cuspidata.

Man bemerke noch, dass nicht ebenso, wie bei den Curven I., II. und V., auch bei III. und IV. zwei symmetrische Wendepunkte vorhanden sind, indem an die Stelle derselben bei III. ein Knoten und bei IV. eine Spitze getreten ist. Vergl. §. 10. Auch liesse sich der Mangel von Wendepunkten bei III. und IV. sehr leicht aus den Gleichungen dieser Curven nachweisen.

§. 27.

Wir wollen jetzt die fünf parabolischen Curven I.,...V. auf die Kugel zurück projicieren. Denn somit werden wir alle die verschiedenen Formen erhalten, welche eine sphärische Linie der dritten Ordnung ihrer Gleichung zu Folge annehmen kann.

Weil jede der fünf Parabeln eine stetige Curve mit zwei nach entgegengesetzten Richtungen laufenden Aesten ist, so ist die sphärische Projection einer jeden eine einfache Curve (§. 14.). Der unendlich entfernte Punkt der Aeste bildet sich als ein Wendepunkt*) dieser Curve ab. Nächstdem hat von den einfachen Curven, welche aus I. II. und V. entspringen, eine jede noch zwei andere Wendepunkte. Von diesen drei einfachen Curven, deren jede drei Wendepunkte hat, ist die erste noch mit einer Zwillingscurve und die zweite mit einem isolierten Punkte begleitet. Die Curven III. und IV. aber stellen sich auf der Kugel als einfache Curven dar, von denen die eine einen Wendepunkt und einen Knoten, die andere einen Wendepunkt und eine Spitze hat.

Wir sind somit auf die fünf in §. 19. erhaltenen Formen der sphärischen Linien dritter Ordnung zurückgekommen und ersehen daraus, dass alle aus dem in §. 16. aufgestellten geometrischen Criterium fliessenden Formen dieser Linien sich bei den aus der allgemeinen Gleichung (A) (§. 21.) ergebenden Curven auch wirklich vorfinden.

*) Statt zu sagen: ein Paar von Wendepunkten. Denn auch hier soll, wie in §. 20. 7) unter jedem Punkte einer sphärischen Curve zugleich mit sein Gegenpunkt verstanden werden.



Was noch die Subordination anlangt, in welcher diese fünf Formen zu einander stehen, so erkennt man leicht, dass es im Grunde nur zwei Hauptformen giebt. Jede derselben besteht aus einer einfachen Curve mit drei Wendepunkten, zu deren einer (I.) noch eine isolierte Zwillingscurve gehört, die andere (V.) aber keinen weiteren Zusatz hat. Die erstere Hauptform kann sich in die letztere auf doppelte Art verwandeln, indem sich die isolierte Curve entweder in einen isolierten Punkt zusammenzieht und dann verschwindet, oder indem sie und die einfache Curve sich bis zur Berührung einander nähern und durch Vereinigung ihrer einander schief gegenüber liegenden Theile einen Knoten bilden, welcher sich alsdann dergestalt wieder auflöst, dass die neben einander liegenden Theile der einen und der andern Curve sich vereinigen. Vergl. Fig. 3. Dies giebt die zwei Uebergangsformen II. und III. — Als eine noch speciellere Uebergangsform, nämlich als der Uebergang von II. zu III., oder umgekehrt, ist IV. zu betrachten. Denn IV. entsteht aus II. dadurch, dass sich die einfache Curve und der isolierte Punkt von II. einander bis zur Berührung nähern, aus III. aber dadurch, dass sich die Schleife von III. in einen Punkt zusammenzieht.

Haupteigenschaften der Linien der dritten Ordnung mit drei Wendepunkten.

§. 28.

Der von Newton uns überlieferte, jedoch ohne Beweis von ihm hingestellte Satz, dass jede Linie der dritten Ordnung als die Projection einer der mittelst der Gleichung (C^*) in §. 24. zu construierenden Parabeln betrachtet werden kann, scheint mir zu den wichtigsten in der Theorie jener Linien zu gehören. Denn aus der symmetrischen Gestalt dieser Parabeln lassen sich fast alle Grundeigenschaften der Linien dritter Ordnung auf das einfachste ableiten. Durch die folgenden Betrachtungen, welche zunächst die mit drei Wendepunkten versehenen Linien betreffen, wird man diese Behauptung genüglich bestätigt finden.

1) Jede durch zwei symmetrische Punkte einer der Parabeln gelegte Gerade ist mit der Axe der y parallel und projiciert sich daher auf der Kugel als ein durch B gehender Hauptkreis, weil B die Projection des unendlich entfernten Punktes der Axe der y ist. Wenden wir dieses

auf die zwei symmetrischen Wendepunkte der Parabeln I., II. und V. an und bemerken, dass B ein Wendepunkt der sphärischen Curve ist, so erhalten wir den merkwürdigen Satz, dass die drei Wendepunkte einer sphärischen (ebenen) Linie der dritten Ordnung in einem Hauptkreise (einer Geraden) liegen.

2) Zwei an die Parabel in zwei symmetrischen Punkten derselben gelegte Tangenten sind zwei symmetrische Gerade und schneiden sich daher in einem Punkte der Axe der x (§. 25.), d. i. in einem Punkte der Polare des unendlich entfernten Wendepunktes, mit welchem jene zwei Punkte in einer Geraden sind. Ueberhaupt also schneiden sich zwei die sphärische Curve berührende Hauptkreise, wenn die Berührungspunkte mit einem Wendepunkte in einem Hauptkreise liegen, in einem Punkte der Polare des Wendepunktes. Insbesondere werden sich daher die zwei in zwei Wendepunkten an die Curve gelegten Tangenten und die Polare des dritten Wendepunktes in einem Punkte schneiden.

3) Heissen F und G die zwei symmetrischen Wendepunkte der Parabel; F_1 und G_1 seien irgend zwei andere symmetrische Punkte der Curve, und F_2 und G_2 die dritten Curvenpunkte, welche resp. mit F, F_1 und G, G_1 in Geraden sind und daher ebenfalls, so wie diese Geraden selbst, symmetrisch liegen werden. Seien endlich F_3 und G_3 die vierten harmonischen Punkte, der erstere zu F_1, F_2, F, der letztere zu G_1, G_2, G, so ist auch dieses vierte Paar von Punkten in symmetrischer Lage (§. 25.). Nach §. 22. ist aber F_3 ein Punkt der Polare von F, und G_3 ein Punkt der Polare von G. Nun lassen sich auf dieselbe Weise, so viel man will, noch andere Paare symmetrischer Punkte in den Polaren von F und G finden. Mithin sind diese zwei Polaren selbst zwei symmetrische Linien und schneiden sich folglich in einem Punkte der Axe der x, d. i. der Polare von B. Die Polaren der drei Wendepunkte schneiden sich demnach in einem Punkte.

Wir wollen diesen Punkt den Centralpunkt der Curve nennen.

4) Man bezeichne die Polaren der zwei symmetrischen Wendepunkte F, G mit f, g, und die in F, G an die Parabel gelegten Tangenten mit f', g'. Letztere sind zwei symmetrische Gerade (§. 25.), und da es, wie eben erwiesen worden, auch f, g sind, so sind die Durchschnitte von f' mit f und von g' mit g zwei symmetrische Punkte. Die diese Punkte ver-

bindende Gerade ist folglich mit der Axe der y parallel, also nach dem unendlich entfernten Wendepunkte B gerichtet. Nennen wir daher den Durchschnitt der in einem Wendepunkte an die Curve gelegten Tangente mit der Polare desselben den dem Wendepunkte conjugierten Punkt, so haben wir den Satz: Die zwei Wendepunkten conjugierten Punkte liegen mit dem dritten Wendepunkte in einem Hauptkreise (einer geraden Linie).

5) Die Sehne FG wird von der Axe der x halbiert, welches in D geschehe (Fig. 13.), und es sind daher (§. 24.) F, G, B oder der unendlich entfernte Punkt in FG, und D vier harmonische Punkte, folglich VF, VG, VB und VD oder die Polare von B, indem V den Centralpunkt bezeichne, vier harmonische Linien. Dies durch Projection auf die Kugel oder auf eine andere Ebene übergetragen, erhalten wir den Satz: Die vom Centralpunkte aus nach den drei in einer beliebigen Ordnung genommenen Wendepunkten gezogenen Hauptkreise (gerade Linien) und die Polare des nach dieser Ordnung dritten Wendepunktes sind vier harmonische Linien.

Mit den Richtungen, nach welchen vom Centralpunkte aus die drei Wendepunkte liegen, sind daher auch die Richtungen der drei Polaren gegeben. Um letztere Richtungen aus erstern zu finden, construiere man ein Dreieck ABC (Fig. 12.), dessen Seiten den erstern Richtungen parallel sind, und es werden die von den Ecken A, B, C nach den Mittelpunkten F, G, H der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Geraden AF, BG, CH mit den drei Polaren parallel sein. Denn F, als der Mittelpunkt von BC, ist der vierte harmonische Punkt zu C, B und dem unendlich entfernten Punkte in BC, und daher AF die vierte harmonische Linie zu AC, AB und einer mit BC durch A gelegten Parallelen, also AF parallel mit der Polare des Wendepunktes, welcher vom Centralpunkte aus nach einer mit BC parallelen Richtung liegt. Und auf gleiche Art ergeben sich BG und CH als die Richtungen der Polaren der durch die Richtungen CA und AB bestimmten Wendepunkte.

Weil übrigens die drei Geraden AF, BG, CH sich in einem Punkte schneiden, welcher U heisse, und ähnlicherweise, wie vorhin, die mit BC durch U zu legende Parallele die vierte harmonische Linie zu UB, UC, UF, also zu BG, CH, AF ist, so sind auch die drei in beliebiger Folge genommenen Polaren und die vom Centralpunkte aus

nach dem Wendepunkte, welchem die dritte Polare zugehört, gezogene Linie in harmonischer Lage. Mit derselben Construction, welche jetzt angewendet wurde, um aus den Richtungen für die drei Wendepunkte die Richtungen der Polaren zu finden, wird man folglich auch umgekehrt aus letztern Richtungen die erstern bestimmen können. Macht man nämlich BC, CA, AB mit den letztern parallel, so werden AF, BG, CH parallel mit den erstern sein.

6) Zu der Parabel I. gehört noch eine in sich zurücklaufende gegen die Axe der x gleichfalls symmetrisch liegende Curve, welche keine Wendepunkte, Knoten, oder Spitzen enthält (§. 18.). Sie ist ganz innerhalb zweier durch L und M (Fig. 13.) parallel mit der Axe der y zu legenden Geraden enthalten (§. 26.), und man sieht leicht, dass der gegenseitige Durchschnitt zweier an die Ovale gelegten Tangenten zwischen jene zwei Parallelen oder ausserhalb derselben fallen wird, jenachdem die zwei Berührungspunkte auf einerlei oder verschiedenen Seiten der Axe der x liegen.

Die Parabel selbst, und somit auch ihre zwei symmetrischen Wendepunkte F und G, liegen ausserhalb der zwei Parallelen. Zieht man daher von dem einen dieser Wendepunkte F zwei Tangenten an die Ovale, so liegen die zwei Berührungspunkte, welche H und J heissen, auf verschiedenen Seiten von der Axe der x oder von LM, und der Durchschnitt V von HJ mit LM fällt folglich zwischen L und M. Es sind aber H und J Punkte in der Polare von F (§. 22.), also HJ diese Polare selbst, sowie LM die Polare des unendlich entfernten Wendepunktes B, mithin V der Centralpunkt der Curve; und wir schliessen daher: Der Centralpunkt einer Linie der dritten Ordnung, welcher eine Ovale zukommt, liegt innerhalb der letztern.

7) Da dieses gelten muss, wie klein auch die Ovale sein mag, so folgern wir noch: Bei einer Linie der dritten Ordnung, welche einen isolierten Punkt hat, ist letzterer zugleich der Centralpunkt der Linie.

8) In dem Falle, wenn die der Parabel I. zugehörige Ovale unendlich klein ist, und daher die Punkte L und M einander unendlich nahe liegen, kann die Gleichung dieser Parabel für diejenigen ihrer Punkte, welche in unmittelbarer Nähe von L und M sind, also geschrieben werden:

$$y^2 = \alpha.\ LQ.\ MQ.\ NL, = \alpha.\ LN.\ LQ.\ QM.$$

Da diese Gleichung einer Ellipse angehört, welche die Axe der x

und eine Parallele mit der Axe der y zu zwei conjugierten Durchmessern hat, so ziehen wir den Schluss, dass eine unendlich kleine Ovale die Gestalt einer Ellipse hat, von welcher ein Durchmesser in die Polare von B fällt und der ihm conjugierte nach B gerichtet ist. Hieraus, und weil eine unendlich kleine in der Ebene der x, y liegende Ellipse, auf die Kugelfläche oder eine andere Ebene projiciert, gleichfalls eine Ellipse giebt, und je zwei conjugierte Durchmesser der erstern Ellipse auch in der Projection zu conjugierten Durchmessern werden, und weil auf der Kugel der Wendepunkt B vor den beiden andern keinen Vorrang hat, — hieraus folgern wir weiter, dass drei Durchmesser der unendlich kleinen elliptischen Ovale in die Polaren der drei Wendepunkte fallen, und die ihnen conjugierten Durchmesser nach den drei Wendepunkten selbst gerichtet sind. Es müssen daher auch der Mittelpunkt der Ellipse, als in welchem sich alle Durchmesser schneiden, und der Centralpunkt der ganzen Curve, in welchem sich die Polaren der drei Wendepunkte schneiden, identische Punkte sein.

Da, wenn die drei Seiten BC, CA, AB (Fig. 12.) eines Dreiecks die Richtungen haben, nach welchen vom Centralpunkte aus die drei Wendepunkte liegen, die von den Ecken des Dreiecks nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Geraden AF, BG, CH parallel mit den drei Polaren sind (5), so wird die unendlich kleine elliptische Ovale die Form und Lage einer Ellipse haben, von welcher drei Paare conjugierter Durchmesser parallel mit BC und AF, mit CA und BG, mit AB und CH sind. Eine solche Ellipse ist, wie man leicht erkennt, diejenige, welche die Seiten des Dreiecks ABC in ihren Mittelpunkten berührt, (die grösstmögliche in das Dreieck einzuschreibende Ellipse). Denn da die Sehne GH dieser Ellipse mit der Tangente BC parallel ist und von der nach dem Berührungspunkte F gerichteten Geraden AF halbiert wird, so fällt ein Durchmesser der Ellipse in AF, und der ihm conjugierte ist mit BC parallel. Und ähnlicherweise wird dasselbe in Bezug auf BG und CA, so wie in Bezug auf CH und AB bewiesen.

Man bemerke nur noch, dass man nach den in 5) gegebenen Erörterungen eine Ellipse von der gesuchten Form und Lage auch dann erhält, wenn man die Seiten des Dreiecks, welche die Ellipse in ihren Mittelpunkten berühren soll, parallel mit den drei Polaren macht.

§. 29.

Um die im vorigen §. gefundenen Sätze uns zu grösserer Anschaulichkeit zu bringen, wollen wir von der sphärischen Curve eine stereographische Projection (Fig. 14.) entwerfen. Der Hauptkreis, in dessen einem Pole sich das Auge befindet, und auf dessen Ebene — oder auf eine mit ihm parallele Ebene — die Kugelfläche projiciert wird, sei zugleich derjenige, in welchem die drei Wendepunkte liegen (1), und welcher deshalb kurz der Wendekreis genannt werde. Die Wendepunkte selbst nebst ihren Gegenpunkten sind in der Figur mit F, G, H, F', G', H' bezeichnet.

Jeder Punkt der Kugelfläche, welcher nicht im Wendekreise liegt, wird, jenachdem er mit dem Auge auf einerlei Seite dieses Kreises, oder nicht liegt, in der Ebene der Projection durch einen entweder ausserhalb, oder innerhalb des Wendekreises fallenden Punkt abgebildet. Die Punkte innerhalb werden wir durch nicht accentuierte Buchstaben ausdrücken; die ausserhalb fallenden Gegenpunkte der erstern, die wir aber grösstentheils unberücksichtigt lassen werden, durch accentuierte Buchstaben.

Seien hiernach A, B, C die gegenseitigen Durchschnitte der in den drei Wendepunkten an die Curve berührend gelegten Hauptkreise; A der Durchschnitt der Tangenten an G und H, u. s. w. Die Polaren der Wendepunkte F, G, H werden durch die drei Hauptkreise PP', QQ', RR' dargestellt; sie gehen durch die Ecken des von den Tangenten gebildeten Dreiecks ABC (2) und schneiden die Seiten desselben in I, K, L, den zu den Wendepunkten F, G, H conjugierten Punkten, welche paarweise mit den Wendepunkten selbst, nämlich K und L mit F, L und I mit G, I und K mit H, in Hauptkreisen liegen (4). Einander selbst schneiden die Polaren im Centralpunkte V (3) und die einfache Curve in den Punkten P, P', Q, Q', R, R', welche füglich die Scheitel der Curve heissen können und die merkwürdige Eigenschaft besitzen, dass die in ihnen an die Curve gelegten Berührungskreise die Wendepunkte treffen, — die Tangente an P den Wendepunkt F, u. s. w. (§. 22.).

Von den zwei Dreiecken ABC und IKL ist demnach das letztere in das erstere eingeschrieben, und sie haben überdies eine solche Lage gegen einander, dass die drei Hauptkreise AI, BK, CL, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, sich in einem Punkte V schneiden, und dass die drei Punkte F, G, H, in welchen sich die gegenüberliegenden Seiten BC und KL u. s. w. schneiden, in einem Hauptkreise liegen, —

zwei Relationen, von denen die eine eine Folge der andern ist*). — Hieraus ist weiter zu schliessen, dass von den neun Hauptkreisen BC, CA, AB, KL, LI, IK, AI, BK, CL ein jeder von den jedesmal acht übrigen in vier harmonischen Punkten, z. B. BC in B, C, I, F, geschnitten wird, so wie auch, dass von jedem der neun Punkte A, B, C, I, K, L, F, G, H nach den jedesmal acht übrigen vier harmonische Hauptkreise, z. B. von A die Hauptkreise AB, AC, AI, AF, sich ziehen lassen.

Dass der Bogen BC in I und F harmonisch geschnitten wird, folgt übrigens auch schon aus Nr. 5. des vor. §., wonach die Polaren VQ, VR, VP der drei Wendepunkte G, H, F und der durch V und den dritten Wendepunkt F gelegte Hauptkreis VF in harmonischer Lage sind. Denn diese vier Kreise treffen die an F gelegte sphärische Tangente in den vier Punkten B, C, I und F, welche daher gleichfalls harmonisch sein müssen.

Es lässt sich hieraus noch eine nicht unwichtige Folgerung ziehen. Weil nämlich B, C, I auf einer und derselben Seite des Wendekreises befindlich sind, und F, als ein Punkt des letztern, ausserhalb B und C liegt, so muss nach der Natur der harmonischen Theilung I zwischen B und C fallen. Auf gleiche Art fällt K zwischen C und A, so wie L zwischen A und B. Der Centralpunkt V, als der gegenseitige Durchschnitt von AI, BK, CL, ist folglich innerhalb des Dreiecks ABC begriffen, welches von den an die drei Wendepunkte gelegten sphärischen Tangenten gebildet wird und ganz auf einerlei Seite des Wendekreises liegt, — nicht innerhalb eines der von denselben Tangenten gebildeten Dreiecke, wie ABC', $A'B'C$, u. s. w., von welchen zwei Ecken auf die eine und die dritte Ecke auf die andere Seite des Wendekreises fallen.

Gehört zu der einfachen Curve noch eine Zwillingscurve, so schliesst diese den Centralpunkt V ein (6) und ist, wie letzterer selbst, innerhalb des Dreiecks ABC enthalten, indem sie sonst, um V einschliessen zu können, die Seiten von ABC schneiden müsste. Dieses kann aber nicht geschehen, weil jede dieser Seiten, als Tangente in einem Wendepunkte, schon drei Curvenpunkte in sich fasst.

---

*) Dies erhellet sogleich, wenn man auf die Kugel nach den Gesetzen der Centralprojection den bekannten Satz überträgt, dass, wenn bei zwei ebenen Dreiecken die drei Geraden durch die gegenüberliegenden Ecken sich in einem Punkte scheiden, die drei Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden liegen, und umgekehrt. — Aehnliches gilt auch in Bezug auf den folgenden Schluss. Vergl. den baryc. Calcul, Seite 268 unten.

Zusatz. So wie aus dem Centralpunkte *V* und den Durchschnittspunkten *A*, *B*, *C* der Tangenten *BC*, u. s. w. in den drei Wendepunkten *F*, *G*, *H* letztere selbst und damit der Wendekreis sich ergeben, wenn man in das Dreieck *ABC* ein zweites *IKL* so beschreibt, dass die durch die gegenüberliegenden Ecken beider Dreiecke zu ziehenden Hauptkreise sich in *V* schneiden, indem dann *F*, *G*, *H* die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten sind: so können ähnlicherweise, nach dem Princip der Dualität durch gegenseitiges Vertauschen von Punkten und Hauptkreisen, aus dem Wendekreise und den drei Tangenten *BC*, u. s. w. in den Wendepunkten die Polaren der letztern und damit der Centralpunkt *V* gefunden werden. Man beschreibe nämlich um das von den drei Tangenten gebildete Dreieck *ABC* ein zweites *STU* dergestalt, dass die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten in den Wendekreis, also in *F*, *G*, *H* fallen, dass mithin *S*, *T*, *U* die Durchschnitte von *BG* mit *CH*, von *CH* mit *AF*, von *AF* mit *BG* sind. Denn alsdann werden die Hauptkreise *AS*, *BT*, *CU*, welche die gegenüberliegenden Ecken beider Dreiecke verbinden, die drei sich in *V* schneidenden Polaren sein.

Um von dieser Construction eine Anwendung zu zeigen, wollen wir in einer Newton'schen Parabel mit zwei Wendepunkten F und G (Fig. 15.), indem wir letztere selbst und den gegenseitigen Durchschnitt C der an sie zu ziehenden Tangenten als gegeben voraussetzen, die drei Polaren und den Centralpunkt zu bestimmen suchen. Der dritte Wendepunkt H liegt hier unendlich entfernt nach einer mit FG parallelen Richtung; und weil auch die an H zu ziehende Tangente AB unendlich entfernt ist, so sind A und B die unendlich entfernten Punkte der Geraden CG und CF. Die Linien AF, BG, CH sind daher keine andern, als die durch die Ecken des Dreiecks FGC mit den gegenüberliegenden Seiten desselben zu ziehenden Parallelen. Hiermit ergeben sich die Punkte S, T, U als die gegenseitigen Durchschnitte dieser Parallelen, und es sind alsdann SA und TB, d. i. die durch S mit CG und die durch T mit CF zu ziehende Parallele, die Polaren von F und G, und der gegenseitige Durchschnitt V derselben ist der Centralpunkt der Parabel.

Weil hiernach F, G, C die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks STU sind, und SUTV ein Parallelogramm ist, so sieht man augenblicklich, dass CU, d. i. die Polare von H oder die Axe der Parabel, den erhaltenen Centralpunkt V, wie gehörig, treffen muss, und dass man letzteren schon dadurch hätte finden können, dass man FG in D halbiert

und in der Verlängerung von DC CV = 2DC gemacht hätte, worauf sich die Polaren von F und G als die durch V mit CG und CF parallel zu legenden Geraden ergeben hätten.

---

§. 30.

Den in den zwei letzten §§. angestellten Betrachtungen über Linien der dritten Ordnung legten wir die Newton'sche Parabel zum Grunde und entwickelten aus der symmetrischen Lage dieser Curve gegen eine Axe, also aus einer Symmetrie nach der Zahl Zwei, eine Reihe von Sätzen, in denen allen sich eine Symmetrie nach der Zahl Drei zu erkennen gab. Da nun der allgemeine Ausdruck eines Punktes der Kugelfläche, $xA + yB + zC$, gleichfalls nach Drei symmetrisch ist, so steht zu erwarten, dass sich die Gleichung einer Linie der dritten Ordnung besonders einfach gestalten werde, und dass sich aus dieser Gleichung die bereits gefundenen Eigenschaften und noch andere mit besonderer Leichtigkeit werden ableiten lassen, wenn wir zu den drei F.punkten im Ausdrucke drei solche wählen, welche in Bezug auf die Curve symmetrisch sind, z. B. die gegenseitigen Durchschnitte der an die drei Wendepunkte gelegten Tangenten.

Um dieses zu bewerkstelligen, wollen wir vorher zwei der drei Wendepunkte zu den F.punkten B und C und die Tangenten daselbst zu den F.kreisen AB und AC nehmen. Soll aber B mit einem Wendepunkte und AB mit dessen Tangente zusammenfallen, so müssen nach §. 21. in der allgemeinen Gleichung der Linie die Coefficienten von y^3, xy^2 und x^2y null sein; und ebenso müssen, wenn auch noch C und AC mit einem Wendepunkte und seiner Tangente coincidieren sollen, die Coefficienten von z^3, xz^2 und x^2z verschwinden. Unter der Voraussetzung, dass eine Linie der dritten Ordnung wenigstens zwei Wendepunkte hat, und unter der Annahme, dass B und C dieselben sind, und dass die Linie daselbst von AB und AC berührt wird, ist demnach die allgemeine Gleichung der Linie:

$$(a) \quad ax^3 + (mx + fy + iz)\, yz = 0,$$

als worauf sich die Gleichung (A) in §. 21. bei Nullsetzung der gedachten Cofficienten reduciert.

Dass, wie wir bereits wissen, die Linie ausser den zwei in ihr vorausgesetzten Wendepunkten B und C noch einen dritten hat, und

dass dieser mit B und C in einem Hauptkreise liegt, lässt sich auch sehr leicht aus der Gleichung (a) der Linie folgern. Man suche zu dem Ende die drei Punkte zu bestimmen, welche der durch die Gleichung

$$(b) \quad mx + fy + iz = 0,$$

ausgedrückte Hauptkreis (§. 20. 9)) mit der Linie (a) gemein hat. Dieses wird geschehen, wenn man aus (a) und (b) eine der Veränderlichen x, y, z, es sei y, eliminiert. Denn hiermit findet sich eine homogene Gleichung des dritten Grades zwischen x und z, d. i. eine Gleichung des dritten Grades für das Verhältniss $x:z$, und die drei hieraus folgenden Werthe dieses Verhältnisses, verbunden mit den damit aus (b) fliessenden Werthen des Verhältnisses $y:z$, werden uns die drei gesuchten Punkte kennen lehren.

Es folgt aber aus (a) und (b) nach Elimination von y:

$$x^3 = 0.$$

Die drei gesuchten Werthe des Verhältnisses $x:z$ sind demnach einander gleich, jeder $= 0$; die drei hiermit aus (b) folgenden Werthe des Verhältnisses $y:z$ sind daher ebenfalls einander gleich, jeder $= i : -f$. Die drei gemeinsamen Punkte von (a) und (b) sind daher mit einander identisch, jeder $\equiv iB - fC$, als worauf sich der allgemeine Ausdruck $xA + yB + zC$ mit den gefundenen Werthen der Verhältnisse $x:y:z$ reduciert; d. h. der Hauptkreis (b) berührt die Curve (a) in einem in den F.kreis BC fallenden und daher mit den zwei vorausgesetzten Wendepunkten B und C in einem Hauptkreise liegenden dritten Wendepunkte $\equiv iB - fC$.

§. 31.

Beziehen wir jetzt die Punkte der Kugelfläche, statt auf A, B, C, auf irgend drei andere nicht in einem Hauptkreise liegende Punkte der Fläche A_1, B_1, C_1. Alsdann sind, wenn durch

$$xA + yB + zC \text{ und } tA_1 + uB_1 + vC_1$$

stets ein und derselbe Punkt ausgedrückt wird, die Grössen x, y, z, und folglich auch das Aggregat $mx + fy + iz$, welches man $= w$ setze, homogene Functionen des ersten Grades von t, u, v, und dieses dergestalt, dass die Functionen x, y, z, w, der Reihe nach Null gesetzt, die Gleichungen der Hauptkreise BC, CA, AB, (b) in Bezug auf A_1, B_1, C_1 als F.punkte vorstellen (§. 20. 10)). Nun waren im vor. §. CA, AB (b) die Tangenten der Curve in ihren drei Wendepunkten, und BC war der Hauptkreis,

in welchem diese drei Punkte selbst liegen. Dieses und die Gleichung (a) berücksichtigend, ziehen wir daher den Schluss:

Bedeuten x, y, z, w homogene Functionen des ersten Grades der drei Veränderlichen im Ausdrucke eines Punktes, und sind bei einer sphärischen Linie der dritten Ordnung, welche drei Wendepunkte hat,

$$y = 0,\ z = 0,\ w = 0$$

die Gleichungen der in diesen drei Punkten die Curve berührenden Hauptkreise, und

$$x = 0$$

die Gleichung des Hauptkreises, in welchem die Punkte selbst liegen, so ist das Verhältniss

$$x^3 : yzw$$

von constanter Grösse.

Das F.Dreieck $A_1 B_1 C_1$, auf welches wir zuletzt jeden Punkt der Kugelfläche bezogen und durch $tA_1 + uB_1 + vC_1$ ausdrückten, wollen wir nun der schon gedachten Symmetrie wegen so gelegt annehmen, dass die Seiten des Dreiecks mit den die Curve in den drei Wendepunkten berührenden Hauptkreisen zusammenfallen. Die Gleichungen dieser drei Kreise sind alsdann: $t = 0$, $u = 0$, $v = 0$, und es wird folglich, wenn wir noch die Gleichung des Hauptkreises, welcher die drei Wendepunkte enthält,

$$\frac{t}{a} + \frac{u}{b} + \frac{v}{c} = 0$$

schreiben, und d eine Constante bedeuten lassen,

$$\left(\frac{t}{a} + \frac{u}{b} + \frac{v}{c}\right)^3 = dtuv$$

die allgemeine Gleichung der Curve.

Endlich wollen wir zu mehrerer Vereinfachung der nachfolgenden Rechnungen statt t, u, v andere Veränderliche einführen, welche wiederum x, y, z heissen mögen, so dass $t = ax$, $u = by$, $v = cz$. Hiernach, und wenn wir noch $abcd = e$ setzen, ist

$$(1)\quad (x + y + z)^3 = exyz$$

in Verbindung mit dem Ausdrucke

$$(2)\quad axA + byB + czC,$$

wo bei A, B, C die jetzt nicht mehr nöthigen Indices weggelassen worden, die allgemeine Gleichung einer Linie der dritten Ordnung, welche drei Wendepunkte hat und in diesen von den Seiten des F.dreiecks berührt wird.

Letzteres erhellet auch ganz leicht aus der Gleichung (1) der Curve selbst. Denn für die Punkte, welche der F.kreis BC mit der Curve gemein hat, ist $x = 0$. Hiermit reduciert sich die Gleichung auf

$$(y + z)^3 = 0$$

und giebt auf solche Weise drei nächstfolgende Punkte, für deren jeden $x = 0$ und $z = -y$ ist, also einen Wendepunkt, welcher BC zur Tangente hat, zu erkennen. Der Ausdruck desselben ist

$$bB - cC,$$

als in welchen sich der allgemeine Ausdruck (2) mit den Gleichungen $x = 0$ und $z = -y$ zusammenzieht. Und da mit denselben zwei Gleichungen auch der Gleichung

$$(3) \quad x + y + z = 0$$

Genüge geschieht, so ist dieser Wendepunkt zugleich in dem durch (3) dargestellten Hauptkreise enthalten. — Auf analoge Weise zeigt sich, dass $cC - aA$ und $aA - bB$ die Wendepunkte sind, in denen die Curve von CA und AB berührt wird, und dass jeder von ihnen gleichfalls im Hauptkreise (3) liegt, dass folglich (3) die Gleichung des Wendekreises ist.

§. 32.

Mit derselben Leichtigkeit lassen sich nun auch die übrigen in §. 28. entwickelten Eigenschaften der Curve aus der symmetrischen Gleichung (1) ableiten. Um dieses zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass in dieser Gleichung die drei Veränderlichen x, y, z beliebig mit einander vertauscht werden können, und dass folglich, wenn $ax'A + by'B + cz'C$ ein Punkt der Curve ist, auch $ax'A + bz'B + cy'C$ ein solcher sein muss. Man nenne erstern Punkt P', letztern P'', und setze daher

$$p'P' = ax'A + by'B + cz'C,$$
$$p''P'' = ax'A + bz'B + cy'C.$$

Hieraus folgt

$$p'P' - p''P'' = (y' - z')(bB - cC),$$
$$p'P' + p''P'' = 2ax'A + (y' + z')(bB + cC),$$

und daher, wenn man noch

$$bB - cC = fF, \quad bB + cC = iI \text{ und}$$
$$2ax'A + (y' + z')\, iI = qQ$$

setzt, wo mithin F den in BC liegenden Wendepunkt und I einen anderen bestimmten Punkt dieses F.kreises bezeichnet:

$$p'P' - p''P'' = (y' - z')\, fF,$$
$$p'P' + p''P'' = q\, Q.$$

Hieraus ist aber, wie in §. 22., zu schliessen, dass jede durch einen Wendepunkt F gehende Sehne $P'P''$ in F und in ihrem Durchschnitte Q mit einem Hauptkreise AI von bestimmter Lage harmonisch getheilt wird. Dieser Hauptkreis, die Polare des Wendepunktes F, geht, übereinstimmend mit §. 28. 2), durch den Durchschnitt A der Tangenten CA, AB in den beiden andern Wendepunkten und trifft die an F gelegte Tangente BC in I, welches daher der dem F conjugierte Punkt ist. Auch ersieht man noch aus den Ausdrücken für F und I durch B, C, dass BC in F und I harmonisch geschnitten wird (§. 29).

Analoges gilt in Bezug auf die beiden andern Wendepunkte und die ihnen conjugierten Punkte. Werden daher, wie in Fig. 14., worin die Buchstaben A, B, C, F, I die jetzt ihnen beigelegte Bedeutung haben, die beiden andern Wendepunkte mit G, H und die ihnen conjugierten Punkte mit K, L bezeichnet, so hat man vollständig:

$$(4)\quad \begin{cases} fF = bB - cC, & gG = cC - aA, & hH = aA - bB, \\ iI = bB + cC, & kK = cC + aA, & lL = aA + bB. \end{cases}$$

Es folgt hieraus weiter:

$$fF + gG + hH = 0,$$

d. h. die drei Wendepunkte liegen in einem Hauptkreise;

$$lL - kK = fF, \quad iI - lL = gG, \quad kK - iI = hH,$$

d. h. die conjugierten Punkte zweier Wendepunkte liegen mit dem dritten Wendepunkte in einem Hauptkreise (§. 28. 4)).

Setzt man ferner

$$(5)\quad aA + bB + cC = vV,$$

so wird

$$(6)\quad vV = aA + iI = bB + kK = cC + lL,$$

d. h. die drei Polaren AI, BK, CL haben einen Punkt V, den Centralpunkt der Curve (§. 28. 3)), gemein, dessen Ausdruck daher $aA + bB + cC$ ist.

Die Gleichungen der drei Polaren sind:

$$y = z, \quad z = x, \quad x = y.$$

Denn mit $y = z$ z. B. verwandelt sich der allgemeine Ausdruck (2) eines Punktes der Kugelfläche in $axA + z(bB + cC)$, d. i. in den allgemeinen Ausdruck eines Punktes, welcher mit A und $bB + cC$ oder I in einem Hauptkreise liegt. — Uebrigens folgt auch unmittelbar aus diesen Gleichungen, dass die drei Polaren einen Punkt gemeinsam haben. Denn es geschieht diesen Gleichungen zugleich Genüge, wenn man

$x = y = z$ setzt. Hiermit aber reduciert sich der allgemeine Ausdruck (2) auf $aA + bB + cC$.

Was noch die in der Figur mit S, T, U bezeichneten Punkte anlangt, so hat man in Folge der Gleichungen (4):

$$gG + hH = cC - bB, \text{ mithin } bB + gG = cC - hH$$

$\equiv$ dem gemeinschaftlichen Punkte S der Hauptkreise BG und CH, und wenn man daher für gG oder hH aus (4) ihre Werthe setzt:

$$S \equiv bB + cC - aA, \text{ und eben so}$$

$$T \equiv cC + aA - bB, \quad U \equiv aA + bB - cC.$$

Weil sich diese Ausdrücke mit neuer Anwendung von (4) auf

$$S \equiv iI - aA, \quad T \equiv kK - bB, \quad U \equiv lL - cC$$

reducieren, so liegen S, T, U in den Polaren AI, BK, CL (§. 29.).

Noch folgt aus letzteren Ausdrücken, in Verbindung mit (6), dass

$$AISV, \quad BKTV, \quad CLUV$$

drei Systeme harmonischer Punkte sind.

Anmerkung. Bei der jetzt angestellten Entwickelung von Eigenschaften der durch die Gleichung des dritten Grades (1) ausgedrückten Curve wurde von dieser Gleichung nichts anderes, als ihre symmetrische Beschaffenheit oder der Umstand in Betracht gezogen, dass in ihr die drei Veränderlichen x, y, z beliebig mit einander vertauscht werden können. Dieselben Eigenschaften müssen folglich auch der durch irgend eine andere Gleichung des dritten Grades in Verbindung mit dem Ausdrucke (2) bestimmten Curve zukommen, dafern nur die Gleichung bei gegenseitiger Vertauschung von x, y, z unverändert bleibt, wie etwa die Gleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Es muss demnach auch hier von den drei in einem Hauptkreise liegenden Punkten $bB - cC$, $cC - aA$, $aA - bB$, die man wie vorhin F, G, H nenne, jeder derselben, z. B. F, die Eigenschaft besitzen, dass der geometrische Ort des vierten harmonischen Punktes zu den zwei Endpunkten P', P'' einer dem F begegnenden Sehne und zu F ein Hauptkreis ist; es müssen der sonach dem F zugehörige Hauptkreis oder die Polare von F, wie wir ihn vorhin nannten, und die Polaren von G und H sich in einem Punkte $\equiv aA + bB + cC$ schneiden; u. s. w.

Dabei sind F, G, H hier gleichfalls die drei Wendepunkte der Curve. Denn für F oder $bB - cC$ sind in dem allgemeinen Ausdrucke (2) die Veränderlichen $x = 0$ und $z = -y$. Wird aber in einer nach x, y, z symmetrischen Gleichung des dritten Grades $x = 0$ gesetzt, so erhält man eine nach y und z symmetrische Gleichung desselben Grades, also eine Gleichung von der Form

$$i(y^3 + z^3) + k(y^2 z + y z^2) = 0,$$

und dieser geschieht Genüge für $z = -y$. Mithin ist F ein Curvenpunkt. Ist nun P' ein dem F unendlich naher Curvenpunkt, und schneidet ein durch F und P' gelegter Hauptkreis die Curve nochmals in P'' und die Polare von F in Q, so sind P', P'', F, Q vier harmonische Punkte, und es muss nach der Natur der harmonischen Theilung, und weil P' dem F unendlich nahe ist, F unendlich nahe in der Mitte zwischen P' und P'' liegen.

Es sind folglich P', F, P'' drei nächstfolgende in einem Hauptkreise liegende Curvenpunkte, und mithin F ein Wendepunkt. — Auf gleiche Art wird dasselbe für G und H bewiesen.

Die jetzigen F, G, H sind demnach mit den vorhin eben so bezeichneten Punkten ganz identisch, also auch die jetzigen drei Polaren mit den vorigen, und der jetzige Durchschnitt der drei Polaren mit dem vorhin so genannten Centralpunkte. Nur darin findet ein Unterschied statt, dass bei einer Curve, welche durch eine von (1) verschiedene symmetrische Gleichung des dritten Grades dargestellt wird, die drei Hauptkreise BC, CA, AB, obschon sie ebenfalls durch die drei Wendepunkte gehen, die Curve nicht in diesen Punkten berühren.

Dass F, G, H stets die drei Wendepunkte sind, kann übrigens auch aus dem leicht zu beweisenden Satze gefolgert werden, dass, wenn F keiner der Wendepunkte, sondern irgend ein anderer Punkt einer Linie der dritten Ordnung ist, der geometrische Ort des wie vorhin aus F zu bestimmenden Punktes Q eine Linie der zweiten Ordnung, nicht mehr der ersten ist.

§. 33.

Der allgemeine Ausdruck (2) eines Punktes geht in den Ausdruck (5) des Centralpunktes V über für $x = y = z$. Letzterer wird daher ein Punkt der Curve selbst sein, wenn ihre Gleichung (1), sobald man $x = y = z$ setzt, befriedigt wird. Wie man augenblicklich wahrnimmt, geschieht dies nur dann, wenn die Constante $e = 3^3$ ist. Die Gleichung lässt sich alsdann schreiben:

$$(7)\quad [\tfrac{1}{3}(x+y+z)]^3 = xyz \text{ oder } \tfrac{1}{3}(x+y+z) = \sqrt[3]{xyz}$$

und drückt somit aus, dass das arithmetische und das geometrische Mittel zwischen x, y, z einander gleich sind, — während die allgemeinere Gleichung (1) zu erkennen giebt, dass diese beiden Mittel überhaupt in einem constanten Verhältnisse, $= \sqrt[3]{e} : 3$, zu einander stehen.

Es lässt sich aber in jenem speciellen Falle der Gleichung noch eine andere merkwürdige Form geben. Man setze zu dem Ende

$$x = p^3,\ y = q^3,\ z = r^3.$$

Hierdurch wird die Gleichung (7)

$$(8)\quad p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = 0,$$

und der Ausdruck (2), auf welchen sie zu beziehen ist:

$$(9)\quad ap^3A + bq^3B + cr^3C.$$

Es ist aber

$$(10)\quad p^3 + q^3 - (p+q)^3 + 3pq(p+q) = 0,$$

und es geschieht daher der Gleichung (8) Genüge, wenn man $r = -(p+q)$ setzt. Mithin ist $p + q + r$ ein Factor der linken Seite von (8), und man

kann folglich die Gleichung (7) als das Ergebniss der Rationalisierung von $p + q + r = 0$, d. i. von

$$(11) \quad \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0,$$

ansehen. Diese letztere Gleichung, verbunden mit dem Ausdrucke (2), müsste daher die Curve, bei welcher $e = 27$ ist, ebenfalls darstellen. Allein merkwürdiger Weise ist alsdann der Centralpunkt nicht mehr ein zur Curve gehöriger Punkt, indem der Gleichung (11) durch $x = y = z$ nicht mehr Genüge geschieht. Der Grund hiervon kann kein anderer sein, als dass bei der gedachten Rationalisierung zu $p + q + r$ ein Factor hinzutritt, welcher eben jenen Punkt ausdrückt.

In der That hat man eben so, wie (10), die identische Gleichung

$$(p + q)^3 + r^3 - (p + q + r)^3 + 3\,(p + q + r)\,(p + q)\,r = 0.$$

Addiert man hierzu die Gleichung (10), so kömmt:

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr - (p + q + r)\,[(p + q + r)^2 - 3\,(qr + rp + pq)] = 0.$$

Hiermit aber reduciert sich die Curvengleichung (8) auf

$$(12) \quad (p + q + r)\,[(q - r)^2 + (r - p)^2 + (p - q)^2] = 0.$$

Auf solche Weise ist die linke Seite von (8) in zwei Factoren zerlegt, von denen der eingeklammerte nur dann Null wird, wenn $p = q = r$ und folglich $x = y = z$ ist, d. h. für den Centralpunkt V; und es muss folglich der andere Factor $p + q + r$, wenn man ihn null setzt, alle übrigen Punkte der Curve geben.

Um noch zu zeigen, dass V ein isolierter Punkt der Curve ist, setze man die Exponenten der Verhältnisse $p : r$ und $q : r$ resp. $= t$ und u, wodurch die homogene Gleichung (12) sich verwandelt in

$$(12^*) \quad (1 + t + u)\,[(1 - t)^2 + (1 - u)^2 + (t - u)^2] = 0.$$

Für V ist alsdann jede der beiden Grössen t und $u = 1$; für jeden andern Punkt der Kugelfläche, welcher dem V sehr nahe liegt, sind folglich t und u sehr nahe $= 1$. Man sieht aber augenblicklich, dass mit Werthen von t und u, welche von 1 sehr wenig unterschieden sind, die Gleichung (12*) nicht befriedigt wird, und dass daher kein in unmittelbarer Nähe von V liegender Punkt der Curve angehören kann.

Die Gleichung (12) in Verbindung mit dem Ausdrucke (9), oder (7) in Verbindung mit (2), gehört demnach einer Linie der dritten Ordnung an, welche einen isolierten Punkt hat. Von (7) aber unterscheidet sich die noch einfachere Gleichung (11) bloss dadurch, dass der isolierte Punkt in ihr nicht mit begriffen ist.

§. 34.

Die im vorigen §. angestellte Betrachtung des speciellen Falles, wenn in der allgemeinen Gleichung (1) die Constante e den Werth 3^3 hat, kann uns zur Erforschung der Natur der durch (1) selbst ausgedrückten Curven von Nutzen sein. In der That wird diese Gleichung durch Einführung von p, q, r statt x, y, z:

$$(1^*)\quad p^3 + q^3 + r^3 = \sqrt[3]{e}.\, pqr,$$

oder, wenn wir $\sqrt[3]{e} = 3 + f$ setzen:

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = fpqr,$$

wofür nach vor. §. auch geschrieben werden kann:

$$f = \frac{p+q+r}{2pqr}\,[(q-r)^2 + (r-p)^2 + (p-q)^2],$$

oder mit Anwendung der Exponenten t und u:

$$f = \frac{1+t+u}{2tu}\,[(1-t)^2 + (1-u)^2 + (t-u)^2].$$

Betrachten wir nun die Constante f zunächst als eine durch diese Gleichung bestimmte Function der Veränderlichen t und u, so ist, so lange t sowohl, als u, positiv ist, auch f positiv, den Fall ausgenommen, wo $t = 1$ und $u = 1$, und wo $f = 0$ wird. Mithin ist f für $t = u = 1$, d. i. für $p = q = r$, ein Minimum, $= 0$. Es wird daher auch die Grösse $\sqrt[3]{e}$, $= 3 + f$, wenn wir sie als eine durch (1*) bestimmte Function der Verhältnisse $p : q : r$, oder als eine durch (1), d. i. durch

$$\sqrt[3]{e} = \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

bestimmte Function der Verhältnisse $x : y : z$ betrachten, im erstern Falle für $p = q = r$, im letztern für $x = y = z$ ein Minimum, $= 3$, sein. Es wird folglich, wenn wir noch $\sqrt[3]{e} = 3 : g$ setzen, die Function

$$(13)\quad g = \frac{\sqrt[3]{xyz}}{\frac{1}{3}(x+y+z)}$$

bei derselben Gleichheit zwischen x, y, z ein Maximum, $= 1$, sein.

§. 35.

Weil für jeden bestimmten Punkt der Kugelfläche, $\equiv axA + byB + czC$, die zwei Verhältnisse $x : y : z$ bestimmte Werthe haben, so wird jedem bestimmten Punkte der Fläche ein bestimmter Werth der Function g im vor. §., und nicht mehr als einer, zugehören, und alle Punkte, für welche g einen und denselben Werth $= g'$ hat, werden eine Linie der dritten

Ordnung bilden, von welcher die Zahl g' die Characteristik heissen mag, und deren Gleichung

$$\frac{\sqrt[3]{xyz}}{\frac{1}{3}(x+y+z)} = g'$$

ist. Indem wir daher dem g nach und nach alle möglichen constanten Werthe beilegen, wird sich die ganze Kugelfläche mit Linien der dritten Ordnung überziehen, deren jede die Punkte F, G, H oder $bB - cC$, u. s. w. zu Wendepunkten hat und daselbst von den F.kreisen BC, CA, AB berührt wird. Ausser den drei Wendepunkten werden aber keine zwei dieser Curven einen Punkt mit einander gemein haben, indem sonst die Function g für dieselben Werthe der Verhältnisse $x:y$ und $y:z$ verschiedene Werthe haben müsste.

Um nun den Lauf dieser die Kugelfläche bedeckenden Linien und damit die Form, welche die durch (13) ausgedrückte Linie für irgend einen gegebenen Werth von g hat, näher kennen zu lernen, haben wir uns vorher eine ungefähre Kenntniss des Werthes zu verschaffen, welcher der Function g für jeden Punkt der Fläche einzeln zukommt. Werde deshalb, wie in §. 29., angenommen, dass die drei F.punkte A, B, C in einerlei Hälfte der durch den Wendekreis FGH getheilten Kugelfläche liegen. Indem wir uns den Wendekreis horizontal denken, wollen wir die Hälfte, welche A, B, C enthält, als die obere betrachten.

Jede der beiden Hälften wird durch die drei F.kreise in vier Dreiecke und drei Vierecke zerlegt. Angenommen, dass in den obern Hälften dieser Kreise ihre Durchschnitte mit einander und mit dem Wendekreise in den Ordnungen

$$F'BCF,\ G'CAG,\ H'ABH$$

auf einander folgen (Fig. 16.), sind die sieben Figuren der obern Halbkugel

$$ABC,\ AGH',\ BHF',\ CFG',$$
$$BCG'H,\ CAH'F,\ ABF'G;$$

woraus die sieben Figuren der untern Halbkugel sich ergeben, wenn man die nicht accentuierten Buchstaben mit den gleichnamigen accentuierten, und umgekehrt, vertauscht.

Nun folgt aus $F \equiv bB - cC$ (§. 32.) nach §. 20. 5.:

$$c : b = -\sin BF : \sin FC, = \sin FB : \sin FC.$$

Ersichtlich aber haben unter der gemachten Voraussetzung, dass A, B, C auf einerlei Seite des Wendekreises liegen, die Sinus der nach einerlei Sinne zu rechnenden Bögen FB und FC einerlei Zeichen,



folglich auch b und c; und gleicher Weise ergiebt sich, dass auch a mit b und c einerlei Zeichen hat.

Setzen wir noch, dass das gemeinschaftliche Zeichen von a, b, c das positive ist, und dass daher die Zeichen von ax, by, cz resp. einerlei mit denen von x, y, z sind. Erstere drei Grössen können aber (§. 20. 6.) als die Coordinaten des durch $axA + byB + czC$ ausgedrückten Punktes betrachtet werden, wenn man als positiv gerichtete Axen derselben die vom Mittelpunkte der Kugel aus nach A, B, C gezogenen Geraden nimmt. Hiernach ist die Coordinate ax, folglich auch x selbst, Null, positiv oder negativ, jenachdem der Punkt $axA + \ldots$ entweder im F.kreise BC, oder mit A auf einer und derselben Seite dieses Kreises, oder auf der entgegengesetzten Seite liegt. Analoges gilt für y und z in Bezug auf die F.kreise CA und AB. Endlich ist die Summe $x + y + z$ null für alle Punkte des Wendekreises FGH (§. 31. (3)), positiv für A, B, C einzeln und daher auch für alle Punkte der obern Halbkugelfläche, negativ für alle Punkte der untern.

Mit Rückblick auf die Gleichung (13) folgt hieraus weiter, dass die Function g für jeden Punkt eines der drei F.kreise null, und für jeden Punkt des Wendekreises unendlich gross ist; doch sind hiervon die Durchschnitte des letztern Kreises mit den drei erstern oder die Wendepunkte auszunehmen, für welche g jeden beliebigen Werth haben kann. Da ferner beim Durchgange durch einen dieser vier Kreise, dafern er nicht durch einen Wendepunkt geschieht, immer nur Eine der vier Grössen x, y, z, $x + y + z$, und folglich auch g, das Zeichen wechselt, so hat für je zwei der vierzehn von den vier Kreisen gebildeten Figuren, welche eine Seite gemein haben, die Function g entgegengesetzte Zeichen. Nun ist nach dem Obigen für jeden innerhalb des Dreiecks ABC gelegenen Punkt jede der vier Grössen $x, \ldots$, also auch g, positiv. Mithin ist, wie der erste Blick auf die Figur lehrt, für jeden innerhalb eines der Dreiecke (Vierecke) liegenden Punkt die Function g positiv (negativ). Nächstdem hat g innerhalb des Dreiecks ABC, so wie innerhalb des Gegendreiecks $A'B'C'$, seinen grössten Werth $= 1$ für $x = y = z$ (§. 34.), d. i. im Centralpunkte, und nimmt von da nach allen Seiten bis zum Perimeter des Dreiecks bis auf Null ab. In den übrigen Drei- und Vierecken hat weder ein Maximum, noch ein Minimum statt. Im Dreiecke AGH' wächst g von den Seiten AG und AH' an, wo es null ist, ins Positive, bis es in GH' unendlich gross wird; im Vierecke $FCAH'$ wächst g von

den Seiten FC, CA, AH', wo es null ist, ins Negative und wird in $H'F$ unendlich gross; u. s. w.

§. 36.

Nach diesen Erörterungen über die Werthe, welche die Function g für die verschiedenen Punkte der Kugelfläche hat, haben wir uns von der Curve, welche die einem bestimmten Werthe von g zugehörigen Punkte in sich fasst, und von welcher wir bereits wissen, dass sie die Durchschnitte des Wendekreises mit den F. kreisen zu Wendepunkten hat und daselbst von den F. kreisen berührt wird, folgende Vorstellung zu machen.

Für einen bestimmten positiven (negativen) Werth von g windet sich die Curve schlangenförmig durch die abwechselnd an der obern und untern Seite des Wendekreises liegenden sechs Dreiecke (Vierecke) und schliesst sich bei ihren sechs Durchgängen durch den Wendekreis den in die F. kreise fallenden Seiten der Drei- oder Vierecke an. Ueberhaupt nähert sie sich diesen Seiten desto mehr, je kleiner g seinem absoluten Werthe nach ist; sie nähert sich dagegen desto mehr dem Wendekreise, je grösser der absolute Werth von g ist, und fällt für ein unendlich grosses g mit dem Wendekreise zusammen.

Für einen Werth von g, welcher positiv und kleiner als 1 ist, treten zu der einfachen durch die sechs Dreiecke am Wendekreise fortgehenden Curve noch zwei isolierte innerhalb der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ begriffene und die in ihnen liegenden Centralpunkte V und V' umschliessende Curven, als Zwillingscurve, hinzu. Je mehr dieses positive g an 1 heranwächst, desto mehr verengern sich die zwei Curven, bis sie zuletzt für $g = 1$ in V und V' verschwinden. Je mehr es hingegen abnimmt, desto mehr nähern sie sich den Perimetern der sie umschliessenden Dreiecke ABC und $A'B'C'$.

Für $g = 0$ reduciert sich die ganze Curve auf das System der drei F. kreise, welches man sich, jenachdem man g aus dem Positiven, oder aus dem Negativen in Null übergegangen annimmt, entweder als die einfache gebrochene Curve

$$GAH'B'FCG'A'HBF'C'G$$

mit den zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$, als Zwillingscurve, — oder als die einfache gebrochene Curve

$$GABF'C'A'HBCG'A'B'FCAH'B'C'G$$

allein vorzustellen hat. Die erstere einfache Curve bildet mit dem Wende-

kreise die sechs an ihm liegenden Dreiecke, und die letztere mit demselben Kreise die sechs an ihn grenzenden Vierecke.

Während also g von Null an, sei es nach der positiven, oder nach der negativen Seite hin, bis in das Unendliche stetig wächst, verwandelt sich das System der drei Hauptkreise BC, CA, AB allmählig in den einzigen Hauptkreis FGH, und es hat nach dem Voranstehenden keine Schwierigkeit, den doppelten Weg zu verfolgen, auf welchem diese Umwandlung vor sich geht.

---

§. 37.

Die bisher betrachtete Gleichung (13), oder die damit identische (1) in §. 31., lässt sich noch als eine sehr einfache Relation zwischen sogenannten Doppelschnittsverhältnissen darstellen. — Sei S ein Curvenpunkt, für welchen im allgemeinen Ausdrucke (2) die Verhältnisse $x:y:z$ die speciellen Werthe $x':y':z'$ haben, und daher

$$sS = ax'A + by'B + cz'C.$$

Hiernach ist der allgemeine Ausdruck eines Punktes, welcher mit S und A in einem Hauptkreise liegt,

$$auA + sS, = a(u + x')A + by'B + cz'C,$$

wenn es frei steht, dem Verhältnisse von u zu s oder x', u. s. w. jeden beliebigen Werth beizulegen.

Setzt man $u = -x'$, so reduciert sich der Ausdruck auf $by'B + cz'C$, also auf den Ausdruck eines Punktes, welcher zugleich im Hauptkreise BC liegt; und es ist daher, wenn man den gemeinsamen Punkt der Hauptkreise SA und BC mit P (Fig. 17.) bezeichnet:

$$P \equiv by'B + cz'C = -ax'A + sS.$$

Ferner ist für jeden Punkt $axA + byB + czC$ der Kugelfläche, welcher zugleich im Wendekreise FGH liegt, $x + y + z = 0$ (§. 31.). Da nun für irgend welchen Punkt des Hauptkreises SA sich $x : y : z$ wie $u + x' : y' : z'$ verhalten, so ist für den gemeinsamen Punkt von SA und FGH, welcher T heisse:

$$u + x' + y' + z' = 0, \text{ und folglich}$$

$$T, \equiv auA + sS, \equiv -a(x' + y' + z')A + sS.$$

Es folgt aber aus dieser Formel für T und aus der vorhergehenden für P:

$$\sin ST : \sin TA = -a(x' + y' + z') : s,$$

$$\sin SP : \sin PA = -ax' : s.$$

In meinem barycentrischen Calcul (§. 183.) habe ich bei vier in einer Geraden liegenden Punkten S, A, T, P das Verhältniss zwischen den Verhältnissen, nach welchen die Linie SA das einemal in T und das anderemal in P geschnitten wird, d. i. das Verhältniss

$$\frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{TA}} : \frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{PA}} \text{ durch } (\mathrm{SATP})$$

ausgedrückt. Wenn wir daher analoger Weise bei vier in einem Hauptkreise liegenden Punkten *S*, *A*, *T*, *P* das Verhältniss

$$\frac{\sin ST}{\sin TA} : \frac{\sin SP}{\sin PA} \text{ durch } (SATP)$$

ausdrücken, so kömmt:

$$(SATP) = \frac{x' + y' + z'}{x'}.$$

Eben so findet sich, wenn Q und U die Durchschnitte des Hauptkreises SB mit den Hauptkreisen CA und FGH, und wenn R und V die Durchschnitte von SC mit AB und FGH bezeichnen:

$$(SBUQ) = \frac{x' + y' + z'}{y'} \text{ und } (SCVR) = \frac{x' + y' + z'}{z'}.$$

Hiermit aber verwandelt sich die Gleichung (1) in:

$$(SATP)(SBUQ)(SCVR) = e.$$

§. 38.

Die jetzt erhaltene Gleichung für eine sphärische Linie der dritten Ordnung mit drei Wendepunkten gilt in unveränderter Form auch für jede ebene Linie derselben Ordnung und mit derselben Zahl von Wendepunkten. Denn betrachten wir, wie es immer gestattet ist, die letztere Linie als Centralprojection der erstern und bezeichnen die den Punkten *A*.. *F*.. *S*, *P*.. *T*.. auch der Bedeutung nach entsprechenden Punkte in der Projection mit A.. F.. S, P.. T.., so sind, weil *S*, *A*, *T*, *P* in einem Hauptkreise liegen, S, A, T, P in gerader Linie, und nach §. 25. Anmerk. ist $(SATP) = (\mathrm{SATP})$, u. s. w.; folglich

$$[1] \quad (\mathrm{SATP})(\mathrm{SBUQ})(\mathrm{SCVR}) = e.$$

Die hierdurch dargestellte Grundeigenschaft der ebenen Linien dritter Ordnung, welche drei Wendepunkte haben, lässt sich, wenn wir noch, mehrerer Präcision willen, die Gerade, in welcher die Wendepunkte liegen, die Wendelinie, und das von den drei an die Wendepunkte gelegten Tangenten gebildete Dreieck vorzugsweise das Tangentendreieck nennen, folgendergestalt in Worte fassen:

Das Product aus den drei D.verhältnissen, nach welchen die von einem beliebigen Curvenpunkte zu den Ecken des Tangentendreiecks gezogenen geraden Linien (SA, SB, SC) von der Wendelinie (in T, U, V) und von den den Ecken gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks (in P, Q, R) geschnitten werden, ist von constanter Grösse ($=e$).

§. 39.

Die Gleichung [1] für eine Linie der dritten Ordnung mit drei Wendepunkten gewinnt für den Fall, wenn die Ebene, auf welche man die sphärische Linie projiciert, parallel mit dem Wendekreise angenommen wird, eine besonders einfache Gestalt. Weil nämlich alsdann die Wendelinie und folglich auch die in ihr enthaltenen Punkte T, U, V unendlich entfernt sind, so wird das Verhältniss $ST : TA = -1$, und damit das D.verhältniss

$$(SATP) = \frac{ST}{TA} : \frac{SP}{PA} = -\frac{PA}{SP} = \frac{PA}{PS}$$

= dem Verhältniss der Dreiecksflächen $\frac{ABC}{SBC}$, und eben so

$$(SBUQ) = \frac{BCA}{SCA}, \quad (SCVR) = \frac{CAB}{SAB};$$

wobei noch zu erinnern, dass je zwei dieser Flächen mit einerlei oder entgegengesetzten Zeichen zu nehmen sind, jenachdem der durch die Aufeinanderfolge der Ecken eines Dreiecks ausgedrückte Sinn, nach welchem man sich den Perimeter desselben beschrieben zu denken hat, bei beiden Flächen der nämliche, oder der eine dem andern entgegengesetzt ist. Hiernach ist $ABC = BCA = CAB = -CBA = -ACB = -BAC$; es haben ferner, wenn S innerhalb des Perimeters von ABC liegt, die Flächen ABC und SBC einerlei Zeichen, u. s. w.

Die Gleichung [1] geht auf solche Weise über in

$$\frac{ABC^3}{SBC.\ SCA.\ SAB} = e,$$

oder, wenn wir statt e die Characteristik g (§. 35.) gebrauchen, in

$$[2] \quad \frac{3\sqrt[3]{SBC.\ SCA.\ SAB}}{ABC} = g.$$

Es ist demnach bei einer Linie der dritten Ordnung mit drei Wendepunkten, wenn diese unendlich entfernt liegen, das Product aus den Flächen der drei Dreiecke, welche einen Punkt S der Curve zur gemein-

schaftlichen Ecke und die Seiten des von den drei (jetzt asymptotischen) Tangenten in den Wendepunkten gebildeten Dreiecks ABC zu gegenüberliegenden Seiten haben, von constanter Grösse. Es ist folglich ähnlicherweise, wie bei einer Hyperbel der zweiten Ordnung, auch das Product aus den Abständen eines Curvenpunktes von den drei Asymptoten von constanter Grösse.

§. 40.

Die in §. 35 und §. 36 in Bezug auf die Curvengleichung (13) angestellte Betrachtung lässt sich auch bei der zuletzt erhaltenen Gleichung [2] in Anwendung bringen. Indem wir nämlich A, B, C als drei gegebene Punkte einer Ebene ansehen, kommt jedem Punkte S der Ebene ein durch [2] bestimmter Zahlenwerth g zu, dergestalt, dass alle Punkte, für welche g einen und denselben Werth g' hat, in einer Linie der dritten Ordnung liegen, deren Characteristik g' ist, und welche drei unendlich entfernte Wendepunkte und daselbst die verlängerten Seiten des Dreiecks ABC zu asymptotischen Tangenten hat.

Um uns von den verschiedenen Werthen, welche g für verschiedene Orte von S erhält, einen übersichtlichen Begriff zu verschaffen, dürfen wir nur erwägen, dass nach dem, was im vor. §. über die Vorzeichen der Dreiecksflächen bemerkt worden, jede der drei Flächen SBC, SCA, SAB einerlei Zeichen mit ABC hat, wenn S innerhalb dieses Dreiecks liegt, dass die Fläche SBC ihr Zeichen durch Null wechselt, wenn S durch die Seite BC oder deren Verlängerung geht, dass der absolute Werth von SBC der Entfernung des S von BC proportional ist, und dass Analoges von den Flächen SCA und SAB gilt. Hiernach und der Gleichung [2] gemäss ist die Zahl g positiv, wenn S innerhalb ABC fällt, und ändert ihr Zeichen durch Null, so oft als S von der einen Seite einer der drei ins Unendliche verlängert zu denkenden Linien BC, CA, AB auf die andere tritt. Es wird aber die Ebene durch diese drei Linien in sieben Theile zerlegt (Fig. 18.), von denen der eine, das Dreieck ABC selbst, endlich, die sechs übrigen unendlich gross sind. Von dreien dieser letztern hat jeder mit dem endlichen Dreieck eine Seite gemein, und in diesen ist daher g negativ; sie entsprechen auf der Kugel den an den Wendekreis grenzenden Vierecken (§. 35.). In den drei übrigen Theilen, welche, zwischen den vorigen liegend, an die Ecken des Dreiecks stossen und den an den Wendekreis grenzenden Dreiecken

entsprechen, ist g positiv. In diesen sechs unendlichen Theilen kann die Zahl g ihrem absoluten Werthe nach über alle Grenzen wachsen; dagegen kann sie im endlichen Dreiecke, wo sie positiv ist, die Einheit nicht überschreiten und erreicht diesen grössten Werth im Mittel- oder Schwerpunkte des Dreiecks.

Noch grössere Anschaulichkeit gewinnt diese Betrachtung, wenn man sich auf der Ebene ABC, welche s genannt werde, in jedem ihrer Punkte S ein Perpendikel errichtet denkt, dessen Länge nach einer vorher festgesetzten Linieneinheit durch das dem S zugehörige g ausgedrückt wird. Die Endpunkte dieser Perpendikel werden eine krumme Fläche bilden, und der Schnitt dieser Fläche mit einer der s parallelen und von s um g' entfernten Ebene s', oder vielmehr die rechtwinklige Projection dieses Schnittes auf s, wird die obengedachte Linie der dritten Ordnung sein, welche g' zur Characteristik hat.

Anlangend die Form dieser krummen Fläche, so ist zuerst klar, dass die ins Unendliche verlängerten drei Geraden BC, CA, AB in der Fläche selbst liegen und diese eben so, wie die Ebene s, in sieben Theile theilen. Denken wir uns ferner die Ebene s horizontal und die Perpendikel, jenachdem g positiv oder negativ ist, nach oben oder unten zu getragen, so erhebt sich der vom Perimeter des Dreiecks begrenzte Theil der Fläche über s; am meisten, um die Linieneinheit, über der Mitte des Dreiecks. Von den sechs übrigen unendlichen Theilen liegen die an die Seiten des Dreiecks grenzenden unterhalb s, und die an die Ecken desselben stossenden oberhalb s; beiderlei Theile aber entfernen sich von s um desto mehr — über alle Grenzen —, je weiter sie vom Dreiecke selbst und von den verlängerten Seiten desselben abliegen.

Eine mit s parallele Ebene s' wird hiernach, jenachdem sie unterhalb oder oberhalb s ist, die drei erstern oder die drei letztern unendlichen Theile der Fläche und zwar in hyperbelartigen Curven schneiden, von denen die drei Geraden BC, ... die Asymptoten sind. Der oberhalb des endlichen Dreiecks liegende Theil der Fläche wird aber von einer oberhalb liegenden Ebene s' nur dann und zwar in einer geschlossenen Curve geschnitten, wenn der Abstand g' der s' von s kleiner als 1 ist; ist $g' = 1$, so wird dieser Theil in seinem über dem Mittelpunkte des Dreiecks liegenden Punkte von s' berührt. Für $g' = 0$ reduciert sich die Curve auf das System der drei Geraden BC, ..., und für $g' = \infty$ fällt sie in das Unendliche. — Die Uebereinstimmung aller dieser Fälle

mit den auf der Kugel statt findenden und in §. 36. erörterten Fällen springt in die Augen.

§. 41.

Dass eine sphärische Linie der dritten Ordnung mit drei Wendepunkten ausser der einfachen Curve noch eine Zwillingscurve hat, wenn ihre Characteristik g zwischen 0 und 1 fällt, also $e > 27$ ist, und dass die Zwillingscurve für $g = 1$ oder $e = 27$ sich in einen isolierten Punkt verwandelt, dies lässt sich auch leicht aus der Betrachtung der Scheitel oder der Durchschnitte der Linie mit den Polaren ihrer Wendepunkte folgern.

Die Gleichung der Polare des Wendepunktes H ist $x = y$ (§. 32.). Diese, verbunden mit der Gleichung der Linie (1), giebt für die gemeinsamen Punkte der Polare und der Linie oder die in die Polare von H fallenden Scheitel: $(2x+z)^3 = ex^2z$, oder wenn man $z : x = p$ setzt:

$$(p) \quad (2+p)^3 = ep.$$

Ist daher p' eine Wurzel dieser cubischen Gleichung, so verhalten sich für einen jener Scheitel $x : y : z = 1 : 1 : p'$, und er selbst hat den Ausdruck

$$(p') \quad aA + bB + p'cC.$$

Da nun jede der drei Polaren die einfache Curve der Linie in einem Punkte und die Zwillingscurve, falls diese vorhanden ist, in zwei Punkten schneidet, die, wenn die Zwillingscurve sich immer mehr verengert, zuletzt in einen isolierten Punkt zusammengehen, so wird die Linie entweder bloss aus einer einfachen Curve bestehen, oder noch mit einer Zwillingscurve, oder mit einem isolierten Punkte begleitet sein, jenachdem von den drei Wurzeln der Gleichung (p), oder der Gleichung

$$q^3 - eq + 2e = 0,$$

wenn man $2+p = q$ setzt, entweder nur eine reell, oder alle drei reell und verschieden, oder zwei der drei reellen einander gleich sind. Uebereinstimmend mit dem schon Bemerkten tritt aber bei letzterer Gleichung nach einer bekannten Regel der erste, zweite, oder dritte Fall ein, jenachdem $e - 27$ negativ, positiv, oder null ist.

Zusätze. *a.* Ist $e = 27$, und hat folglich die Linie einen isolierten Punkt, so reduciert sich (p) auf

$$(p-1)^2 (p+8) = 0.$$

Für den isolierten Punkt selbst ist daher $p = 1$, und für den in die Polare von H fallenden Scheitel R (Fig. 14.) $p = -8$. Zufolge (p') ist demnach ersterer Punkt $\equiv aA + bB + cC$, d. i. der Centralpunkt V (§. 28. 7.), letzterer $\equiv aA + bB - 8cC$.

b. Für den Durchschnitt L der Polare von H mit der an H gelegten Tangente hatten wir in §. 32. $lL = aA + bB$, wodurch

$$V \equiv lL + cC \text{ und } R \equiv lL - 8cC$$

wird. Da ferner die Gleichungen dieser Polare und des Wendekreises $x = y$ und $x + y + z = 0$ sind, so verhält sich für den Durchschnitt beider Kreise mit einander, welcher D heisse, $x : y : z = 1 : 1 : -2$, und es ist folglich

$$D \equiv aA + bB - 2cC \equiv lL - 2cC.$$

Aus diesen Ausdrücken für V, R und D durch L und C ergeben sich ähnlicherweise, wie in §. 37., die D.verhältnisse

$$(CLVD) = -2, \quad (CLVR) = -8,$$

wovon die erstere Gleichung bei allen Werthen von e, die letztere nur für $e = 27$ gilt.

Die nämlichen zwei Gleichungen haben auch noch statt, wenn man unter C, L, V, D, R die Projectionen dieser Punkte auf irgend eine Ebene versteht. Fällt dabei L in unendliche Entfernung, wie dies unter Anderem bei den Newton'schen Parabeln geschieht, wo die Tangente ALB an dem einen Wendepunkte H unendlich entfernt ist, und damit die beiden andern F und G eine symmetrische Lage erhalten, so wird

$$(CLVD) = \frac{CV}{VL} : \frac{CD}{DL} = \frac{CV}{CD}, \quad (CLVR) = \frac{CV}{CR},$$

also $VC = 2\,CD$ (§. 29.) $= 8\,CR$ und $VC : CR : RD = 8 : 1 : 3$.

c. Bezeichnet demnach N den Scheitel einer N.Parabel, C den gemeinsamen Durchschnitt der an die symmetrischen Wendepunkte der Parabel gelegten Tangenten und D den mit C und N in der Axe liegenden Mittelpunkt von FG, so ist bei der Parabola punctata (Fig. 8.) $CN = \frac{1}{4}CD$. Dagegen ist bei der parabola cum ovali (Fig. 7.) $CN < \frac{1}{4}CD$, wie sogleich daraus erhellet, dass die Characteristik g einer solchen Parabel zwischen 0 und 1 fällt, während für die punctata $g = 1$ ist, und dass nach der Betrachtungsweise in §§. 35. und 36. von je zwei zu demselben System von Wendepunkten und Tangenten an denselben gehörigen und auf einerlei Seite dieser Tangenten liegenden Linien die den Tangenten nähere Linie die kleinere Characteristik hat. — Aus ähnlichem Grunde ist bei der parabola pura, wo g entweder grösser als 1, oder negativ ist, $CN > \frac{1}{4}CD$; für $g > 1$ fällt CN zwischen $\frac{1}{4}CD$ und CD (Fig. 9. a.); für $g < 0$ ist $CN > CD$ (Fig. 9. b.). Für $g = \infty$ (folg. §.) ist $CN = CD$; C liegt dann im Unendlichen, d. h. die Tangenten in F und G sind einander parallel (Fig. 19.).

§. 42.

Bei einer Linie der dritten Ordnung mit drei Wendepunkten kann noch der besondere Fall eintreten, dass die drei an die Wendepunkte gelegten Tangenten sich in einem Punkte schneiden. Die Gleichung einer solchen Linie wird sich am einfachsten mittelst des in §. 31. erhaltenen allgemeinen Satzes ergeben. Heissen nämlich, wie bisher, F, G, H (Fig. 19.) die drei Wendepunkte, zwischen welchen, als drei Punkten eines Hauptkreises, eine Gleichung von der Form

$$fF + gG + hH = 0$$

besteht; bezeichnet C den Durchschnitt der an F und G gelegten Tangenten, und wird in Bezug auf FGC, als F.dreieck, der allgemeine Ausdruck eines Punktes der Kugelfläche

$$fxF + gyG + czC$$

gesetzt: so ist die Gleichung des Wendekreises $z = 0$, und die Gleichungen der Tangenten FC, GC an F, G sind $y = 0$, $x = 0$. Die Gleichung der an H zu legenden Tangente, welche jetzt gleichfalls den Punkt C treffen soll, ist $x - y = 0$; denn damit reduciert sich der allgemeine Ausdruck eines Punktes auf $fxF + gxG + czC$, $= -hxH + czC$, d. i. auf den Ausdruck jedes beliebigen mit H und C in einem Hauptkreise liegenden Punktes. Nach §. 31. ist daher die Gleichung der Linie:

$$z^3 : xy\,(x - y) = \text{einer constanten Grösse},$$

welche wir $= i^3$ setzen wollen; oder noch einfacher, wenn wir iz statt z schreiben:

$$(\alpha)\quad z^3 = xy\,(x - y),$$

und der zugehörige Ausdruck wird: $fxF + gyG + cizC$, oder wenn wir $ci = k$ setzen:

$$(\beta)\quad fxF + gyG + kzC.$$

Zusätze. *a.* Die Characteristik der Linie, bei welcher sich die Tangenten an den drei Wendepunkten in einem Punkte schneiden, ist als unendlich gross anzusehen. Dies erhellet sogleich aus dem in §. 37. durch D.verhältnisse ausgedrückten Werthe von e. Denn wenn die drei Punkte A, B, C, in denen sich die Tangenten daselbst schneiden, in einen einzigen zusammengehen, so fallen mit diesem Punkte auch die dortigen P, Q, R zusammen. Hierdurch aber wird jedes der drei D.verhältnisse $(SATP)$, $(SBUQ)$, $(SCVR) = 0$, folglich auch $e = 0$, und die Characteristik $= 3 : \sqrt[3]{e} = \infty$.

b. Die Polare von H trifft den Centralpunkt C und schneidet die durch H gehende Sehne FG in einem Punkte J, welcher nach §. 22. der vierte harmonische Punkt zu F, G, H, und daher $\equiv fF - gG$ ist, weil

$H \equiv fF + gG$. Nehmen wir jetzt H und J, statt F und G, zu F.punkten, so dass das F.dreieck von dem Wendekreise HJ, von der Polare CJ des Wendepunktes H und von der an H gelegten Tangente HC gebildet wird. Weil $fF + gG = -hH$, und weil wir $fF - gG = iJ$ setzen können, so wird $2fF = iJ - hH$, $2gG = -iJ - hH$, und damit der Ausdruck (β) $x(iJ - hH) - y(iJ + hH) + 2kzC$, d. i.

$$(\gamma)\ ipJ + hqH + kzC,$$

wenn wir noch $x - y = 2p$ und $-x - y = 2q$ setzen. Hiermit aber verwandelt sich die Gleichung (α) der Linie in

$$(\delta)\ z^3 = 2p\,(q^2 - p^2).$$

c. Schlüsslich wollen wir noch diese sphärische Curve auf eine mit dem F.kreise HC parallele Ebene projicieren und die Gleichung dieser Projection zu bestimmen suchen. Heissen J, H, C die Projectionen von J, H, C, so liegen H und C unendlich entfernt, und es verhalten sich, wenn J zum Anfangspunkte und die Geraden JH und JC zu den Axen der Coordinaten y und x genommen werden, die Coefficienten im Ausdrucke (γ) $ip : hq : kz = c : y : x$,
wo, wenn O den Mittelpunkt der Kugel bezeichnet, $c =$ OJ ist (§. 24.). Die hieraus folgenden Verhältnisswerthe von p, q, z in (δ) substituiert, ergiebt sich als die gesuchte Gleichung der Projection:

$$\frac{x^3}{k^3} = 2\,\frac{c}{i}\left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{c^2}{i^2}\right), \text{ oder einfacher: } \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{x^3}{a^3},$$

eine Gleichung, die, wie zu erwarten stand, einer parabola pura (§. 26.) angehört. Für den Scheitel der Parabel ist $x = -a$ und $y = 0$; für die zwei symmetrischen Wendepunkte F und G, als die Projectionen von F und G, ist $x = 0$ und $y = \pm b$, und die in ihnen an die Curve gelegten Tangenten FC und GC sind mit JC, d. i. mit der Axe der Parabel, parallel.

Von den Linien der dritten Ordnung, welche Knoten, oder Spitzen haben.

§. 43.

Es bleiben uns noch die sphärischen Linien der dritten Ordnung zu betrachten übrig, bei welchen zwei der drei Wendepunkte zu einem Knoten, oder einer Spitze zusammengegangen sind. Wir kehren deshalb zu der Gleichung

$$(C)\text{-}\ fy^2z + ax^3 + kzx^2 + gz^2x + cz^3 = 0$$

in §. 23. zurück, welche, auf den Ausdruck $xA + yB + zC$ bezogen,

eine Curve darstellt, bei welcher B ein Wendepunkt, AB die an denselben gelegte Tangente und CA seine Polare ist. Wurde in (C) die Variable z constant gesetzt, so ergab sich (§. 24.) die Projection der Curve auf eine mit dem F.kreise AB parallele Ebene; und wenn dieser ebenen Curve statt der zwei andern Wendepunkte ein Knoten zukommen sollte, so musste in ihrer Gleichung das Aggregat der mit y nicht behafteten Glieder in Bezug auf x einen rein quadratischen Factor enthalten (§. 26.). Es wird daher (vergl. §. 5.) auch die durch (C) ausgedrückte sphärische Curve nur dann einen Knoten haben, wenn (C) sich auf die Form

$$y^2 z = \alpha (x - \beta z)(x - \gamma z)^2$$

reducieren lässt. Wie indessen schon aus §. 26. bekannt ist, reicht diese eine Bedingung noch nicht hin. Führen wir nämlich statt x eine andere Veränderliche $x_1, = x - \gamma z$, ein und setzen $\gamma - \beta = \delta$, so wird die Gleichung:

$$(\alpha) \quad y^2 z = \alpha x_1^2 (x_1 + \delta z),$$

und der zugehörige Ausdruck wird: $(x_1 + \gamma z) A + yB + zC$, oder wenn wir $\gamma A + C = c_1 C_1$ setzen:

$$(\beta) \quad x_1 A + yB + c_1 z C_1.$$

Nun geschieht der Gleichung (α) Genüge für $x_1 = 0$ und $y = 0$, und es ist folglich C_1 ein Curvenpunkt. Ist aber x_1 sehr klein, und mithin sehr nahe $y^2 = \alpha\delta x_1^2$, so kann die Gleichung nur dann befriedigt werden, wenn das Product $\alpha\delta$ positiv; nicht, wenn es negativ ist. Im letztern Falle ist daher C_1 ein isolierter Punkt. Im erstern setze man $\alpha\delta = \varepsilon^2$. Für ein sehr kleines x_1 wird alsdann $y = \pm \varepsilon x_1$, welches die Gleichungen zweier Hauptkreise sind, deren jeder durch C_1 und einen dem C_1 sehr nahe liegenden Curvenpunkt geht, also die Gleichungen zweier die Curve in C_1 berührenden Hauptkreise. Mithin muss dann C_1 ein Knoten sein.

Die Gleichung für eine sphärische Linie der dritten Ordnung mit einem Knoten ist demnach

$$y^2 z = \alpha x_1^3 + \varepsilon^2 x_1^2 z,$$

und (β) der zugehörige Ausdruck; oder, wenn wir

$$x_1 = \frac{x_2}{\varepsilon} \text{ und } z = \frac{\alpha}{\varepsilon^3} z_1$$

setzen, $y^2 z_1 = x_2^3 + x_2^2 z_1$, die Gleichung, und $\frac{x_2}{\varepsilon} A + yB + \frac{\alpha}{\varepsilon^3} c_1 z_1 C_1$ der Ausdruck; oder endlich, wenn wir $1 : \varepsilon : \frac{\alpha c_1}{\varepsilon^2} = a : b : c$ setzen und die nicht mehr nöthigen Indices weglassen:

$$(\gamma) \quad y^2 z = x^3 + x^2 z \text{ die Gleichung und}$$

$$(\delta) \quad axA + byB + czC \text{ der Ausdruck.}$$

Hierbei ist C der Knoten, B der noch übrige Wendepunkt, AB die Tangente an B und AC die Polare von B. — Da die beiden andern Wendepunkte jetzt in C vereinigt sind, so vertritt hier der Hauptkreis BC die Stelle des Wendekreises.

Zusatz. Wie aus dem Vorigen unmittelbar folgt, sind $y = x$ und $y = -x$ die Gleichungen der die Curve in C berührenden Hauptkreise, und daher die Durchschnitte der letztern mit dem F.kreise AB, dessen Gleichung $z = 0$ ist, $\equiv aA + bB$ und $aA - bB$. Bezeichnen wir daher diese Durchschnitte mit D und E (Fig. 20.), so können wir setzen:

$$-2dD = aA + bB, \quad -2eE = aA - bB, \text{ woraus}$$

$$aA = -dD - eE, \quad bB = -dD + eE \text{ folgt;}$$

und der Ausdruck (δ) wird, wenn wir D und E statt A und B zu F.punkten wählen:

$$-x(dD + eE) - y(dD - eE) + czC,$$

oder, wenn wir $x + y = -u$, $x - y = -v$ setzen und t statt z schreiben:

$$ctC + duD + evE.$$

Die Gleichung (γ) verwandelt sich damit in

$$tuv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^3,$$

d. h. das geometrische Mittel zwischen t, u, v ist dem arithmetischen zwischen u und v gleich. (Vergl. §. 33.).

Das F.dreieck wird hierbei von der Tangente am Wendepunkte B und den zwei Tangenten am Knoten C gebildet. In Bezug auf dasselbe ist der Wendepunkt $\equiv dD - eE$, und dessen Polare der durch C und $dD + eE$ zu legende Hauptkreis. Ein Punkt dieses Hauptkreises ist $cC + dD + eE$, welcher L heisse. Für ihn ist $t = u = v$; und da mit dieser Gleichheit der Veränderlichen der Curvengleichung Genüge geschieht, so ist L der nochmalige Durchschnitt der durch C gehenden Polare mit der Curve, also der Scheitel der Curve. Dass letztere von dem durch L und B gelegten Hauptkreise in L berührt wird, ist schon in §. 29. bemerkt worden.

§. 44.

In dem noch specielleren Falle, wenn in der Gleichung (C) der von y freie Theil rein cubisch, und daher in (α) der Coefficient $\delta = 0$ ist, hat nach §. 26. und mit Anwendung derselben Schlussweise, wie im vor. §., die sphärische Linie der dritten Ordnung eine Spitze. Die Gleichung einer solchen Linie ist daher

$$y^2 z = \alpha x^3, \text{ verbunden mit dem Ausdrucke } xA + yB + zC.$$

Bestimmen wir noch drei Constanten a, b, c so, dass $b^2 c = \alpha a^3$, so verwandelt sich die Gleichung in

$$\frac{y^2}{b^2} \cdot \frac{z}{c} = \frac{x^3}{a^3},$$

und es wird nunmehr, wenn wir in der Gleichung und im Ausdrucke ax, by, cz statt x, y, z schreiben,

die erstere $y^2 z = x^3$, der letztere $axA + byB + czC$.

Hierin ist C die Spitze und, wie vorhin, B der Wendepunkt, CA seine Polare und AB die an ihn gelegte Tangente; $aA + bB + cC$ ist aber ein Punkt der Curve, weil mit $x = y = z$ die Gleichung befriedigt wird.

Von der Collineationsverwandtschaft ebener und sphärischer Figuren.

§. 45.

Der Hauptzweck dieser Abhandlung sollte die Eintheilung der ebenen Linien der dritten Ordnung nach dem Princip der Collineation sein. Weil alle einander collinearen ebenen Linien, und wo nicht sie selbst, doch ihnen affine Linien, als Centralprojectionen einer und derselben sphärischen Linie betrachtet werden können, so untersuchten wir zunächst die verschiedenen Formen und die daran sich knüpfenden Eigenschaften der sphärischen Linien der dritten Ordnung. Nachdem diese Gegenstände zur Genüge, wie ich hoffen darf, erörtert worden, wende ich mich jetzt zu dem Versuche einer Eintheilung selbst, dem ich noch folgende die Collineation ebener und sphärischer Figuren überhaupt betreffende Sätze vorausgehen lasse.

1) Wenn allen Punkten einer Ebene die Punkte einer andern Ebene dergestalt entsprechen, dass von je drei Punkten der einen Ebene, welche in einer Geraden liegen, die entsprechenden der andern ebenfalls in einer Geraden begriffen sind, so sagt man, dass die Punkte beider Ebenen sich nach dem Gesetze der Collineation entsprechen, und nennt je zwei Figuren der einen und der andern Ebene, welche durch entsprechende Punkte bestimmt sind, einander collinear.

2) Sollen die Punkte zweier Ebenen nach dem Gesetze der Collineation auf einander bezogen werden, so kann man die vier ersten Paare sich entsprechender Punkte, sie heissen A und A_1, B und B_1, C und C_1, D und D_1, nach Willkühr annehmen, nur dass keine drei der vier Punkte der einen oder der andern Ebene in einer Geraden liegen.



Der jedem fünften Punkte S der einen Ebene entsprechende Punkt S_1 der andern ist dann vollkommen bestimmt.

Die Bestimmung des Punktes S_1 aus den gegebenen $A..D$, $A_1..D_1$ und S kann unter andern dadurch bewerkstelligt werden, dass man, was immer möglich ist (Bar. Calc. §. 230.), die beiden Ebenen in eine solche Lage gegen einander bringt, dass sich die vier Geraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 in einem Punkte X schneiden. Der Punkt S_1 wird alsdann der Durchschnitt der Ebene $A_1 B_1 C_1$ mit der Geraden XS sein. Denn es ist von selbst klar, dass bei einem solchen Entsprechen der Punkte beider Ebenen drei Punkte der einen jederzeit in einer Geraden liegen, wenn die ihnen entsprechenden der andern in einer Geraden sind.

Zwei Ebenen, deren Punkte einander collinear entsprechen, können demnach immer in eine perspectivische Lage, d. i. in eine solche gebracht werden, bei welcher alle die Geraden, welche einander entsprechende Punkte verbinden, sich in einem Punkte schneiden.

3) Sind F, G, H, J vier Punkte der einen Ebene, F_1, G_1, H_1, J_1 die ihnen entsprechenden in der andern, und liegen die vier erstern, also auch die vier letztern, in einer Geraden, so sind, weil bei der perspectivischen Lage der beiden Ebenen die vier Geraden FF_1, GG_1, HH_1, JJ_1 in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte schneiden, nach einem bekannten und bereits in §. 38. angewendeten Satze die D.verhältnisse

$$(FGHJ) \text{ und } (F_1 G_1 H_1 J_1) \text{ einander gleich.}$$

4) Eben so, wie die Punkte zweier Ebenen, kann man auch die Punkte zweier Kugelflächen in collineare Beziehung setzen, indem man nämlich alle Punkte der einen Fläche denen der andern dergestalt entsprechen lässt, dass je dreien Punkten der einen Fläche, welche in einem Hauptkreise liegen, drei in einem Hauptkreise liegende Punkte der andern Fläche entsprechen. Man gewahrt augenblicklich, dass, wenn die Punkte beider Flächen in dieser Beziehung zu einander stehen, die Centralprojectionen dieser Punkte auf zwei beliebig gelegte Ebenen einander collinear sind, und dass umgekehrt, wenn man die Punkte zweier Ebenen sich collinear entsprechen lässt, man durch Projection derselben auf zwei Kugelflächen zu jedem Punkte der einen Fläche einen ihm nach dem Gesetze der sphärischen Collineation entsprechenden in der andern erhält. Beides aus dem einfachen Grunde, weil, wenn drei Punkte einer Kugelfläche in einem Hauptkreise liegen, die Centralprojectionen derselben auf eine Ebene in einer Geraden sind, und umgekehrt.

5) Es folgt hieraus leicht weiter, dass, wenn die Punkte zweier Kugelflächen einander entsprechend gesetzt werden sollen, eben so, wie vorhin bei zwei Ebenen, vier Punkte der einen Fläche und die vier ihnen entsprechen sollenden der andern beliebig genommen werden können, dafern nur keine drei, weder der vier erstern, noch der vier letztern, in einem Hauptkreise liegen; und dass hiermit für jeden Punkt der einen Fläche der entsprechende in der andern vollkommen bestimmt ist.

6) Sind F, G, H, J vier in einem Hauptkreise liegende Punkte der einen Fläche, F_1, G_1, H_1, J_1 die ihnen collinear entsprechenden und daher gleichfalls in einem Hauptkreise liegenden Punkte der andern Fläche, so sind die sphärischen D.verhältnisse

$$(FGHJ) \text{ und } (F_1 G_1 H_1 J_1)$$

einander gleich. Denn bezeichnen F, G, H, J die Projectionen der vier erstern Punkte auf eine Ebene, und F_1, G_1, H_1, J_1 die Projectionen der vier letztern auf eine zweite Ebene, so ist (§. 25. Anmerk.)

$$(FGHJ) = (\mathrm{FGHJ}) \text{ und } (F_1 G_1 H_1 J_1) = (\mathrm{F}_1 \mathrm{G}_1 \mathrm{H}_1 \mathrm{J}_1).$$

Weil aber die Punkte beider Ebenen, welche Projectionen sich entsprechender Punkte der beiden Kugelflächen sind, sich nach dem Gesetze der Collineation entsprechen, so ist

$$(\mathrm{FGHJ}) = (\mathrm{F}_1 \mathrm{G}_1 \mathrm{H}_1 \mathrm{J}_1); \text{ folglich u. s. w.}$$

7) Der eben bewiesene Satz gilt, wie von selbst einleuchtet, auch umgekehrt. Hat man nämlich die Punkte zweier Kugelflächen in collineare Beziehung gebracht, und entsprechen dabei drei in einem Hauptkreise liegende Punkte F, G, H der einen Fläche den Punkten F_1, G_1, H_1 der andern, welche daher ebenfalls in einem Hauptkreise liegen werden, so werden zwei in denselben zwei Kreisen liegende Punkte J und J_1 einander entsprechende sein, wenn $(FGHJ) = (F_1 G_1 H_1 J_1)$ ist.

8) Werden vier Punkte A, B, C und M, $\equiv aA + bB + cC$, einer Kugelfläche, von denen keine drei in einem Hauptkreise liegen, vier beliebigen, nur derselben Bedingung unterworfenen Punkten A_1, B_1, C_1 und M_1, $\equiv a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$, einer zweiten Kugelfläche collinear entsprechend gesetzt, so entsprechen sich nach diesem Gesetz auch die Punkte

$$S \equiv axA + byB + czC \text{ und } S_1 \equiv a_1 xA_1 + b_1 yB_1 + c_1 zC_1$$

beider Flächen.

Beweis. Zu Folge der Ausdrücke für M und S kann man schreiben:

$$aA + bB + cC = mM \text{ und } axA + byB + czC = sS.$$

Man setze hiernach $bB + cC = mM - aA \equiv J$ und

$$byB + czC = sS - axA \equiv P.$$

Es sind daher J und P die Punkte des Hauptkreises BC, welche er mit den Hauptkreisen MA und SA gemein hat (Fig. 21.), und es verhält sich $\frac{\sin BJ}{\sin JC} = \frac{c}{b}$, $\frac{\sin BP}{\sin PC} = \frac{cz}{by}$; folglich ist

$$(BCJP) = \frac{y}{z}.$$

Eben so findet sich, wenn K und Q die Durchschnitte des Hauptkreises CA mit MB und SB bezeichnen:

$$(CAKQ) = \frac{z}{x}.$$

Haben ferner auf der zweiten Kugelfläche die Punkte J_1, P_1, K_1, Q_1 dieselbe Bedeutung, wie die gleichnamigen auf der ersten, so dass J_1 den Durchschnitt von $B_1 C_1$ mit $M_1 A_1$ u. s. w. ausdrückt, so ist auf gleiche Weise

$$(B_1 C_1 J_1 P_1) = \frac{y}{z} \text{ und } (C_1 A_1 K_1 Q_1) = \frac{z}{x}, \text{ folglich}$$

$$(BCJP) = (B_1 C_1 J_1 P_1) \text{ und } (CAKQ) = (C_1 A_1 K_1 Q_1).$$

Nach der Voraussetzung und nach der gemachten Construction entsprechen aber den Punkten A, B, C, J, K die Punkte A_1, B_1, C_1, J_1, K_1. Zu Folge der zwei letzterhaltenen Gleichungen entsprechen sich daher auch die Punkte P und P_1, so wie Q und Q_1; mithin sind auch die Durchschnitte von AP mit BQ und von $A_1 P_1$ mit $B_1 Q_1$, d. h. S und S_1, einander entsprechende Punkte.

9) Sind die vier Punkte A, B, C und M, $\equiv aA + bB + cC$, einer Kugelfläche, also auch die Verhältnisse $a : b$ und $b : c$, gegeben, sind aber nicht die Verhältnisse $x : y$ und $y : z$ einzeln, sondern eine Gleichung zwischen ihnen oder eine homogene Gleichung zwischen x, y, z gegeben, und ist daher der Ort von S, $\equiv axA + byB + czC$, eine sphärische Curve, so sind diese Curve und die mit derselben Gleichung in Bezug auf den Ausdruck $a_1 xA_1 + b_1 yB_1 + c_1 zC_1$ construierte Curve nach vorigem Satze einander collinear. Es entsprechen sich nämlich je zwei Punkte der einen und der andern Curve, für welche x, y, z in den nämlichen Verhältnissen zu einander stehen. Nächstdem sind noch A, B, C, M und A_1, B_1, C_1, M_1 einander entsprechende Punkte, mögen sie zu den Curven selbst gehören, oder nicht.

Zwei Curven, die mit zwei nicht identischen Gleichungen, die eine in Bezug auf den Ausdruck $axA + \ldots$, die andere in Bezug auf $a_1 xA_1 + \ldots$, construiert worden, sind einander nicht collinear, wenigstens nicht

dergestalt, dass dabei den Punkten A, B, C und $aA + \dots$ die Punkte A_1, B_1, C_1 und $a_1 A_1 + \dots$ entsprächen. Deshalb, und weil durch Annahme anderer F.punkte die Ordnung, zu welcher eine Curve gehört, nicht geändert wird, können zwei Curven, welche von verschiedener Ordnung sind, auf keine Weise einander collinear sein.

10) Bedeute (x, y, z) eine homogene Function von x, y, z. Die durch die Gleichung
$$(x, y, z) = 0$$
und den Ausdruck $axA + byB + czC$ bestimmte Curve heisse l,
" " " $a_1 xA_1 + b_1 yB_1 + c_1 zC_1$ " " " l_1,
" " " $b_1 xB_1 + a_1 yA_1 + c_1 zC_1$ " " " l_2.

Hiernach sind l und l_1 zwei einander collineare Curven, und es entsprechen dabei den Punkten A, B, C und $aA + bB + cC$, $\equiv M$, die Punkte A_1, B_1, C_1 und $a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$, $\equiv M_1$. Desgleichen sind l und l_2 einander collinear und dabei A, B, C, M und B_1, A_1, C_1, M_1 entsprechende Punkte. Im Allgemeinen werden nun die ebenfalls einander collinearen Curven l_1 und l_2 von einander verschieden sein. Nehmen wir aber an, dass (x, y, z) eine nach x und y symmetrische Function ist, so können wir als Gleichung für l_2 auch schreiben: $(y, x, z) = 0$; und diese Gleichung, verbunden mit dem Ausdrucke $a_1 yA_1 + b_1 xB_1 + c_1 zC_1$ für l_2, giebt eine mit l_1 ganz identische Curve. Ist daher die Function (x, y, z) nach x und y symmetrisch, so sind die Curven l und l_1 auch dergestalt in collinearer Beziehung, dass A, B, C, M und B_1, A_1, C_1, M_1 einander entsprechen.

Wenn folglich (x, y, z) eine nach x, y, z zugleich symmetrische Function ist, so können die Curven l und l_1 auf sechs verschiedene Arten einander entsprechend gesetzt werden, indem man alsdann den Punkten A, B, C die Punkte A_1, B_1, C_1, letztere in jeder beliebigen Folge genommen, entsprechen lassen kann. Dabei aber entspricht M_1 stets dem M, weil die Coefficienten a_1, b_1, c_1 resp. mit den Punkten A_1, B_1, C_1 stets verbunden bleiben.

Von der Collineationsverwandtschaft zwischen Linien der dritten Ordnung.

§. 46.

Mit Hülfe des Voranstehenden wird es nun keine Schwierigkeit haben, die Bedingungen zu bestimmen, unter denen zwei sphärische Linien der dritten Ordnung einander collinear sind, sobald wir nur noch die leicht erweislichen Sätze berücksichtigen, dass bei zwei einander

collinearen sphärischen (oder ebenen) Curven jedem Wendepunkte, Knoten, oder Spitze der einen Curve ein gleichartiger merkwürdiger Punkt in der andern entspricht, und dass zwei an zwei einander entsprechende Punkte beider Curven gelegte Berührungskreise sich gleichfalls entsprechen. Vergl. §. 5.

Wenn demnach von zwei einander collinearen Linien der dritten Ordnung die eine drei Wendepunkte hat, so müssen der andern gleichfalls drei Wendepunkte zukommen. Da die auf den Ausdruck $axA + byB + czC$ sich beziehende Gleichung einer solchen Linie, den in §. 42. betrachteten Fall ausgenommen, immer auf die Form $\sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{3}g(x+y+z)$ gebracht werden kann (§. 35.), so sind je zwei solcher Linien, wenn sie einerlei Characteristik g und damit eine gemeinschaftliche Gleichung haben, einander collinear. Dabei entspricht der Centralpunkt $aA + bB + cC$ der einen dem Centralpunkte der andern, und, wie gehörig, die Punkte $bB - cC$, $cC - aA$, $aA - bB$, d. i. die Wendepunkte (§. 31.) der einen, den Wendepunkten der andern, die F. kreise BC, CA, AB, d. i. die an die Wendepunkte der einen Linie gelegten Berührungskreise, denselben Kreisen bei der andern, u. s. w. Weil übrigens die Gleichung nach x, y, z symmetrisch ist, so kann man die Punkte A, B, C bei der einen Linie den gleichnamigen Punkten bei der andern, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die drei Wendepunkte der einen den drei Wendepunkten der andern, in jeder beliebigen Folge entsprechend setzen, und es sind daher die beiden Linien auf sechs verschiedene Arten einander collinear.

Da ferner, wenn zwei Linien, deren jede drei Wendepunkte hat, einander collinear sein sollen, die Wendepunkte der einen und die der andern, also auch die beiderseits von den Tangenten in den Wendepunkten gebildeten Dreiecke (ABC und $A_1 B_1 C_1$) einander entsprechen müssen, so können die Linien, wenn sie verschiedene Characteristiken haben, und folglich ihre auf jene Dreiecke bezogenen Gleichungen nicht identisch sind, auch nicht einander collinear sein.

Zwei Linien der dritten Ordnung, deren jede drei Wendepunkte hat, sind daher nur dann und dann immer, und zwar auf sechserlei Weise, einander collinear, wenn ihre Characteristiken einander gleich sind. Insbesondere sind es daher alle die Linien, welche eine Characteristik $= 1$ und damit einen isolierten Punkt haben (§. 36.).

Das jetzt von Linien mit drei Wendepunkten im Allgemeinen Gesagte gilt aber auch für den speciellen in §. 42. erörterten Fall, wenn die

an die drei Wendepunkte F, G, H gelegten Tangenten sich in einem Punkte C schneiden. Denn die auf den Ausdruck $fxF + gyG + kzC$ sich beziehende Gleichung einer solchen Linie, $z^3 = xy\ (x - y)$, ist frei von einer erst noch zu bestimmenden Constante; mithin sind alle diese Linien einander collinear verwandt. Und da, wie aus §. 42. erhellet, dieselbe Gleichung hervorgeht, wenn statt F und G ein anderes Paar Wendepunkte zu F.punkten genommen wird, so können auch je zwei dieser Linien auf sechs verschiedene Arten einander collinear gesetzt werden. Endlich folgt unmittelbar aus dem Princip der Collineation, dass keine dieser Linien einer andern, bei welcher die Tangenten in den drei Wendepunkten sich nicht in einem Punkte schneiden, collinear sein kann.

Was die mit einem Knoten versehenen Linien der dritten Ordnung anlangt, so sind diese insgesammt einander collinear, weil in ihrer auf den Ausdruck $ctC + duD + evE$ bezogenen Gleichung $8\,tuv = (u+v)^3$ (§. 43.) keine erst noch zu bestimmende Constante vorkommt.

Weil die Gleichung nach u und v symmetrisch ist, so können je zwei dieser Linien auf doppelte Weise auf einander bezogen werden. Hat man nämlich die eine Linie mit den vier Punkten C, D, E und L, $\equiv cC + dD + eE$, und die andere mit den vier ihnen resp. entsprechenden C_1, D_1, E_1 und L_1 construiert, so kann man auch E_1 dem D und D_1 dem E entsprechend setzen; d. h. die zwei Tangenten CD und CE am Knoten C der einen Linie können willkührlich den zwei Tangenten am Knoten der andern entsprechend gesetzt werden. Je zwei solcher Linien können aber nicht noch auf eine dritte Art einander collinear sein, weil der Knoten C und der Wendepunkt B der einen Linie und die durch diese Punkte an die Linie gelegten Tangenten CD und CE, BDE und BL denselben Stücken bei der andern entsprechen müssen.

Eben so, wie alle Linien, welche einen Knoten haben, sind endlich auch je zwei mit einer Spitze versehene Linien einander collinear; denn in ihrer auf den Ausdruck $axA + byB + czC$ sich beziehenden Gleichung $y^2z = x^3$ (§. 44.) ist keine willkührliche Constante enthalten. Dabei entsprechen der Spitze C, dem Wendepunkte B und dem Durchschnitte A der an C und B gelegten Tangenten der einen Linie die gleichnamigen Stücke bei der andern. Je zwei solcher Linien können aber auf unendlich viele Arten einander collinear gesetzt werden; denn der Punkt $aA + bB + cC$ ist ein beliebiger Punkt der einen Linie, und für den ihm entsprechenden $a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$ kann man jeden beliebigen Punkt der andern wählen.

§. 47.

Sind zwei sphärische Linien einander collinear, so sind es auch die Centralprojectionen derselben auf Ebenen, und umgekehrt: sind zwei ebene Linien einander collinear, so sind es auch ihre sphärischen Projectionen. Alles, was im vor. §. über die collineare Beziehung zwischen sphärischen Linien der dritten Ordnung bemerkt worden, muss mithin wörtlich auch bei den ebenen dieser Ordnung gelten. Jenachdem daher von zwei solchen Linien die eine drei Wendepunkte, oder statt zweier derselben einen Knoten, oder eine Spitze hat, muss auch die andere, wenn sie der erstern collinear heissen soll, im ersten Falle drei Wendepunkte, im zweiten einen Knoten, im dritten eine Spitze haben. Im zweiten und dritten braucht keine anderweitige Bedingung erfüllt zu werden. Im ersten Falle dagegen muss noch, jenachdem sich die Tangenten an den drei Wendepunkten der einen Linie in einem Punkte schneiden, oder nicht, das eine, oder das andere bei der entsprechen sollenden Linie geschehen; und wenn beiderseits die drei Tangenten sich nicht in einem Punkte schneiden, so muss noch die Characteristik der einen Linie der Characteristik der andern gleich sein.

In §. 40. construierten wir eine krumme Fläche, welche die Eigenschaft besass, dass jeder Schnitt derselben mit einer Ebene, welche einer gewissen Grundebene parallel war, eine Linie der dritten Ordnung mit drei unendlich entfernten Wendepunkten und mit einer dem Abstande g' der schneidenden Ebene von der Grundebene proportionalen Characteristik gab. Diese Fläche kann daher als die Repräsentantin aller ebenen Linien der dritten Ordnung mit drei Wendepunkten angesehen werden, indem jede dieser Linien einem gewissen mit der Grundebene parallelen Schnitte der Fläche collinear ist.

Selbst die Linie, bei welcher die Tangenten der drei Wendepunkte sich in einem Punkte treffen, kann man als einen Schnitt dieser Fläche betrachten. Denn je grösser der Abstand g' der schneidenden Ebene von der Grundebene nach der einen oder der andern Seite ist, desto mehr liegen die dem Centralpunkte nächsten Punkte der drei hyperbolischen Curven des Schnittes vom Centralpunkte entfernt; desto mehr verschwindet also das von den Asymptoten der auf die Grundebene rechtwinklig projicierten drei Curven gebildete und den Centralpunkt als Mittelpunkt enthaltende endliche Dreieck gegen die Curven selbst, wie ein blosser Punkt; so dass bei einem unendlich grossen g' der Schnitt sich als

eine der in §. 42. betrachteten Linien, nur in unendlicher Vergrösserung, ansehen lässt. Auch stimmt damit die dortige Bemerkung überein, dass die Characteristik (g') einer solchen Linie unendlich gross ist.

Eintheilung der Linien der dritten Ordnung in Gattungen.

§. 48.

Der in §. 2. gemachten Bestimmung zu Folge sollten die Linien der dritten Ordnung nach dem Princip der Collineation in Gattungen vertheilt werden, so dass je zwei dieser Linien, jenachdem sie einander collinear, oder nicht collinear sind, zu einerlei Gattung, oder zu verschiedenen gehörten. Eine Gattung würden hiernach die Linien, welche einen Knoten haben, ausmachen; eine zweite Gattung die mit einer Spitze versehenen Linien. Die übrigen Gattungen würden alle mit drei Wendepunkten versehenen Linien enthalten. Die Anzahl dieser Gattungen aber würde unendlich gross sein, da jeder Characteristik eine besondere Gattung entspräche, und die Characteristik jeden beliebigen positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen Zahlenwerth haben und selbst unendlich gross sein kann.

Wenn nun auch durch Angabe der Characteristik etwas der Linie Eigenthümliches ausgedrückt wird, und sie dabei noch unzählig verschiedene Formen haben kann, so würde doch eine solche Unterscheidung, wo der Uebergang von einer Gattung zur andern nach dem Gesetz der Stetigkeit durch unendlich viele andere geschähe, nicht eine Classification zu nennen sein. Unter diesen Umständen, und wenn wir die Collineation als oberstes Eintheilungsprincip nicht aufgeben wollen, scheint es am angemessensten, folgende Bestimmung über die Eintheilung in Gattungen festzusetzen: dass je zwei Linien zu verschiedenen Gattungen gerechnet werden, wenn sich, ohne erst eine Messung vorzunehmen, erkennen lässt, dass sie einander nicht collinear sind. Kann man aber ohne vorher angestellte Messung dieses nicht erkennen, so zähle man sie zu einerlei Gattung.

Dieses festgesetzt, werden nach §. 36. die Linien, welche drei Wendepunkte haben, in fünf Gattungen zerfallen. Legen wir nämlich, zunächst nur die sphärischen Linien berücksichtigend, an die Wendepunkte einer solchen drei Berührungskreise, und nehmen fürs Erste an, dass sich dieselben nicht in einem Punkte schneiden. Durch sie und

durch den Wendekreis wird die Kugelfläche in acht Dreiecke und sechs Vierecke zerlegt, von denen die sechs letztern und sechs der acht erstern an den Wendekreis grenzen (§. 35).

Zu der ersten Gattung rechne man nun alle diejenigen Linien, welche bloss aus einer sich durch die am Wendekreise liegenden sechs Dreiecke windenden Curve bestehen. Die Charakteristik g jeder dieser Linien ist grösser als 1 und von endlicher Grösse.

Kommt zu einer also geformten Curve ein isolierter Punkt hinzu, so rechne man die Linie zur zweiten Gattung; für sie ist $g = 1$.

Bei Linien der dritten Gattung hat sich der isolierte Punkt zu einer isolierten Curve erweitert, und es fällt g zwischen 1 und 0. — Aus §. 36. wissen wir, dass sowohl jener Punkt und sein Gegenpunkt, als diese Curve und ihre Gegencurve, stets in den zwei nicht an den Wendekreis grenzenden Gegendreiecken zu suchen sind.

Die vierte Gattung umfasst alle die Linien, welche aus einer sich durch die sechs Vierecke ziehenden Curve bestehen. Für diese Linien hat g einen negativen endlichen Werth.

Die fünfte Gattung wird von den Linien gebildet, bei welchen die an die drei Wendepunkte gelegten Tangenten sich in einem Punkte schneiden, und wo g unendlich gross ist.

Von diesen fünf Gattungen kann man die zweite und die fünfte auch bloss als Uebergangsgattungen betrachten; die zweite als den Uebergang von der ersten zur dritten; die fünfte als den Uebergang von der vierten zur ersten Gattung, da das unendlich grosse g bei der fünften ebensowohl positiv als negativ genommen werden kann. — Den hier nicht mit gerechneten Uebergang von der dritten zur vierten Gattung bildet ein System von drei Hauptkreisen, als in welches sich die Linie für $g = 0$ verwandelt. (§. 36.)

Zu diesen fünf Gattungen von Linien mit drei Wendepunkten kommen als sechste und siebente Gattung der Inbegriff aller der Linien, bei welchen an die Stelle zweier der drei Wendepunkte das einemal ein Knoten, das anderemal eine Spitze getreten ist.

§. 49.

Auf gleiche Art, wie die sphärischen, müssen nun auch die ebenen Linien der dritten Ordnung in sieben Gattungen zerfallen, und es wird leicht sein, die Merkmale anzugeben, an denen jede Gattung einzeln

erkannt wird. Hat nämlich die zu beurtheilende Linie nur einen Wendepunkt und statt der beiden andern einen Knoten, oder eine Spitze, so gehört sie im erstern Falle zur sechsten, im letztern zur siebenten Gattung. Hat sie dagegen drei Wendepunkte, so lege man an diese Punkte drei Tangenten. Schneiden sich dieselben in einem Punkte, so ist die Linie zur fünften Gattung zu rechnen. Im entgegengesetzten Falle wird die Ebene von den drei Tangenten und von der die drei Wendepunkte verbindenden Geraden im Allgemeinen, d. h. wenn keine zwei dieser vier Geraden einander parallel sind, in zwei endliche Dreiecke, ein endliches Viereck und acht unendliche Theile zerlegt (Fig. 22.). Wird diese Figur auf die Kugel projiciert, so geben die zwei ebenen Dreiecke zwei sphärische Dreiecke und das ebene Viereck ein sphärisches Viereck; den acht unendlichen Theilen aber entsprechen auf der Kugel abwechselnd Drei- und Vierecke, so dass an die Seiten der Dreiecke bloss Vierecke, und umgekehrt, grenzen *). Da nun eine sphärische Linie der vierten Gattung sich durch alle Vierecke windet, so wird zu derselben Gattung auch die ebene Linie zu zählen sein, wenn ein Theil derselben innerhalb des endlichen Vierecks enthalten ist. Findet sich im Vierecke nichts von der Linie vor, so gehört sie zu einer der drei ersten Gattungen, und zwar zur zweiten, wenn sie einen isolierten Punkt hat; in Ermangelung desselben zur ersten, oder dritten Gattung. Um hierüber zu entscheiden, untersuche man auf die in §. 14. angegebene Weise, ob die Linie aus einer einzigen Curve besteht, oder aus zweien zusammengesetzt ist. Denn im erstern Falle ist sie eine Linie der ersten, im letztern der dritten Gattung.

Ein anderes Verfahren, um die erste und die dritte Gattung von einander zu unterscheiden, ist folgendes. Man sehe zu, ob die ebene Linie eine Curve, sie heisse λ, enthält, welche, sich ununterbrochen (durch mit + bezeichnete, also dreieckige Räume) fortziehend, zwei nach entgegengesetzten Richtungen sich erstreckende unendliche Aeste hat. Beim Dasein einer solchen Curve unterscheidet sich nun eine Linie der ersten Gattung von einer der dritten dadurch, dass erstere aus λ allein besteht. Ist aber eine Curve, wie λ, nicht vorhanden, so zeichnet sich die dritte Gattung vor der ersten dadurch aus, dass sich bei ihr eine end-

---

*) In der Figur sind die den sphärischen Drei- und Vierecken entsprechenden Räume resp. mit + und — bezeichnet.

liche in sich zurücklaufende Curve vorfindet. — Der Grund hiervon ist, dass sich die nur mit Einem Paare unendlicher Aeste versehene Curve λ auf die Kugel als eine einfache Curve projiciert, die vom Hauptkreise ν (§. 13.), welcher mit der Ebene von λ parallel ist, nur in Einem Punkte geschnitten wird, und dass, wenn eine Curve, wie λ, fehlt, der Hauptkreis ν mit der einfachen zur sphärischen Projection der Linie gehörenden Curve drei Punkte gemein haben muss und folglich nicht auch noch die Zwillingscurve, dafern diese vorhanden ist, treffen kann.

Es wären jetzt noch die Modificationen hinzuzufügen, welche die voranstehenden Regeln erleiden, wenn einer oder etliche der merkwürdigen Punkte der Linie oder eine der durch diese Punkte bestimmten Geraden in die Unendlichkeit rücken. Da aber die Entwickelung dieser Modificationen durchaus keine Schwierigkeit hat, so genüge es, den Blick noch einmal auf die fünf Newton'schen Parabeln, als ein hierher gehöriges Beispiel, zu lenken und zu bemerken, dass die parabola pura, jenachdem die an ihre zwei symmetrischen Wendepunkte gelegten Tangenten nach dem Scheitel zu convergieren, oder divergieren, oder mit einander parallel sind, eine Linie der ersten, oder vierten, oder fünften Gattung repräsentirt, während die vier übrigen Parabeln als Stellvertreterinnen der vier übrigen Gattungen sich betrachten lassen.

Noch weniger kann hier die Entwickelung der verschiedenen Arten von Linien, welche zu jeder der sieben Gattungen gehören, eine Stelle finden. Ich bemerke nur in dieser Hinsicht, dass auf der Kugel die verschiedenen zu einer und derselben Gattung gehörenden Arten sich durch die Lage unterscheiden, welche der mit der Projectionsebene parallele Hauptkreis gegen die die Gattung repräsentirende sphärische Linie hat, und dass man sich daher schon dadurch einen ungefähren Begriff von den Formen der verschiedenen Arten derselben Gattung verschaffen kann, dass man eine Kugel mit der darauf verzeichneten die Gattung vorstellenden Linie in weiter Entfernung aus verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet und dabei sich jedesmal die den scheinbaren Rand der Kugel treffenden Linientheile in unendliche Aeste verwandelt denkt.

Berichtigung. Seite 55, Zeile 8: nicht mehr Genüge geschieht. *Man setze hinzu:* wenigstens so lange nicht, als man von den Cubikwurzeln aus x, y, z bloss die reellen Werthe berücksichtigt. Der Grund hiervon u. s. w.

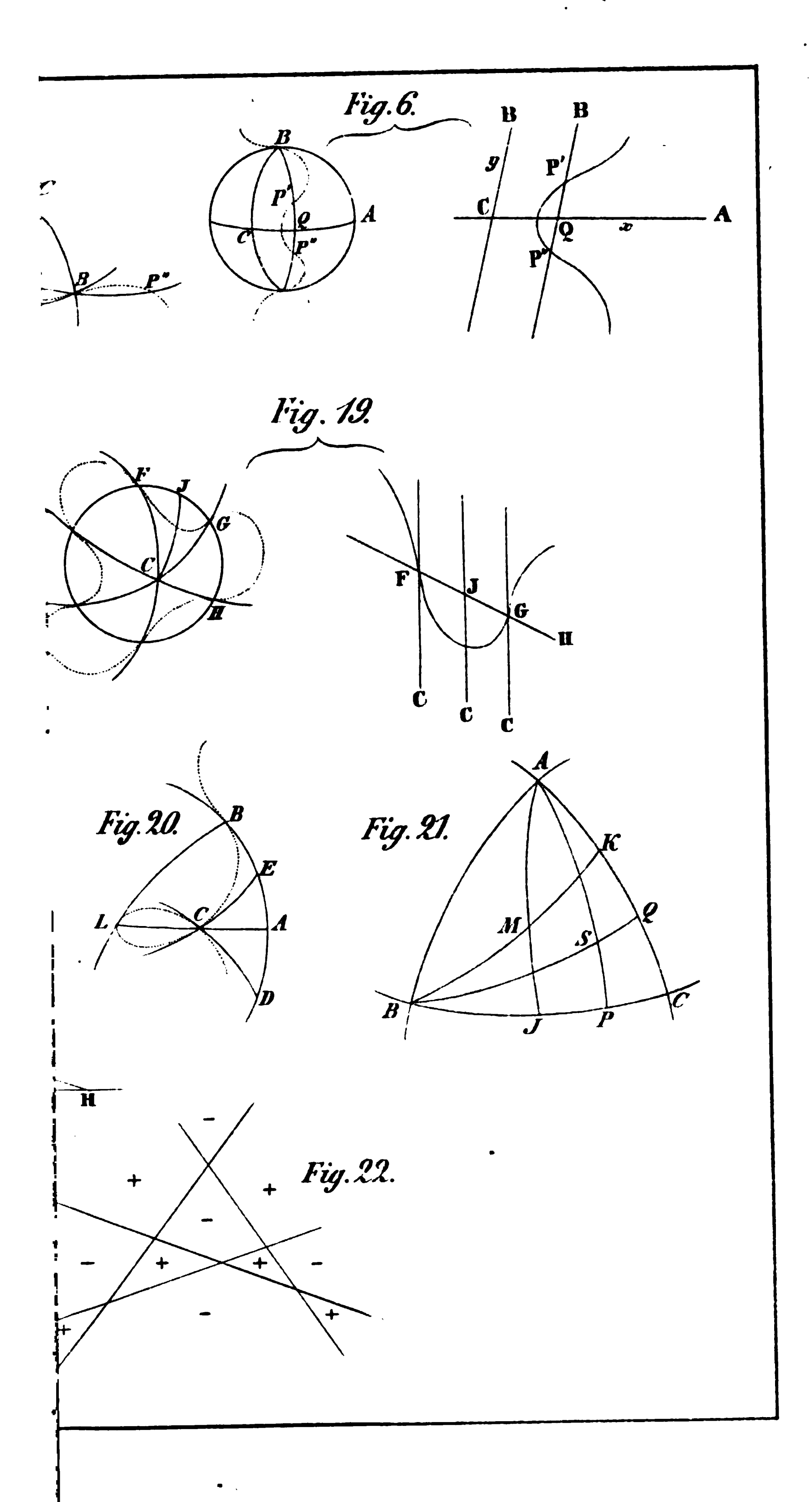


Fig. 6.
B
P'
Q
A
C
P"
B
B
y
P'
C
A
Q
x
P"
Fig. 19.
F
J
G
C
H
F
J
G
H
C
C
C
Fig. 20.
B
E
L
C
A
D
Fig. 21.
A
K
M
Q
S
B
J
P
C
H
Fig. 22.

P. A. HANSEN

I.

ALLGEMEINE AUFLÖSUNG

EINES

BELIEBIGEN SYSTEMS

VON

LINEARISCHEN GLEICHUNGEN.

II.

ÜBER DIE

ENTWICKELUNG DER GRÖSSE

$(1 - 2\alpha H + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$

NACH DEN POTENZEN VON α.

I.

ALLGEMEINE AUFLÖSUNG EINES BELIEBIGEN SYSTEMS VON LINEARISCHEN GLEICHUNGEN.

Die Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen ist längst gegeben und wird in fast allen Lehrbüchern vorgetragen; allein das Verfahren, welches man dafür entwickelt, wird unübersichtlich, sobald die Zahl der Unbekannten etwas gross ist, und verliert fast schon bei drei, und vielmehr noch bei vier oder mehr Unbekannten seine Anwendbarkeit; dies Verfahren verlangt überdies für jede grössere Anzahl von Unbekannten die besondere Construction der anzuwendenden Formeln.

Bezeichnet man die gegebenen Gleichungen, wie folgt:

$$\begin{aligned} ax + bx' + \text{etc.} + q &= 0 \\ a'x + b'x' + \text{etc.} + q' &= 0 \\ \text{etc.} \qquad & \text{etc.} \end{aligned}$$

dann ist bekanntlich für zwei Unbekannte und eben so viele Gleichungen der Nenner der Ausdrücke der Unbekannten =

$$ab' - ba'$$

und hieraus kann man nicht unmittelbar den Nenner der Unbekannten berechnen, wenn man deren drei und eben so viele Gleichungen hat, sondern man muss im Voraus die Coefficienten der dritten Unbekannten und die der ersten und zweiten Unbekannten in der dritten Gleichung vermittelst gewisser Versetzungen in den obigen Ausdruck einführen, und dadurch die folgende Form construieren:

$$ab'c'' - ba'c'' + ac'b'' - bc'a'' + ca'b'' - cb'a''$$

welche nun der Nenner ist. Diese Formel kann man eben so wenig unmittelbar anwenden, wenn vier oder mehr Unbekannte durch eben so viele Gleichungen gegeben sind, sondern muss immer von Neuem die anzuwendende Formel aus der nächst vorhergehenden, für die um Eins geringere Anzahl von Unbekannten geltenden, ableiten.

Dieser Umstand, so wie die oben erwähnte Unübersichtlichkeit dieser Formeln für eine grössere Anzahl von Unbekannten hat veranlasst, dass man sich in der Praxis selten oder nie derselben bedient, sondern,

wenn das gegebene System von Gleichungen nicht etwa näherungsweise aufgelöst werden kann, auf mechanische Weise eine Unbekannte nach der andern eliminiert.

Es schien mir daher nützlich ein Verfahren zu suchen, welches grössere Uebersicht gewährt wie jenes, und nicht für jede Anzahl von Unbekannten erst die besondere Construction der anzuwendenden Formeln verlangt, sondern die für einige wenige Unbekannte vollständig ausgeschriebenen Formeln ohne Weiteres auf jede grössere Anzahl derselben anzuwenden gestattet. Ich fand bald die Auflösung, die in den folgenden Blättern enthalten ist, und die die Eigenschaften besitzt, die ich so eben als wünschenswerth angeführt habe. Diese Auflösung ist derjenigen analog, welche GAUSS schon vor Jahren für das specielle System von linearischen Gleichungen gegeben hat, auf welches man bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate hingeführt wird, und die sich nun als ein specieller Fall dieser für jedes System von linearischen Gleichungen gültigen darstellt. Diese Auflösung zerfällt durch eine Aenderung, die man mit einigen der Hülfsgrössen vornehmen kann, in zwei, die in der Anwendung sich merklich von einander unterscheiden. Die erste derselben ist die allgemeinere, indem sie nicht nur die Werthe der Unbekannten, sondern auch die Coefficienten der unbestimmten Auflösung explicite giebt. Die zweite empfiehlt sich durch kürzere Rechnung wie die erste, wenn es sich bloss um die Ermittelung der Werthe der Unbekannten handelt, giebt jedoch auch die Coefficienten der unbestimmten Auflösung durch eine Rechnung, die nicht länger ist wie die, welche die erste Auflösung hiefür verlangt, wenn man alle auszuführenden Rechnungen in Betracht zieht.

Nach der Ableitung dieser beiden Auflösungen berücksichtige ich den Fall, wo alle Gleichungen des gegebenen Systems von Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, und wo man also die Werthe der Unbekannten nicht berechnen kann. Ich gebe das Kennzeichen hiefür an, und zeige, wie man die Bedingungsgleichung selbst, die dann zwischen den gegebenen Gleichungen nothwendig statt finden muss, auf eine einfache Art direct erhalten kann. Hiefür zeigt sich die erste Auflösung etwas einfacher wie die zweite, indem gewisse darin ohnehin vorkommende Hülfsgrössen zugleich die Coefficienten dieser Bedingungsgleichung sind.

Endlich habe ich die Anwendung der Auflösung und die bemerkenswerthen Einzelheiten, die dabei vorkommen, durch Beispiele erläutert.

1.

Seien

$$\left.\begin{array}{l}(aa)\, x + (ab)\, x' + (ac)\, x'' + (ad)\, x''' + \text{etc.} + q = 0 \\ (ba)\, x + (bb)\, x' + (bc)\, x'' + (bd)\, x''' + \text{etc.} + q' = 0 \\ (ca)\, x + (cb)\, x' + (cc)\, x'' + (cd)\, x''' + \text{etc.} + q'' = 0 \\ (da)\, x + (db)\, x' + (dc)\, x'' + (dd)\, x''' + \text{etc.} + q''' = 0 \\ \qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}\end{array}\right\} \quad (1)$$

ein beliebiges System von linearischen Gleichungen, in welchen x, x', etc die unbekannten Grössen bedeuten, und die Coefficienten (aa), (ab), (ba), etc. von einander unabhängig sind. Man multipliciere die erste Gleichung mit der unbestimmten Grösse α, und addiere sie hierauf zur zweiten. Hierdurch entsteht

$$[(aa)\alpha+(ba)]\,x+[(ab)\alpha+(bb)]\,x'+[(ac)\alpha+(bc)]\,x''+[(ad)\alpha+(bd)\,x''']+\text{etc.}$$
$$+[q\alpha+q'] = 0.$$

Setzen wir nun

$$\left.\begin{array}{l}(aa)\,\alpha + (ba) = 0 \\ (ab)\,\alpha + (bb) = (bb,1) \\ (ac)\,\alpha + (bc) = (bc,1) \\ (ad)\,\alpha + (bd) = (bd,1) \\ \qquad \text{etc.} \\ q\alpha + q' \quad = Q'\end{array}\right\} \quad (2)$$

so ergiebt sich

$$(bb,1)\, x' + (bc,1)\, x'' + (bd,1)\, x''' + \text{etc.} + Q' = 0,$$

in welcher x eliminiert ist.

Multiplicieren wir ferner die erste Gleichung mit α', die zweite mit β', und addieren beide hierauf zur dritten, so bekommen wir, wenn wir

$$\left.\begin{array}{l}(aa)\,\alpha' + (ba)\,\beta' + (ca) = 0 \\ (ba)\,\alpha' + (bb)\,\beta' + (cb) = 0 \\ (ca)\,\alpha' + (bc)\,\beta' + (cc) = (cc,2) \\ (da)\,\alpha' + (bd)\,\beta' + (cd) = (cd,2) \\ \qquad\qquad \text{etc.} \\ q\alpha' + q'\beta' + q'' \quad = Q''\end{array}\right\} \quad (3)$$

setzen,

$$(cc,2)\, x'' + (cd,2)\, x''' + \text{etc.} + Q'' = 0,$$

wo x und x' eliminiert sind. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergiebt sich ferner

$$
(4) \begin{cases}
(aa)\,\alpha'' + (ba)\,\beta'' + (ca)\,\gamma'' + (da) = 0 \\
(ab)\,\alpha'' + (bb)\,\beta'' + (cb)\,\gamma'' + (db) = 0 \\
(ac)\,\alpha'' + (bc)\,\beta'' + (cc)\,\gamma'' + (dc) = 0 \\
(ad)\,\alpha'' + (bd)\,\beta'' + (cd)\,\gamma'' + (dd) = (dd,3) \\
\text{etc.} \\
q\alpha'' + q'\beta'' + q''\gamma'' + q''' = Q''' \\
(dd,3)\,x''' + \text{etc.} + Q''' = 0
\end{cases}
$$

und so fort, bis alle vorgegebenen Gleichungen erschöpft sind. Das ursprüngliche System von linearischen Gleichungen wird also durch dieses Verfahren in folgendes verwandelt:

$$
\begin{aligned}
(aa)\,x + (ab)\,x' + (ac)\,x'' + (ad)\,x''' + \text{etc.} + q &= 0 \\
(bb,1)\,x' + (bc,1)\,x'' + (bd,1)\,x''' + \text{etc.} + Q' &= 0 \\
(cc,2)\,x'' + (cd,2)\,x''' + \text{etc.} + Q'' &= 0 \\
(dd,3)\,x''' + \text{etc.} + Q''' &= 0 \\
\text{etc.}
\end{aligned}
$$

wo in jeder nachfolgenden Gleichung immer eine unbekannte Grösse weniger vorkommt, wie in der vorhergehenden, so dass die letzte derselben nur Eine Unbekannte enthält.

Diese Gleichungen haben demnach dieselbe Form, welche Gauss zuerst dem speciellen System von linearischen Gleichungen, auf welches die Methode der kleinsten Quadrate hinführt, gegeben hat. Gleichwie in diesem Falle kann man in dem hier behandelten allgemeineren die vorstehenden Gleichungen weiter entwickeln und vollständig auflösen.

Die eben entwickelten Gleichungen zeigen, dass man jedenfalls setzen kann:

$$
(5) \begin{cases}
-x = \frac{q}{(aa)} + \frac{Q'}{(bb,1)}A + \frac{Q''}{(cc,2)}A' + \frac{Q'''}{(dd,3)}A'' + \text{etc.} \\
-x' = \frac{Q'}{(bb,1)} + \frac{Q''}{(cc,2)}B' + \frac{Q'''}{(dd,3)}B'' + \text{etc.} \\
-x'' = \frac{Q''}{(cc,2)} + \frac{Q'''}{(dd,3)}C'' + \text{etc.} \\
-x''' = \frac{Q'''}{(dd,3)} + \text{etc.} \\
\text{etc.}
\end{cases}
$$

wo A, A', etc., B', etc. unbestimmte Grössen sind. Substituieren wir nun diese Werthe der Unbekannten in die vorhergehenden Gleichungen, so bekommen wir identische Gleichungen, die in eben so viele zerfallen, wie unbestimmte Grössen vorhanden sind, und also diese bestimmen. Wir erhalten dadurch die folgenden Gleichungen, aus welchen A, A', etc., B', etc. bestimmt werden müssen.

$$(aa)\,A + (ab) = 0$$

$$\begin{aligned}(aa)\,A' + (ab)\,B' + (ac) &= 0\\ (bb,1)\,B' + (bc,1) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(aa)\,A'' + (ab)\,B'' + (ac)\,C'' + (ad) &= 0\\ (bb,1)\,B'' + (bc,1)\,C'' + (bd,1) &= 0\\ (cc,2)\,C'' + (cd,2) &= 0\end{aligned}$$

etc.

Diese Gleichungen sind denen, von welchen wir ausgegangen sind, ähnlich, und die Unbekannten haben dieselben Coefficienten, nur ist die Zahl aller Unbekannten hier successive von unten an gerechnet, immer um Eins kleiner, und die bekannten Glieder sind die Coefficienten der zuletzt weggefallenen Unbekannten. Wir können hier ebenfalls setzen:

$$\begin{aligned}-A'' &= \frac{(ad)}{(aa)} + \frac{(bd,1)}{(bb,1)}\,G + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,G'\\ -B'' &= \frac{(bd,1)}{(bb,1)} + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,H'\\ -C'' &= \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\end{aligned}$$

und ebenso für die andern der vorstehenden Systeme von Gleichungen. Die Substitution dieser Gleichungen giebt zur Bestimmung von G, G', H' die folgenden Gleichungen:

$$(aa)\,G + (ab) = 0$$

$$\begin{aligned}(aa)\,G' + (ab)\,H' + (ac) &= 0\\ (bb,1)\,H' + (bc,1) &= 0\end{aligned}$$

welche mit den, dem System für A'', B'', C'', vorangehenden obigen Systemen identisch sind. Hierdurch wird also offenbar, dass

$$G = A,\; G' = A',\; H' = B',\; \text{etc.}$$

und wir haben daher sofort zur Bestimmung von A, A', etc., B', die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}-A &= \frac{(ab)}{(aa)}\\[4pt] -A' &= \frac{(ac)}{(aa)} + \frac{(bc,1)}{(bb,1)}\,A\\ -B' &= \frac{(bc,1)}{(bb,1)}\\[4pt] -A'' &= \frac{(ad)}{(aa)} + \frac{(bd,1)}{(bb,1)}\,A + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,A'\\ -B'' &= \frac{(bd,1)}{(bb,1)} + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,B'\\ -C'' &= \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\\[4pt] &\text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

welche wiederum den Ausdrücken (5) zur Bestimmung der Unbekannten selbst analog sind.

2.

Um durch Anwendung der Ausdrücke (6) und (5) die Werthe der Unbekannten berechnen zu können, müssen durch Hülfe der Ausdrücke (2), (3), (4), etc. die Coefficienten $(bb,1)$, $(bc,1)$, etc. $(cc,2)$, etc. Q', Q'', etc. berechnet werden. Hier zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen der vorliegenden Aufgabe und der Auflösung des speciellen Systems von Gleichungen, worauf die Methode der kleinsten Quadrate führt. Wir haben hier, zufolge der Ausdrücke (2), (3), (4), etc. die folgenden Systeme von linearischen Gleichungen aufzulösen:

$$(aa)\,\alpha + (ba) = 0$$

$$\begin{aligned}(aa)\,\alpha' + (ba)\,\beta' + (ca) &= 0\\(ab)\,\alpha' + (bb)\,\beta' + (cb) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(aa)\,\alpha'' + (ba)\,\beta'' + (ca)\,\gamma'' + (da) &= 0\\(ab)\,\alpha'' + (bb)\,\beta'' + (cb)\,\gamma'' + (db) &= 0\\(ac)\,\alpha'' + (bc)\,\beta'' + (cc)\,\gamma'' + (dc) &= 0\end{aligned}$$

etc.

die sich von dem ursprünglichen System darin unterscheiden, dass die Coefficienten, die dort in horizontaler Reihe stehen, sich hier in verticaler befinden, und umgekehrt. Bei der Auflösung der Gleichungen, die die Methode der kleinsten Quadrate giebt, haben im Gegentheil die den vorstehenden correspondirenden Hülfsgleichungen die nämliche Form wie die gegebenen, welches man leicht erkennt, wenn man $(ba) = (ab)$, etc. macht.

3.

Um die Auflösung der eben angeführten Gleichungen zu bewerkstelligen, wollen wir im Allgemeinen ein System von Gleichungen betrachten, in welchem die Coefficienten der horizontalen Reihen denen der verticalen im ursprünglichen System, und umgekehrt, gleich sind, und dieses System in Bezug auf das ursprüngliche das reciproke System nennen. Sei daher das reciproke System das folgende:

$$(1')\quad\left\{\begin{aligned}(aa)\,y + (ba)\,y' + (ca)\,y'' + (da)\,y''' + \text{etc.} + r &= 0\\(ab)\,y + (bb)\,y' + (cb)\,y'' + (db)\,y''' + \text{etc.} + r' &= 0\\(ac)\,y + (bc)\,y' + (cc)\,y'' + (dc)\,y''' + \text{etc.} + r'' &= 0\\(ad)\,y + (bd)\,y' + (cd)\,y'' + (dd)\,y''' + \text{etc.} + r''' &= 0\\ \text{etc.}\qquad\qquad &\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Zur Auflösung dieses Systems haben wir dem Vorhergehenden zu Folge, wenn wir die betreffenden Verwandlungen vornehmen, die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
(aa)\,\alpha_1 + (ab) &= 0\\
(ba)\,\alpha_1 + (bb) &= (bb,1)\\
(ca)\,\alpha_1 + (cb) &= (cb,1)\\
(da)\,\alpha_1 + (db) &= (db,1)\\
&\text{etc.}\\
r\alpha_1 + r' &= R'
\end{aligned}\right\}\quad (2')$$

$$\left.\begin{aligned}
(aa)\,\alpha_1' + (ab)\,\beta_1' + (ac) &= 0\\
(ba)\,\alpha_1' + (bb)\,\beta_1' + (bc) &= 0\\
(ca)\,\alpha_1' + (cb)\,\beta_1' + (cc) &= (cc,2)\\
(da)\,\alpha_1' + (db)\,\beta_1' + (dc) &= (dc,2)\\
&\text{etc.}\\
r\alpha_1' + r'\beta_1' + r'' &= R''
\end{aligned}\right\}\quad (3')$$

$$\left.\begin{aligned}
(aa)\,\alpha_1'' + (ab)\,\beta_1'' + (ac)\,\gamma_1'' + (ad) &= 0\\
(ba)\,\alpha_1'' + (bb)\,\beta_1'' + (bc)\,\gamma_1'' + (bd) &= 0\\
(ca)\,\alpha_1'' + (cb)\,\beta_1'' + (cc)\,\gamma_1'' + (cd) &= 0\\
(da)\,\alpha_1'' + (db)\,\beta_1'' + (dc)\,\gamma_1'' + (dd) &= (dd,3)\\
&\text{etc.}\\
r\alpha_1'' + r'\beta_1'' + r''\gamma_1'' + r''' &= R'''.
\end{aligned}\right\}\quad (4')$$

u. s. w. Ferner

$$\left.\begin{aligned}
-A_1 &= \frac{(ba)}{(aa)}\\
-A_1' &= \frac{(ca)}{(aa)} + \frac{(cb,1)}{(bb,1)}A_1\\
-B_1' &= \frac{(cb,1)}{(bb,1)}\\
-A_1'' &= \frac{(da)}{(aa)} + \frac{(db,1)}{(bb,1)}A_1 + \frac{(dc,2)}{(cc,2)}A_1'\\
-B_1'' &= \frac{(db,1)}{(bb,1)} + \frac{(dc,2)}{(cc,2)}B_1'\\
-C_1'' &= \frac{(dc,2)}{(cc,2)}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\quad (6')$$

$$\left.\begin{aligned}
-y &= \frac{r}{(aa)} + \frac{R'}{(bb,1)}A_1 + \frac{R''}{(cc,2)}A_1' + \frac{R'''}{(dd,3)}A_1'' + \text{etc.}\\
-y' &= \frac{R'}{(bb,1)} + \frac{R''}{(cc,2)}B_1' + \frac{R'''}{(dd,3)}B_1'' + \text{etc.}\\
-y'' &= \frac{R''}{(cc,2)} + \frac{R'''}{(dd,3)}C_1'' + \text{etc.}\\
-y''' &= \frac{R'''}{(dd,3)} + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\quad (5')$$

4.

Bevor ich weiter gehe, mache ich darauf aufmerksam, dass ich im vorhergehenden Artikel Gruppen von Grössen, die äusserlich von den correspondirenden in Art. 1. verschieden sind, dieselben abkürzenden Bezeichnungen $(bb,1)$, $(cc,2)$, $(dd,3)$, etc. gegeben habe. Es ist daher zu beweisen, dass diese in der That identisch sind. Nehmen wir die beiden Ausdrücke für $(dd,3)$ vor; diese erfordern, dass

$$(da)\,\alpha_1'' + (db)\,\beta_1'' + (dc)\,\gamma_1'' = (ad)\,\alpha'' + (bd)\,\beta'' + (cd)\,\gamma''$$

sei. Um zu zeigen, dass diese Gleichung in der That in allen Fällen statt findet, substituiere ich die Werthe von (da), (db), (dc), welche sich aus den drei ersten Gleichungen (4), so wie die von (ad), (bd), $cd)$, welche sich aus den drei ersten Gleichungen (4′) ergeben.

Hierdurch entsteht ohne Weiteres:

$$\begin{aligned}
&(aa)\,\alpha''\,\alpha_1'' + (ba)\,\beta''\,\alpha_1'' + (ca)\,\gamma''\,\alpha_1''\\
+\,&(ab)\,\alpha''\,\beta_1'' + (bb)\,\beta''\,\beta_1'' + (cb)\,\gamma''\,\beta_1''\\
+\,&(ac)\,\alpha''\,\gamma_1'' + (bc)\,\beta''\,\gamma_1'' + (cc)\,\gamma''\,\gamma_1'' =\\
&(aa)\,\alpha_1''\,\alpha'' + (ab)\,\beta_1''\,\alpha'' + (ac)\,\gamma_1''\,\alpha''\\
+\,&(ba)\,\alpha_1''\,\beta'' + (bb)\,\beta_1''\,\beta'' + (bc)\,\gamma_1''\,\beta''\\
+\,&(ca)\,\alpha_1''\,\gamma'' + (cb)\,\beta_1''\,\gamma'' + (cc)\,\gamma_1''\,\gamma''
\end{aligned}$$

welches $0 = 0$ ist. Eben so beweist man die Identität der übrigen Ausdrücke, welche mit demselben Zeichen bezeichnet worden sind.

5.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun, dass man, um zur Auflösung des ursprünglichen Systems von n Unbekannten zu gelangen, eine Reihe von reciproken Systemen auflösen muss, von welchen das ausgedehnteste $n - 1$ Unbekannte enthält. Um diese aufzulösen, muss man eine Reihe von ursprünglichen Systemen auflösen, von welchen das ausgedehnteste $n - 2$ Unbekannte enthält. Dann wieder eine Reihe von reciproken Systemen, von welchen das ausgedehnteste $n - 3$ Unbekannte enthält, und so fort, bis man endlich auf Eine ursprüngliche und Eine reciproke Gleichung kommt, nämlich auf die beiden Gleichungen

$$(aa)\,\alpha + (ba) = 0 \text{ und } (aa)\,\alpha_1 + (ab) = 0.$$

Man kann daher mit diesen anfangen und successive zu den ausgedehnteren Systemen aufsteigen, wodurch man endlich die vollständig ausgeführte Auflösung des vorgegebenen Systems erhält. Vermöge der Relationen, die zwischen den Unbekannten der aufzulösenden Systeme

statt finden, reduciert sich diese Arbeit sehr, und führt darauf hin, dass man erst die beiden vorstehenden Systeme von Einer Unbekannten, dann zwei Systeme von zwei Unbekannten, und so fort, bis endlich zwei Systeme von $n - 1$ Unbekannten aufzulösen hat, welche letztere alsdann unmittelbar die Auflösung des vorgegebenen Systems geben. Es enthalten ferner in diesen Reihen von Systemen immer die vorhergehenden die Vorbereitungen zur Auflösung der beiden zunächst folgenden.

6.

Gehen wir, um dieses zu zeigen, zu den Gleichungen (2) zurück. Die erste dieser giebt

$$\alpha = \frac{(ba)}{-(aa)}$$

und wenn α hieraus berechnet worden ist, geben die übrigen Gleichungen (2) die Coefficienten

$$(bb,1),\ (bc,1),\ (bd,1),\ \text{etc. } Q',$$

die Gleichungen (6′) geben ferner zu erkennen, dass

$$A_1 = \alpha$$

ist. Wir kommen nun zu den Gleichungen (3). Hier haben wir zuvörderst ein reciprokes System von zwei Unbekannten aufzulösen. Wir müssen also in der im Art. 3. gegebenen allgemeinen Auflösung eines reciproken Systems die Unbekannten und die Zahl der Gleichungen auf die beiden ersten beschränken, und diese sowohl wie die bekannten Glieder den Gleichungen (3) gemäss abändern. Wir müssen daher in (5′)

$$\alpha',\ \beta',\ (ca),\ (cb)$$

resp. für $y,\ y',\ r,\ r'$

setzen. Hierdurch und durch Zuziehung der Gleichungen (2′) erhalten wir

$$\alpha_1 = \frac{(ab)}{-(aa)}$$

$$(ba)\,\alpha_1 + (bb) = (bb,1)$$

$$R' = (ca)\,\alpha_1 + (cb) = (cb,1)$$

und endlich, wegen $A_1 = \alpha$,

$$\alpha' = \frac{(ca)}{-(aa)} + \frac{(cb,1)}{-(bb,1)}\,\alpha$$

$$\beta' = \frac{(cb,1)}{-(bb,1)}$$

worauf die übrigen Gleichungen (3)

$$(cc,2),\ (cd,2),\ \text{etc. } Q''$$

geben. Durch die Gleichungen (6′) und (6) erkennt man ferner, dass

$$A_1' = \alpha'\,;\ B_1' = \beta'\,;\ A = \alpha_1$$

ist. Wir gehen jetzt zu den Gleichungen (4) über. Um das in diesen ent-

haltene reciproke System von drei Unbekannten aufzulösen, setzen wir in die allgemeine Auflösung des Art. 3.

$$\alpha'', \beta'', \gamma'', (da), (db), (dc)$$

resp. für y, y', y'', r, r', r''.

Hierdurch bekommen wir aus (2′) und (3′)

$$R' = (da)\,\alpha_1 + (db) \quad = (db,1)$$
$$R'' = (da)\,\alpha'_1 + (db)\,\beta'_1 + (dc) = (dc,2)$$

und hiermit aus (5′)

$$\alpha'' = \frac{(da)}{-(aa)} + \frac{(db,1)}{-(bb,1)}\,\alpha + \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}\,\alpha'$$
$$\beta'' = \qquad \frac{(db,1)}{-(bb,1)} + \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}\,\beta'$$
$$\gamma'' = \qquad \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}\,.$$

Um die Ausdrücke für α'_1 und β'_1, die hier gebraucht werden, zu finden, müssen wir uns an das ursprüngliche System halten, und darin nur x und x', so wie die beiden ersten Gleichungen beibehalten. Wir müssen also in diesem System, in Folge der beiden ersten Gleichungen (3′) x, x', q, q'

resp. in $\alpha'_1, \beta'_1, (ac), (bc)$

verwandeln. Hiermit ergiebt sich

$$Q' = (ac)\,\alpha + (bc) = (bc,1)$$

und

$$\alpha'_1 = \frac{(ac)}{-(aa)} + \frac{(bc,1)}{-(bb,1)}\,\alpha_1$$
$$\beta'_1 = \qquad \frac{(bc,1)}{-(bb,1)}\,.$$

Wir erkennen ferner durch die Gleichungen (6) und (6′), dass

$$A''_1 = \alpha''; \; B''_1 = \beta''; \; C''_1 = \gamma''; \; A' = \alpha'_1; \; B' = \beta'_1$$

ist. Diese Identificierungen können ohne Grenze fortgesetzt werden, und wir gelangen dadurch zur ausgeführten Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. Die bereits abgeleiteten Ausdrücke geben durch ihre regelmässige Form schon zu erkennen, wie alle folgenden zusammengesetzt sein müssen, und wir können daher jetzt schon, wenn wir sie in der Folge, wie sie zur Anwendung kommen, hinschreiben, daraus die für jede beliebige Anzahl von Unbekannten erforderlichen Ausdrücke ableiten.

7.

Es ergiebt sich somit durch die vorhergehenden Ableitungen, dass man, um das unter (1) aufgestellte beliebige System von linearischen

Gleichungen vollständig aufzulösen, die Berechnung der folgenden Ausdrücke auszuführen hat:

$$\alpha = \frac{(ba)}{-(aa)}$$

$$(ab)\,\alpha + (bb) = (bb,1)$$
$$(ac)\,\alpha + (bc) = (bc,1)$$
$$(ad)\,\alpha + (bd) = (bd,1)$$

etc.

$$q\alpha + q' = Q'$$

$$\alpha' = \frac{(ca)}{-(aa)} + \frac{(cb,1)}{-(bb,1)}\,\alpha$$
$$\beta' = \frac{(cb,1)}{-(bb,1)}$$

$$(ac)\,\alpha' + (bc)\,\beta' + (cc) = (cc,2)$$
$$(ad)\,\alpha' + (bd)\,\beta' + (cd) = (cd,2)$$

etc.

$$q\alpha' + q'\beta' + q'' = Q''$$

$$\alpha'' = \frac{(da)}{-(aa)} + \frac{(db,1)}{-(bb,1)}\,\alpha + \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}\,\alpha'$$
$$\beta'' = \frac{(db,1)}{-(bb,1)} + \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}\,\beta'$$
$$\gamma'' = \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}$$

$$(ad)\,\alpha'' + (bd)\,\beta'' + (cd)\,\gamma'' + (dd) = (dd,3)$$

etc.

$$q\alpha'' + q'\beta'' + q'\gamma'' + q''' = Q'''$$

$$\alpha_1 = \frac{(ab)}{-(aa)}$$

$$(ba)\,\alpha_1 + (bb) = (bb,1)$$
$$(ca)\,\alpha_1 + (cb) = (cb,1)$$
$$(da)\,\alpha_1 + (db) = (db,1)$$

etc.

$$\alpha_1' = \frac{(ac)}{-(aa)} + \frac{(bc,1)}{-(bb,1)}\,\alpha_1$$
$$\beta_1' = \frac{bc,(1)}{-(bb,1)}$$

$$(ca)\,\alpha_1' + (cb)\,\beta_1' + (cc) = (cc,2)$$
$$(da)\,\alpha_1' + (db)\,\beta_1' + (dc) = (dc,2)$$

etc.

$$\alpha_1'' = \frac{(ad)}{-(aa)} + \frac{(bd,1)}{-(bb,1)}\,\alpha_1 + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,\alpha_1'$$
$$\beta_1'' = \frac{(bd,1)}{-(bb,1)} + \frac{(cd,2)}{-(cc,2)}\,\beta_1'$$
$$\gamma_1'' = \frac{(cd,2)}{-(cc,2)}$$

$$(da)\,\alpha_1'' + (db)\,\beta_1'' + (dc)\,\gamma'' + (dd) = (dd,3)$$

etc.

---

u. s. w. bis zur Abtheilung, in welcher der Index der Grössen rechter Hand $= n - 1$ ist, wenn die Zahl der Unbekannten n genannt wird. Hierauf hat man

$$x = \frac{q}{-(aa)} + \frac{Q'}{-(bb,1)}\,\alpha_1 + \frac{Q''}{-(cc,2)}\,\alpha_1' + \frac{Q'''}{-(dd,3)}\,\alpha_1'' + \text{etc.}$$
$$x' = \frac{Q'}{-(bb,1)} + \frac{Q''}{-(cc,2)}\,\beta_1' + \frac{Q'''}{-(dd,3)}\,\beta_1'' + \text{etc.}$$
$$x'' = \frac{Q''}{-(cc,2)} + \frac{Q'''}{-(dd,3)}\,\gamma_1'' + \text{etc.}$$
$$x''' = \frac{Q'''}{-(dd,3)} + \text{etc.}$$

etc.

Diese Ausdrücke geben zu erkennen, dass die Endformeln für die Unbekannten denen für die Hülfsgrössen α_1, α_1', β_1', etc. analog sind, und dass diese letzteren endlich in die Unbekannten selbst übergehen.

Hat man nämlich nur zwei Gleichungen mit eben so vielen Unbekannten, so erhält man die Werthe dieser, wenn man

$$\alpha'_1 = x$$
$$\beta'_1 = x'$$

macht, und in den obigen Ausdrücken für diese Hülfsgrössen

q für (ac)

und Q' für $(bc,1)$

substituiert. Sind drei Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben, so wird

$$\alpha''_1 = x$$
$$\beta''_1 = x'$$
$$\gamma''_1 = x''$$

wenn man in die betreffenden Ausdrücke

q für (ad)

Q' für $(bd,1)$

Q'' für $(cd,2)$

substituiert, u. s. f. für mehr Gleichungen und Unbekannte.

Für die Grössen $(bb,1)$, $(cc,2)$, etc. enthält die vorstehende Auflösung doppelte Ausdrücke, von welchen man, strenge genommen, nur die einen anzuwenden braucht, berechnet man aber beide Ausdrücke einer jeden dieser Grössen, so erhält man eine schätzbare Controlle über die Richtigkeit der vorhergehenden Rechnung.

Ich bemerke ferner, dass in der vorstehenden Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen die Gaussische Auflösung des in der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden Systems von linearischen Gleichungen als specieller Fall enthalten ist. Macht man nämlich $(ba) = (ab)$, etc., so sieht man ohne Weiteres, dass die Grössen der zweiten Columne mit denen der ersten identisch werden, und diese werden alsdann mit den Hülfsgrössen identisch, welche in der genannten Gaussischen Auflösung vorkommen, obgleich in der äusseren Form eine kleine Verschiedenheit statt findet, die darin besteht, dass Gauss die Grössen $(cc,2)$, $(cd,2)$, etc. $(dd,3)$, etc. von den Grössen $(bc,1)$, $(bd,1)$, etc. $(cd,2)$, etc. abhängig gemacht hat, während statt dessen hier diese Grössen in Function der Coefficienten (bc), (bd), etc. (cd), etc. der gegebenen Gleichungen dargestellt sind.

8.

Es trifft sich zuweilen, dass man ein vorgegebenes System von linearischen Gleichungen unbestimmt auflösen muss, sei es, um den

Einfluss der einzelnen bekannten Glieder auf die Werthe der Unbekannten zu ermessen, oder aus andern Ursachen. Die unbestimmte Auflösung ergiebt sich fast unmittelbar aus der vorstehenden bestimmten, indem die darin vorkommenden Hülfsgrössen α, α', β', etc. α_1, α'_1, β'_1, etc. die Coefficienten der unbestimmten Auflösung auf eine einfache Weise bilden helfen. Die Berechnung der Q', Q'', etc. genannten Grössen wird nun überflüssig und braucht also nicht ausgeführt zu werden. Die Substitution der vorstehenden Ausdrücke dieser Grössen in die Ausdrücke für x, x', etc. giebt sogleich

$$\begin{aligned}
x &= (AA)\,q + (AB)\,q' + (AC)\,q'' + (AD)\,q''' + \text{etc.}\\
x' &= (BA)\,q + (BB)\,q' + (BC)\,q'' + (BD)\,q''' + \text{etc.}\\
x'' &= (CA)\,q + (CB)\,q' + (CC)\,q'' + (CD)\,q''' + \text{etc.}\\
x''' &= (DA)\,q + (DB)\,q' + (DC)\,q'' + (DD)\,q''' + \text{etc.}\\
&\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
(AA) &= \frac{1}{-(aa)} + \frac{\alpha}{-(bb,1)}\,\alpha_1 + \frac{\alpha'}{-(cc,2)}\,\alpha'_1 + \frac{\alpha''}{-(dd,3)}\,\alpha''_1 + \text{etc.}\\
(BA) &= \frac{\alpha}{-(bb,1)} + \frac{\alpha'}{-(cc,2)}\,\beta'_1 + \frac{\alpha''}{-(dd,3)}\,\beta''_1 + \text{etc.}\\
(CA) &= \frac{\alpha'}{-(cc,2)} + \frac{\alpha''}{-(dd,3)}\,\gamma''_1 + \text{etc.}\\
(DA) &= \frac{\alpha''}{-(dd,3)} + \text{etc.}\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(AB) &= \frac{1}{-(bb,1)}\,\alpha_1 + \frac{\beta'}{-(cc,2)}\,\alpha'_1 + \frac{\beta''}{-(dd,3)}\,\alpha''_1 + \text{etc.}\\
(BB) &= \frac{1}{-(bb,1)} + \frac{\beta'}{-(cc,2)}\,\beta'_1 + \frac{\beta''}{-(dd,3)}\,\beta''_1 + \text{etc.}\\
(CB) &= \frac{\beta'}{-(cc,2)} + \frac{\beta''}{-(dd,3)}\,\gamma''_1 + \text{etc.}\\
(DB) &= \frac{\beta''}{-(dd,3)} + \text{etc.}\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(AC) &= \frac{1}{-(cc,2)}\,\alpha'_1 + \frac{\gamma''}{-(dd,3)}\,\alpha''_1 + \text{etc.}\\
(BC) &= \frac{1}{-(cc,2)}\,\beta'_1 + \frac{\gamma''}{-(dd,3)}\,\beta''_1 + \text{etc.}\\
(CC) &= \frac{1}{-(cc,2)} + \frac{\gamma''}{-(dd,3)}\,\gamma''_1 + \text{etc.}\\
(DC) &= \frac{1}{-(dd,3)} + \text{etc.}\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$(AD) = \frac{1}{-(dd,3)}\alpha_1'' + \text{etc.}$$
$$(BD) = \frac{1}{-(dd,3)}\beta_1'' + \text{etc.}$$
$$(CD) = \frac{1}{-(dd,3)}\gamma_1'' + \text{etc.}$$
$$(DD) = \frac{1}{-(dd,3)} \quad + \text{etc.}$$
etc. etc.

wodurch die unbestimmte Auflösung ausgeführt ist. Wenn man in diesen Ausdrücken die Bedingungen

$$\alpha = \alpha_1\,;\quad \alpha' = \alpha_1'\,;\quad \beta = \beta_1\,;\quad \text{etc.}$$

einführt, die, wie man gesehen hat, unmittelbare Folge der Bedingungen $(ba) = (ab)$, etc. sind, so ergeben sich sofort die Gaussischen Ausdrücke für die Gewichte der Unbekannten, bei Anwendung auf die Methode der kleinsten Quadrate.

9.

Die im Vorhergehenden enthaltene Auflösung unserer Aufgabe ist so allgemein wie möglich, indem sie die ausgeführte unbestimmte Auflösung des gegebenen Systems von Gleichungen enthält. Will man aber von dieser letzteren absehen, und nur die bestimmte Auflösung haben, dann lassen sich die Ausdrücke des Art. 7. noch vereinfachen. Man kann nämlich alsdann statt der Hülfsgrössen α, α', β', etc. α_1'', α_1', β_1', etc., deren Ausdrücke zum grösseren Theil aus mehreren Gliedern bestehen, andere einführen, die durch eingliederige Ausdrücke gegeben werden, und deren logarithmische Berechnung daher wenige Mühe erfordert.

Wir könnten die nun zu entwickelnden Ausdrücke mit wenig Mühe aus denen des Art. 7. erhalten, allein da ihre directe Ableitung aus den gegebenen Gleichungen auch wenig Arbeit verursacht, und kürzer ist wie die obige Ableitung der allgemeineren Ausdrücke des Art. 7., so will ich wieder von dem gegebenen System von Gleichungen ausgehen, und diese hier zu mehrerer Deutlichkeit wiederholen.

$$\begin{aligned}
(aa)\,x + (ab)\,x' + (ac)\,x'' + (ad)\,x''' + \text{etc.} + q &= 0\\
(ba)\,x + (bb)\,x' + (bc)\,x'' + (bd)\,x''' + \text{etc.} + q' &= 0\\
(ca)\,x + (cb)\,x' + (cc)\,x'' + (cd)\,x''' + \text{etc.} + q'' &= 0\\
(da)\,x + (db)\,x' + (dc)\,x'' + (dd)\,x''' + \text{etc.} + q''' &= 0
\end{aligned}$$
etc. etc.

Multiplicieren wir hier die erste Gleichung mit β, und addieren sie zur zweiten; multiplicieren wir ferner die erste mit γ, und addieren sie zur dritten; multiplicieren wir ferner die erste mit δ, und addieren sie zur vierten, u. s. f., bis alle gegebenen Gleichungen erschöpft sind. Setzen wir nun in jeder der so erhaltenen Gleichungen den Coefficienten von x gleich Null, so ergeben sich zur Bestimmung der unbestimmten Factoren β, γ, δ etc. folgende Gleichungen:

$$(aa)\,\beta + (ba) = 0$$
$$(aa)\,\gamma + (ca) = 0$$
$$(aa)\,\delta + (da) = 0$$
$$\text{etc.}$$

Führen wir ausserdem die folgenden Hülfsgrössen ein:

$$(ab)\,\beta + (bb) = (bb,1);\ (ab)\,\gamma + (cb) = (cb,1);\ (ab)\,\delta + (db) = (db,1);$$
$$(ac)\,\beta + (bc) = (bc,1);\ (ac)\,\gamma + (cc) = (cc,1);\ (ac)\,\delta + (dc) = (dc,1);\ \text{etc.}$$
$$(ad)\,\beta + (bd) = (bd,1);\ (ad)\,\gamma + (cd) = (cd,1);\ (ad)\,\delta + (dd) = (dd,1);$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$q\beta + q' = Q' \ ;\ q\gamma + q'' = Q'_1 \ ;\ q\delta + q''' = Q'_{11},$$

so erhalten wir folgende Gleichungen ohne x:

$$(bb,1)\,x' + (bc,1)\,x'' + (bd,1)\,x''' + \text{etc.} + Q' = 0$$
$$(cb,1)\,x' + (cc,1)\,x'' + (cd,1)\,x''' + \text{etc.} + Q'_1 = 0$$
$$(db,1)\,x' + (dc,1)\,x'' + (dd,1)\,x''' + \text{etc.} + Q'_{11} = 0$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

deren Anzahl $n - 1$ ist, wenn das gegebene System aus n Gleichungen besteht.

Multiplicieren wir nun die erste dieser Gleichungen mit der unbestimmten Grösse $(\gamma,1)$, und addieren sie zur zweiten; multiplicieren wir ferner die erste mit $(\delta,1)$, und addieren sie zur dritten; u. s. w., so ergeben sich, nachdem man

$$(bb,1)\,(\gamma,1) + (cb,1) = 0$$
$$(bb,1)\,(\delta,1) + (db,1) = 0$$
$$\text{etc.}$$

gemacht, und

$$(bc,1)\,(\gamma,1) + (cc,1) = (cc,2);\ (bc,1)\,(\delta,1) + (dc,1) = (dc,2);\ \text{etc.}$$
$$(bd,1)\,(\gamma,1) + (cd,1) = (cd,2);\ (bd,1)\,(\delta,1) + (dd,1) = (dd,2);$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$Q'\,(\gamma,1) + Q'_1 = Q'' \ ;\quad Q'\,(\delta,1) + Q'_{11} = Q''_1 \ ;$$

gesetzt hat,

$$(cc,2)\, x'' + (cd,2)\, x''' + \text{etc.} + Q'' = 0$$
$$(dc,2)\, x'' + (dd,2)\, x''' + \text{etc.} + Q''_1 = 0$$
$$\text{etc.}$$

die weder x noch x' enthalten, und deren Anzahl $n - 2$ ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man ferner

$$(cc,2)\,(\delta,2) + (dc,2) = 0$$
$$\text{etc.}$$
$$(cd,2)\,(\delta,2) + (dd,2) = (dd,3);$$
$$\text{etc.}$$
$$Q''\,(\delta,2) + Q''_1 = Q''';$$
$$(dd,3)\, x''' + \text{etc.} + Q''' = 0$$
$$\text{etc.}$$

u. s. w., bis man zuletzt auf Eine Gleichung mit Einer Unbekannten kommt. Hiermit haben wir die verlangte Auflösung schon erhalten.

10.

Durch einfache Substitution der Werthe von $(cc,1)$, $(cd,1)$, etc. $(dc,1)$, $(dd,1)$, etc. etc. in die betreffenden Ausdrücke können wir diese Grössen eliminieren, und dadurch die Zahl der ähnlich bezeichneten Grössen auf die möglichst geringe reducieren. Es ergeben sich somit für die bestimmte Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen folgende zu berechnende Formeln, die die zweite Auflösung ausmachen.

$$\beta = \frac{(ba)}{-(aa)};\quad \gamma = \frac{(ca)}{-(aa)};\quad \delta = \frac{(da)}{-(aa)};\quad \text{etc.}$$
$$(ab)\,\beta + (bb) = (bb,1)$$
$$(ac)\,\beta + (bc) = (bc,1);\qquad (ab)\,\gamma + (cb) = (cb,1)$$
$$(ad)\,\beta + (bd) = (bd,1);\qquad (ab)\,\delta + (db) = (db,1)$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$
$$q\beta + q' = Q'$$

$$(\gamma,1) = \frac{(cb,1)}{-(bb,1)};\quad (\delta,1) = \frac{(db,1)}{-(bb,1)};\quad \text{etc.}$$
$$(ac)\,\gamma + (bc,1)\,(\gamma,1) + (cc) = (cc,2)$$
$$(ad)\,\gamma + (bd,1)\,(\gamma,1) + (cd) = (cd,2);\ (ac)\,\delta + (bc,1)\,(\delta,1) + (dc) = (dc,2)$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$
$$q\gamma + Q'\,(\gamma,1) + q'' = Q''$$

$$(\delta,2) = \frac{(dc,2)}{-(cc,2)};\quad \text{etc.}$$
$$(ad)\,\delta + (bd,1)\,(\delta,1) + (cd,2)\,(\delta,2) + (dd) = (dd,3)$$
$$\text{etc.}$$
$$q\delta + Q'\,(\delta,1) + Q''\,(\delta,2) + q''' = Q'''$$

---

etc.

$$x = \frac{(ab)}{-(aa)} x' + \frac{(ac)}{-(aa)} x'' + \frac{(ad)}{-(aa)} x''' + \text{etc.} + \frac{q}{-(aa)}$$

$$x' = \frac{(bc,1)}{-(bb,1)} x'' + \frac{(bd,1)}{-(bb,1)} x''' + \text{etc.} + \frac{Q'}{-(bb,1)}$$

$$x'' = \frac{(cd,2)}{-(cc,2)} x''' + \text{etc.} + \frac{Q''}{-(cc,2)}$$

$$x''' = \text{etc.} + \frac{Q'''}{-(dd,3)}$$

etc.

Man erkennt leicht, dass alle mit zwei Buchstaben und einer angehängten Zahl, so wie Q', Q'', etc. bezeichneten Grössen mit den gleichbezeichneten Grössen der ersten Auflösung identisch sind. Man sieht ferner, wie im Art. 9. angezeigt wurde, dass die in der ersten Auflösung mit α, α', β', etc. α_1, α_1', β_1', etc. bezeichneten Hülfsgrössen, hier durch β, γ, etc. $(\gamma,1)$, etc. ersetzt sind, die durch lauter eingliedrige Ausdrücke gegeben sind. Wenn man in den Formeln der vorstehenden Auflösung die Bedingungen $(ba) = (ab)$, etc. einführt, so werden diese mit der oft erwähnten Gaussischen Auflösung völlig identisch.

11.

Obgleich in der eben abgeleiteten zweiten Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen die unbestimmte Auflösung nicht ausdrücklich enthalten ist, so können die Coefficienten derselben doch daraus berechnet werden, ohne dass man die Hülfsgrössen α_1, α_1', β_1', etc. zu berechnen nöthig hat. Dieses werde ich jetzt zeigen.

Es ist an sich klar, dass man die Coefficienten von q der unbestimmten Auflösung, d. i. in Zeichen des Art. 8. (AA), (BA), (CA), etc. durch die bestimmte Auflösung bekommen muss, wenn man in dieser $q = 1$, $q' = 0$, $q'' = 0$, etc. macht. Ferner muss man die Coefficienten von q', d. i. (AB), (BB), (CB), etc. bekommen, wenn man in der bestimmten Auflösung $q = 0$, $q' = 1$, $q'' = 0$, etc. macht, u. s. w. Wenden wir diesen Satz auf die Auflösung des vor. Art. an, so sieht man, dass bloss q, Q', Q'', etc. andere Werthe, wie die dort angegebenen, annehmen, während alle anderen Hülfsgrössen unverändert bleiben. Setzen wir daher nach und nach $q = 1$, $q' = 1$, $q'' = 1$, etc. und zugleich alle anderen q gleich Null, so bekommen wir für die unbestimmte Auflösung folgende zu berechnende Ausdrücke:

$$R = \beta$$
$$R' = \gamma + (\gamma,1)\,R$$
$$R'' = \delta + (\delta,1)\,R + (\delta,2)\,R'$$
etc.

$$(A)\left\{\begin{array}{l}
(AA) = -\frac{(ab)}{(aa)}\,(BA) + -\frac{(ac)}{(aa)}\,(CA) + -\frac{(ad)}{(aa)}\,(DA) + \text{etc.} + \frac{1}{-(aa)} \\
\qquad (BA) = -\frac{(bc,1)}{(bb,1)}\,(CA) + -\frac{(bd,1)}{(bb,1)}\,(DA) + \text{etc.} + \frac{R}{-(bb,1)} \\
\qquad\qquad (CA) = -\frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,(DA) + \text{etc.} + \frac{R'}{-(cc,2)} \\
\qquad\qquad\qquad (DA) = \text{etc.} + \frac{R''}{-(dd,3)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}\right.$$

Ferner

$$S = (\gamma,1)$$
$$S' = (\delta,1) + (\delta,2)\,S$$
etc.

$$(B)\left\{\begin{array}{l}
(AB) = -\frac{(ab)}{(aa)}\,(BB) + -\frac{(ac)}{(aa)}\,(CB) + -\frac{(ad)}{(aa)}\,(DB) + \text{etc.} \\
\qquad (BB) = -\frac{(bc,1)}{(bb,1)}\,(CB) + -\frac{(bd,1)}{(bb,1)}\,(DB) + \text{etc.} + \frac{1}{-(bb,1)} \\
\qquad\qquad (CB) = -\frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,(DB) + \text{etc.} + \frac{S}{-(cc,2)} \\
\qquad\qquad\qquad (DB) = \text{etc.} + \frac{S'}{-(dd,3)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}\right.$$

Ferner

$$T = (\delta,2)$$

$$(C)\left\{\begin{array}{l}
(AC) = -\frac{(ab)}{(aa)}\,(BC) + -\frac{(ac)}{(aa)}\,(CC) + -\frac{(ad)}{(aa)}\,(DC) + \text{etc.} \\
\qquad (BC) = -\frac{(bc,1)}{(bb,1)}\,(CC) + -\frac{(bd,1)}{(bb,1)}\,(DC) + \text{etc.} \\
\qquad\qquad (CC) = -\frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,(DC) + \text{etc.} + \frac{1}{-(cc,2)} \\
\qquad\qquad\qquad (DC) = \text{etc.} + \frac{T}{-(dd,3)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}\right.$$

Ferner

$$U = \text{etc.}$$

$$(D)\left\{\begin{array}{l}
(AD) = -\frac{(ab)}{(aa)}\,(BD) + -\frac{(ac)}{(aa)}\,(CD) + -\frac{(ad)}{(aa)}\,(DD) + \text{etc.} \\
\qquad (BD) = -\frac{(bc,1)}{(bb,1)}\,(CD) + -\frac{(bd,1)}{(bb,1)}\,(DD) + \text{etc.} \\
\qquad\qquad (CD) = -\frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,(DD) + \text{etc.} \\
\qquad\qquad\qquad (DD) = \text{etc.} + \frac{1}{-(dd,3)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}\right.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die hier eingeführten Grössen R, R', R'', etc. resp. mit α, α', α'', etc. S, S', etc. resp. mit β', β'', etc. T, etc. resp. mit γ'', etc. identisch sind.

Führt man hier die Bedingungen $(ba) = (ab)$, etc. ein, so wird man auf das Verfahren hingeführt, welches ich in Nr. 192. der Astron. Nachr. zur Berechnung der Gewichte gegeben habe. In diesem Falle wird die Berechnung, wie ich am angef. Orte gezeigt habe, bedeutend einfacher, wie in dem hier behandelten allgemeinen Falle, Es wird nämlich die Berechnung der Hülfsgrössen R, R', R'', etc. S, S' etc., T, etc. überflüssig. Um dieses hier zu zeigen, werden wir annehmen, dass die Zahl der Unbekannten vier sei; die Folgerungen, die wir hieraus ziehen, gelten, wie leicht einzusehen ist, für jede beliebige Anzahl von Unbekannten.

Nehmen wir nun das vorstehende System von Gleichungen (D) zuerst vor. Dieses giebt uns ungeändert die Werthe der Grössen

$$(DD),\ (CD),\ (BD) \text{ und } (AD).$$

Da aber nun, wie die Ausdrücke des Art. 8. nach Einführung der Bedingungen $(ba) = (ab)$, etc. zeigen, $(DC) = (CD)$ ist, so brauchen wir die letzte Gleichung des Systems (C) nicht zu berücksichtigen, sondern können sogleich den eben gefundenen Werth von (CD) für (DC) in die drei ersten Gleichungen (C) substituieren. Diese geben somit unabhängig von den Hülfsgrössen T, etc. die Coefficienten

$$(CC),\ (BC) \text{ und } (AC).$$

Da nun aber $(CB) = (BC)$ und $(DB) = (BD)$ ist, so können wir diese, deren Werthe wir schon erhalten haben, resp. für (CB) und (DB) in die beiden ersten Gleichungen (B) substituieren, welche uns nun, ohne dass wir S, S', etc. zu kennen brauchen, die Coefficienten

$$(BB) \text{ und } (AB)$$

geben werden. Endlich giebt die Substitution von den schon gefundenen Werthen von (AB), (AC) und (AD) resp. für (BA), (CA) und (DA) in die erste der Gleichungen (A) den Werth des Coefficienten

$$(AA)$$

ohne die Kenntniss von R, R', R'', etc. vorauszusetzen.

Das Verhalten dieser beiden Auflösungen zu einander bei der Anwendung derselben wird man am sichersten aus dem dieser Abhandlung zuzufügenden ausführlichen numerischen Beispiel erkennen.

12.

Es ist noch der Fall zu erörtern übrig, wo in dem gegebenen System von Gleichungen Eine Gleichung oder mehrere in den übrigen enthalten ist, oder diesen widerspricht, und es also unmöglich ist, die Unbekannten aus diesem System von Gleichungen zu bestimmen. Es kommt darauf an, die Kennzeichen anzugeben, wodurch dieses in den beiden vorstehenden Auflösungen sich ausspricht, so wie die Bedingungsgleichungen selbst zu finden.

Bezeichnen wir die n Gleichungen (1) zur Abkürzung mit $v=0$; $v'=0$; $v''=0$; $v'''=0$, etc. und n von den Unbekannten unabhängige Factoren mit f; f'; f''; f'''; etc., so besteht bekanntlich das analytische Kriterion des Umstandes, dass eine der gegebenen Gleichungen in den übrigen enthalten ist, oder ihnen widerspricht, darin, dass sich für die Factoren f; f'; etc. ein System von Werthen finden lässt, wodurch

$$fv + f'v' + f''v'' + f'''v''' + \text{etc.} = 0 \text{ oder } = \text{constante} \ldots . \quad (F)$$

wird, und wenn keine der gegebenen Gleichungen in den übrigen enthalten ist, oder ihnen widerspricht, so ist eine Gleichung wie (F) unmöglich. Wenn zwei oder mehrere der gegebenen Gleichungen in den übrigen enthalten sind, oder ihnen widersprechen, so lassen sich eben so viele Systeme von Werthen von f; f'; etc. finden, deren jedes eine Bedingungsgleichung wie (F) bildet.

Da das Vorhandensein von mehreren Bedingungsgleichungen (F) die Sache in Bezug auf die Unauflösbarkeit der gegebenen Gleichungen nicht ändert, so brauchen wir im Folgenden nur den Fall zu betrachten, wo eine Bedingungsgleichung vorhanden ist.

Nehmen wir zuerst an, dass von den Factoren f; f'; etc. keiner $=0$ ist; substituieren wir für v; v'; etc. die Gleichungen (1) in (F) und setzen die Coefficienten einer jeden Unbekannten, wie für das Erfülltsein von (F) nothwendig ist, gleich Null. Dadurch erhalten wir die folgenden n Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
(aa)\,f + (ba)\,f' + (ca)\,f'' + (da)\,f''' + \text{etc.} = 0 \\
(ab)\,f + (bb)\,f' + (cb)\,f'' + (db)\,f''' + \text{etc.} = 0 \\
(ac)\,f + (bc)\,f' + (cc)\,f'' + (dc)\,f''' + \text{etc.} = 0 \\
(ad)\,f + (bd)\,f' + (cd)\,f'' + (dd)\,f''' + \text{etc.} = 0 \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}\right\} \quad (G)$$

Vergleichen wir diese mit den Gleichungen (2), (3), (4), etc., so sehen wir, dass die ersten $n-1$ derselben mit dem $(n-1)^{\text{ten}}$ oder letzten System von Hülfsgleichungen identisch sind, die in der ersten obigen Auflösung der Gleichungen (1) vorkommen. Die Verhältnisse $\frac{f}{f^{n-1}}$, $\frac{f'}{f^{n-1}}$, etc. sind daher identisch mit den Hülfsgrössen $\alpha^{(n-2)}$, $\beta^{(n-2)}$, etc. und werden durch den Gang der Auflösung unzweideutig bestimmt. Die linke Seite der vorstehenden n^{ten} oder letzten Gleichung wird aber nun mit der linken Seite des Ausdrucks für $(qq, n-1)$ identisch, wenn wir hiermit die letzte der Grössen $(bb,1)$; $(cc,2)$; $(dd,3)$; etc. bezeichnen. Wir erhalten also $(qq, n-1) = 0$, und da die so bezeichneten Grössen in beiden obigen Auflösungen identisch sind, so ist die Gleichung

$$(qq, n-1) = 0$$

in beiden Auflösungen das Kennzeichen des Falles, den wir hier betrachten.

Wenn aber einer oder mehrere der Factoren f; f'; etc. gleich Null sind, so kann sich ereignen, dass nicht $(qq, n-1)$, sondern irgend eine der vorhergehenden Grössen dieser Gattung, ja selbst die erste derselben $(bb,1) = 0$ wird.

Seien z. B. ausser f und f' alle f gleich Null, dann gehen die Gleichungen (G) in folgende über:

$$\begin{aligned}(aa)\,f + (ba)\,f' &= 0\\(ab)\,f + (bb)\,f' &= 0\\(ac)\,f + (bc)\,f' &= 0\\(ad)\,f + (bd)\,f' &= 0\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

durch deren Vergleichung mit den Gleichungen (2) man erkennt, dass

$$\alpha = \frac{f}{f'},\ (bb,1) = 0,\ (bc,1) = 0,\ (bd,1) = 0,\ \text{etc.}$$

Wären statt dessen f, f', f'' die einzigen Factoren, die nicht Null sind, so würde man eben so finden, dass die vorstehenden nicht statt finden, dagegen aber

$$\alpha' = \frac{f}{f''},\ \beta' = \frac{f'}{f''},\ (cc,2) = 0,\ (cd,2) = 0,\ \text{etc.}$$

wäre, u. s. w., wenn von einem gewissen f an alle folgenden f Null sind.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten übrig, wo in der Reihe f; f'; etc. einer oder mehrere Null sind, ohne dass alle folgenden auch Null sind.

Seien alle auf $f^{(i)}$ folgenden f gleich Null, und ausserdem ein beliebiger Factor, z. B. $f'' = 0$, dann gehen die Gleichungen (G) in die folgenden über:

$$\left.\begin{aligned}
&(aa)\, f + (ba)\, f' + (da)\, f''' + \text{etc.} + (ka)\, f^{(i)} = 0\\
&(ab)\, f + (bb)\, f' + (db)\, f''' + \text{etc.} + (kb)\, f^{(i)} = 0\\
&(ac)\, f + (bc)\, f' + (dc)\, f''' + \text{etc.} + (kc)\, f^{(i)} = 0\\
&(ad)\, f + (bd)\, f' + (dd)\, f''' + \text{etc.} + (kd)\, f^{(i)} = 0\\
&\qquad\text{etc} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}\right\}(K)$$

deren Anzahl wie immer n ist. Die Hülfsgleichungen der ersten Auflösung, mit welchen die obigen Gleichungen verglichen werden müssen, sind nun die folgenden:

$$\begin{aligned}
&(aa)\, \alpha^{(i-1)} + (ba)\, \beta^{(i-1)} + (ca)\, \gamma^{(i-1)} + (da)\, \delta^{(i-1)} + \text{etc.} + (ka) = 0\\
&(ab)\, \alpha^{(i-1)} + (bb)\, \beta^{(i-1)} + (cb)\, \gamma^{(i-1)} + (db)\, \delta^{(i-1)} + \text{etc.} + (kb) = 0\\
&(ac)\, \alpha^{(i-1)} + (bc)\, \beta^{(i-1)} + (cc)\, \gamma^{(i-1)} + (dc)\, \delta^{(i-1)} + \text{etc.} + (kc) = 0\\
&(ad)\, \alpha^{(i-1)} + (bd)\, \beta^{(i-1)} + (cd)\, \gamma^{(i-1)} + (dd)\, \delta^{(i-1)} + \text{etc.} + (kd) = 0\\
&\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

deren Anzahl i ist, wozu noch die folgenden kommen:

$$\begin{aligned}
&(ak)\, \alpha^{(i-1)} + (bk)\, \beta^{(i-1)} + (ck)\, \gamma^{(i-1)} + (dk)\, \delta^{(i-1)} + \text{etc.} + (kk) = (kk,i)\\
&(al)\, \alpha^{(i-1)} + (bl)\, \beta^{(i-1)} + (cl)\, \gamma^{(i-1)} + (dl)\, \delta^{(i-1)} + \text{etc.} + (kl) = (kl,i)\\
&\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned} \quad (L)$$

deren Anzahl $n - i$ ist.

Da diese beiden Systeme von Gleichungen (K) und (L) neben einander statt finden müssen, so dividiere ich die Gleichungen (K) durch $f^{(i)}$ und ziehe sie einzeln genommen von den Gleichungen (L) ab; hierdurch ergeben sich folgende:

$$\begin{aligned}
&(aa)\left\{\alpha^{(i-1)} - \tfrac{f}{f^{(i)}}\right\} + (ba)\left\{\beta^{(i-1)} - \tfrac{f'}{f^{(i)}}\right\} + (ca)\,\gamma^{(i-1)} + (da)\left\{\delta^{(i-1)} - \tfrac{f'''}{f^{(i)}}\right\} + \text{etc.} = 0\\
&(ab)\left\{\alpha^{(i-1)} - \tfrac{f}{f^{(i)}}\right\} + (bb)\left\{\beta^{(i-1)} - \tfrac{f'}{f^{(i)}}\right\} + (cb)\,\gamma^{(i-1)} + (db)\left\{\delta^{(i-1)} - \tfrac{f'''}{f^{(i)}}\right\} + \text{etc.} = 0\\
&(ac)\left\{\alpha^{(i-1)} - \tfrac{f}{f^{(i)}}\right\} + (bc)\left\{\beta^{(i-1)} - \tfrac{f'}{f^{(i)}}\right\} + (cc)\,\gamma^{(i-1)} + (dc)\left\{\delta^{(i-1)} - \tfrac{f'''}{f^{(i)}}\right\} + \text{etc.} = 0\\
&(ad)\left\{\alpha^{(i-1)} - \tfrac{f}{f^{(i)}}\right\} + (bd)\left\{\beta^{(i-1)} - \tfrac{f'}{f^{(i)}}\right\} + (cd)\,\gamma^{(i-1)} + (dd)\left\{\delta^{(i-1)} - \tfrac{f'''}{f^{(i)}}\right\} + \text{etc.} = 0\\
&\qquad\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}\\
&(ak)\left\{\alpha^{(i-1)} - \tfrac{f}{f^{(i)}}\right\} + (bk)\left\{\beta^{(i-1)} - \tfrac{f'}{f^{(i)}}\right\} + (ck)\,\gamma^{(i-1)} + (dk)\left\{\delta^{(i-1)} - \tfrac{f'''}{f^{(i)}}\right\} + \text{etc.} = (kk,i)\\
&(al)\left\{\alpha^{(i-1)} - \tfrac{f}{f^{(i)}}\right\} + (bl)\left\{\beta^{(i-1)} - \tfrac{f'}{f^{(i)}}\right\} + (cl)\,\gamma^{(i-1)} + (dl)\left\{\delta^{(i-1)} - \tfrac{f'''}{f^{(i)}}\right\} + \text{etc.} = (kl,i)\\
&\qquad\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

welche sogleich zu erkennen geben, dass gleichwie in den vorher betrachteten Fällen

$$\alpha^{(i-1)} = \frac{f}{f^{(i)}};\ \beta^{(i-1)} = \frac{f'}{f^{(i)}};\ \gamma^{(i-1)} = 0 = \frac{f''}{f^{(i)}};\ \delta^{(i-1)} = \frac{f'''}{f^{(i)}};\ \text{etc.}$$

$$(kk,i) = 0;\ (kl,i) = 0;\ \text{etc.}$$

und es ist aus dieser Analyse zugleich ersichtlich, dass wir auf dasselbe Resultat kommen müssen, wie viele, und welche der Factoren f auch vor $f^{(i)}$ gleich Null seien.

13.

Die Auseinandersetzungen des vorigen Art. erschöpfen alle möglichen Fälle, die die Bedingungsgleichung (F) darbieten kann, und enthalten somit den Beweis der folgenden drei Sätze.

1ster Satz.

«Wenn man bei der Auflösung irgend eines Systems von linearischen «Gleichungen nach einer der beiden hier vorgetragenen Methoden findet, «dass in irgend einer der folgenden Gruppen

$$(bb,1),\ (bc,1),\ (bd,1),\ \text{etc.}$$

oder

$$(cc,2),\ (cd,2),\ \text{etc.}$$

oder

$$(dd,3),\ \text{etc.}$$

oder

$$\text{etc.}$$

«alle vorhandenen Grössen gleich Null werden, so ist eine der Glei«chungen des gegebenen Systems von Gleichungen in den übrigen ent«halten, oder widerspricht ihnen, und die Ermittelung der Unbekannten «aus diesem System daher unmöglich.»

2ter Satz.

«Wenn in der Bedingungsgleichung

$$fv + f'v' + \ldots + f^{(n-1)}v^{(n-1)} = 0 \text{ oder } = \text{constante},$$

«wo die gegebenen Gleichungen $v=0$, $v'=0$, etc. in derselben Reihen«folge aufgestellt sind, wie bei der Anwendung der Auflösung, alle auf «$f^{(p)}$ folgenden f gleich Null sind, so ist es immer die p^{te} der Gruppen

$$(bb,1),\ (bc,1),\ \text{etc.}$$
$$(cc,2)\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

«welche verschwindet, es mögen vor $f^{(p)}$ einer oder mehrere dieser «Factoren Null sein oder nicht.»

3ter Satz.

«Wenn es die q^{te} Gruppe ist, in welcher alle Grössen gleich Null «werden, so ist immer

$$f = f^{(q)}\alpha^{(q-1)};\ f' = f^{(q)}\beta^{(q-1)};\ \text{etc.}$$

«wodurch man also alle f bis auf einen derselben erhält, welcher der «Natur der Sache nach willkührlich bleibt.»

Es kann zuweilen Interesse haben, die Bedingungsgleichung, wenn solche statt findet, kennen zu lernen, um eine der darin concurrirenden Gleichungen auszuschliessen, und, wo möglich, durch eine andere, unabhängige zu ersetzen. Durch den dritten Satz kann man die Bedingungsgleichung ohne Weiteres aufstellen, wenn man sich der ersten Auflösung bedient hat; hat man aber die zweite angewandt, so muss man die Hülfsgrössen $\alpha^{(q-1)}$, $\beta^{(q-1)}$, etc. nach den betreffenden Formeln der ersten Auflösung besonders berechnen.

14.

Durch die in dem gegebenen System von Gleichungen grade statt findenden numerischen Werthe der Coefficienten kann sich ereignen, dass eine oder mehrere der Grössen $(bc,1)$, $(bd,1)$, etc. $(cd,2)$, etc. Null werden. Dieses hindert den Fortgang der Auflösung nicht im Geringsten. Es kann sich aber auch ereignen, dass eine der Grössen $(bb,1)$, $(cc,2)$, $(dd,3)$, etc. Null wird, ohne dass alle übrigen Grössen derselben Gruppe Null werden. Da in diesem Falle der eben bewiesene 1ste Satz nicht erfüllt ist, so bleibt vor der Hand unentschieden, ob eine der gegebenen Gleichungen in den übrigen enthalten ist, oder nicht. Das Verschwinden von einer der Grössen $(bb,1)$, $(cc,2)$, etc. wirkt aber hemmend auf die Fortführung der Auflösung, weil diese Grössen in den Nennern vorkommen. Es ist in diesem Falle nichts weiter zu thun, wie die angenommene Reihenfolge der Unbekannten zu verändern. Die einfachste Versetzung, die man vornehmen kann, ist die, dass man die Unbekannte, welcher irgend eine der in der betreffenden Gruppe nicht verschwindenden Hülfsgrössen angehört, in allen Gleichungen an die Stelle der Unbekannten setzt, welcher die erste verschwindende Hülfsgrösse zukommt, und diese Unbekannte an den Platz jener. Dadurch braucht in der bereits ausgeführten Rechnung nichts geändert zu werden, sondern bloss die Bezeichnung der vorher berechneten Hülfsgrössen und ihre Reihenfolge wird analog geändert. Z. B. wenn man gefunden hat

$$(cc,2) = 0$$
$$(cd,2) = 0$$
$$(ce,2) = k$$
$$(cf,2) = l$$

wo k und l numerische Werthe bedeuten, die von Null verschieden sind, so kann man entweder e an den Platz von c und umgekehrt, und also auch x^{IV} an den Platz von x'' und umgekehrt rücken, oder man kann diese Versetzung mit f und c, sowie mit x^{V} und x'' vornehmen. Es müssen ferner die analogen Versetzungen mit $(bc,1)$ und $(be,1)$ oder resp. $(bf,1)$, so wie mit (ac) und (ae) und resp. (af) vorgenommen werden.

Trifft man im weiteren Verlaufe der Rechnung wieder auf denselben Umstand, so nimmt man wieder die eben erklärte Versetzung vor, und so ferner. Gelangt man nun durch diese Verwechselung der zuerst angenommenen Reihenfolge der Unbekannten dahin, dass keine der betreffenden Hülfsgrössen verschwinden, so ist keine der gegebenen Gleichungen in den übrigen enthalten, und man bekommt die Werthe der unbekannten Grössen. Findet sich aber nach diesen Versetzungen, dass endlich alle Hülfsgrössen Einer Gruppe verschwinden, dann ist dem im vorigen Art. abgeleiteten 1sten Satze gemäss wenigstens eine der gegebenen Gleichungen in den übrigen enthalten, und es wäre vergebliche Mühe, die Auflösung durch die Vornahme anderer Versetzungen der Unbekannten weiter fortführen zu wollen. Man muss im Gegentheil die Bedingungsgleichung dem 3ten Satze gemäss suchen, eine der darin vorkommenden Gleichungen ausschliessen, und durch eine andere, unabhängige zu ersetzen suchen.

Schliesslich bemerke ich, dass es sich von selbst versteht, dass auch (aa) nicht gleich Null sein darf. Wenn man daher ein System von Gleichungen aufzulösen hat, in welchem Ein Coefficient oder mehrere derselben gleich Null sind, so darf man die Reihenfolge der Gleichungen oder der Unbekannten nicht so wählen, dass die erste Unbekannte in der ersten Gleichung nicht vorhanden ist, denn dadurch wäre $(aa) = 0$.

15.

Es scheint mir dienlich, die in den beiden zunächst vorhergehenden Artt. vorgetragenen Umstände durch einige Beispiele zu erläutern.

Seien als erstes Beispiel die gegebenen Gleichungen folgende:

$$\begin{aligned} x + x' + x'' + x''' - 4 &= 0 \\ x + x' - x'' + x''' - 2 &= 0 \\ x + x' + x'' - x''' - 2 &= 0 \\ x - x' - x'' + x''' &= 0 \end{aligned}$$

auf welches ich die zweite Auflösung, d. i. die Formeln des Art. 10. anwenden werde.

Wir bekommen hier

$$\beta = -1;\ \gamma = -1;\ \delta = -1;$$

und hiermit ergiebt sich

$$(bb,1) = 0$$
$$(bc,1) = -2$$
$$(bd,1) = 0$$

Da nicht alle Grössen dieser Gruppe gleich Null geworden sind, so ist noch unentschieden, ob alle gegebenen Gleichungen von einander unabhängig sind, oder nicht. Versetzen wir nun, den Vorschriften des vorigen Art. gemäss, die zweite und dritte Unbekannte nebst den dazu gehörigen Hülfsgrössen, so haben wir:

$$x + x'' + x' + x''' - 4 = 0$$
$$x - x'' + x' + x''' - 2 = 0$$
$$x + x'' + x' - x''' - 2 = 0$$
$$x - x'' - x' + x''' \qquad = 0$$
$$\beta = -1; \qquad \gamma = -1;\ \delta = -1$$
$$(bb,1) = -2;$$
$$(bc,1) = 0;\ (cb,1) = 0;$$
$$(bd,1) = 0;\ (db,1) = 2$$
$$Q' = 2$$

Hiemit findet sich

$$(\gamma,1) = 0;\ (\delta,1) = -1$$
$$(cc,2) = 0$$
$$(cd,2) = -2$$

Wir müssen also jetzt die dritte und vierte Unbekannte nebst den darauf sich beziehenden, bereits berechneten Hülfsgrössen in der Columne linker Hand verwechseln. (Die Hülfsgrössen in der Columne rechter Hand bleiben, wie leicht einzusehen ist, unverändert, wenn nicht die Reihenfolge der Gleichungen verändert wird.) Wir haben also jetzt

$$x + x'' + x''' + x' - 4 = 0$$
$$x - x'' + x''' + x' - 2 = 0$$
$$x + x'' - x''' + x' - 2 = 0$$
$$x - x'' + x''' - x' \qquad = 0$$

ferner

$$\beta = -1; \qquad \gamma = -1;\ \delta = -1$$
$$(bb,1) = -2;$$
$$(bc,1) = 0;\ (cb,1) = 0;$$
$$(bd,1) = 0;\ (db,1) = -2;$$
$$Q' = 2$$

$$(\gamma,1) = \quad 0; \quad (\delta,1) = -1$$
$$(cc,2) = -2;$$
$$(cd,2) = \quad 0; \quad (dc,2) = \quad 0$$
$$Q'' = \quad 2;$$

die mit den schon berechneten Hülfsgrössen, abgesehen von der Verwechselung der Bezeichnungen, identisch sind. Ferner ergiebt sich

$$(\delta,2) = \quad 0$$
$$(dd,3) = -2$$
$$Q''' = \quad 2$$

und hiemit

$$x = -x'' - x''' - x' + 4$$
$$x'' = 0x''' + 0x' + 1$$
$$x''' = 0x' + 1$$
$$x' = 1$$

also

$$x' = 1$$
$$x''' = 1$$
$$x'' = 1$$
$$x = 1$$

Als zweites Beispiel seien die gegebenen Gleichungen folgende:

$$x + 4\,x' + x'' + 2\,x''' - 8 = 0$$
$$x + 4\,x' + 2x'' - 2\,x''' - 5 = 0$$
$$-x + 10\,x' + x'' - 10\,x''' = 0$$
$$2\,x + 4\,x' - 2x'' + x''' - 5 = 0$$

die ich durch die erste Auflösung, oder die Formeln des Art. 7. behandeln werde.

Hier bekommen wir zuerst

$$\alpha = -1$$
$$(bb,1) = \quad 0$$
$$(bc,1) = \quad 1$$
$$(bd,1) = -4$$

Hier sind zwei Versetzungen möglich, weil zwei Grössen dieser Gruppe nicht gleich Null sind.

Versetzen wir die zweite und vierte Unbekannte, weil da-

durch, abgesehen vom algebraischen Zeichen, $(bb,1)$ möglichst gross wird*). Wir bekommen somit:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x & +\;2\,x''' & +\;x'' & +\;4x' & -\;6 & = 0 \\
x & -\;2\,x''' & +2x'' & +\;4x' & -\;5 & = 0 \\
-\;x & -10\,x''' & +\;x'' & +10x' & & = 0 \\
2\,x & +\;x''' & -2x'' & +\;4x' & -\;5 & = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlrl}
\alpha = & -1 & \alpha_1 = & -2 \\
(bb,1) = & -4 & (bb,1) = & -4 \\
(bc,1) = & 1 & (cb,1) = & -8 \\
(bd,1) = & 0 & (db,1) = & -3 \\
Q' = & 3 & & \\
\alpha' = & 3 & \alpha'_1 = & -\tfrac{3}{2} \\
\beta' = & -2 & \beta'_1 = & +\tfrac{1}{4} \\
(cc,2) = & 0 & & \\
(cd,2) = & 14 & &
\end{array}
$$

Wir müssen also nochmals die dritte und vierte Unbekannte nebst den dazu gehörigen Hülfsgrössen versetzen, wodurch wir erhalten:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x & +\;2\,x''' & +\;4\,x' & +\;x & -\;8 & = 0 \\
x & -\;2\,x''' & +\;4\,x' & +\;2\,x & -\;5 & = 0 \\
-\;x & -10\,x''' & +10\,x' & +\;x & & = 0 \\
2\,x & +\;x''' & +\;4\,x' & -\;2\,x & -\;5 & = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlrl}
\alpha = & -1 & \alpha_1 = & -2 \\
(bb,1) = & -4 & (bb,1) = & -4 \\
(bc,1) = & 0 & (cb,1) = & -8 \\
(bd,1) = & 1 & (db,1) = & -3 \\
Q' = & 3 & & \\
\alpha' = & 3 & \alpha'_1 = & -4 \\
\beta' = & -2 & \beta'_1 = & 0 \\
(cc,2) = & 14 & (cc,2) = & 14 \\
(cd,2) = & 0 & (dc,2) = & -4 \\
Q'' = & -14 & &
\end{array}
$$

*) Die Divisoren $(bb,1)$, $(cc,2)$, etc. möglichst gross zu machen, ist, wenn auch nicht in diesem Beispiel, doch in den am häufigsten vorkommenden Fällen, wo die Coefficienten der gegebenen Gleichungen durch Decimalbrüche ausgedrückte Irrationalzahlen sind, von wesentlichem Vortheil für die sichere Ausführung der Rechnung. Man kann diesen Vortheil immer durch Versetzung der Unbekannten während der Rechnung erlangen, ohne diese dadurch zu verlängern.

$$\alpha'' = -\tfrac{11}{28} \qquad \alpha''_1 = -\tfrac{3}{2}$$
$$\beta'' = -\tfrac{37}{28} \qquad \beta''_1 = +\tfrac{1}{4}$$
$$\gamma'' = +\tfrac{2}{7} \qquad \gamma''_1 = 0$$
$$(dd,3) = +\tfrac{19}{4} \qquad (dd,3) = -\tfrac{19}{4}$$
$$Q''' = +\tfrac{19}{4}$$

und hieraus
$$x = 8 - \tfrac{3}{2} - 4 - \tfrac{3}{2} = 1$$
$$x''' = \tfrac{3}{4} + 0 + \tfrac{1}{4} = 1$$
$$x' = 1 + 0 = 1$$
$$x'' = 1 = 1$$

Die Ursache, weshalb in diesen und ähnlichen Fällen eine oder mehrere der Grössen $(bb,1)$, $(cc,2)$, etc. verschwinden muss, obgleich alle gegebenen Gleichungen von einander unabhängig sind, ist leicht einzusehen, und liegt darin, dass im Verlaufe der Auflösung die gegebenen Gleichungen abgekürzt werden, und partielle Systeme von Gleichungen bilden, die aufgelöst werden müssen. Nun kann es sich aber immerhin ereignen, dass diese abgekürzten Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, wenngleich dieses in Bezug auf die vollständigen Gleichungen statt findet. Durch Versetzung der Unbekannten verändert man aber diese partiellen Systeme, und muss nothwendig auf unabhängige kommen, wenn die gegebenen Gleichungen selbst alle von einander unabhängig sind.

Ich werde dieses am nächst vorhergehenden Beispiel näher erläutern. Bei der zuerst gewählten Reihenfolge der Unbekannten hatten wir zu Folge der Gleichungen (3) das folgende partielle System aufzulösen:

$$\alpha' + \beta' - 1 = 0$$
$$4\alpha' + 4\beta' + 10 = 0$$

aber man sieht ohne Weiteres, dass diese beiden Gleichungen einander widersprechen, daher musste nothwendig $(bb,1) = 0$ werden. Durch die vorgenommene Versetzung der Unbekannten wurde die zweite dieser Gleichungen in folgende umgewandelt:

$$2\alpha' - 2\beta' - 10 = 0$$

die von der ersten unabhängig ist, und daher den Fortgang der Auflösung nicht hemmte. Weiterhin hatten wir nun aber zu Folge der Gleichungen (4) das folgende partielle System aufzulösen:

$$\alpha'' + \beta'' - \gamma'' + 2 = 0 = v$$
$$2\alpha'' - 2\beta'' - 10\gamma'' + 1 = 0 = v'$$
$$\alpha'' + 2\beta'' + \gamma'' - 2 = 0 = v''$$

und fanden $\alpha'_1 = -\tfrac{3}{2}$, $\beta'_1 = +\tfrac{1}{4}$, $(cc,2) = 0$.

Setzen wir nun*) $\alpha'_1 = \frac{f}{f''}$, $\beta'_1 = \frac{f'}{f''}$, wodurch

$$f = -6;\ f' = +1;\ f'' = 4$$

wird, da wir f'' willkührlich annehmen können, so ergiebt sich

$$-6v + v' + 4v'' = -19$$

welcher in der That die vorstehenden drei Gleichungen genügen, weshalb nothwendig $(cc,2) = 0$ werden musste. Durch nochmalige Versetzung der Unbekannten erhielten wir statt der obigen Gleichung $v'' = 0$ die folgende:

$$4\alpha'' + 4\beta'' + 10\gamma'' + 4 = 0$$

welche von v und v' unabhängig ist, weshalb nun die Auflösung ohne Weiteres zu Ende geführt werden konnte.

Nehmen wir mit diesem Beispiel die Veränderung vor, dass wir in der dritten Gleichung $-4x'$ statt $+10x'$ schreiben. Behalten wir nun die zuerst aufgestellte Reihenfolge der Unbekannten bei, so finden wir α, $(bb,1)$, $(bc,1)$, $(bd,1)$ wie vorher. Versetzen wir daher wieder die zweite und vierte Unbekannte. Hiermit bekommen wir nun

$$\begin{aligned}
x + 2x''' + x'' + 4x' - 8 &= 0\\
x - 2x''' + 2x'' + 4x' - 5 &= 0\\
-x - 10x''' + x'' - 4x' &= 0\\
2x + x''' - 2x'' + 4x' - 5 &= 0
\end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned}
\alpha &= -1 & \alpha_1 &= -2\\
(bb,1) &= -4 & (bb,1) &= -4\\
(bc,1) &= +1 & (cb,1) &= -8\\
(bd,1) &= 0 & (db,1) &= -3\\
Q' &= 3\\
\alpha' &= +3\\
\beta' &= -2
\end{aligned}$$

wie vorher, aber jetzt ergiebt sich

$$(cc,2) = 0$$
$$(cd,2) = 0$$

Alle Grössen dieser Gruppe sind verschwunden, und wir sehen hieraus, dass die drei ersten unserer Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, und folglich die Unbekannten nicht daraus bestimmt

*) Da wir hier mit reciproken Gleichungen zu thun haben, so sind es nicht α' und β', die den Quotienten aus den Factoren der Bedingungsgleichung gleich werden, sondern α'_1 und β'_1.

werden können. Um die Bedingungsgleichung zu finden, die zwischen ihnen statt hat, bezeichne ich sie mit $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$, und setze zu Folge des 3ten Satzes des Art. 13.

$$f = \alpha' f''; \; f' = \beta' f''$$

woraus wir

$$f = 3, \; f' = -2, \; f'' = 1$$

erhalten. Durch die Substitution dieser Werthe ergiebt sich

$$3\,v - 2\,v' + v'' = 0 \text{ oder } = \text{constante},$$

welcher in der That die ersten drei der gegebenen Gleichungen Gnüge leisten, da sie für die rechte Seite dieser Gleichung -19 geben.

Da die vierte Gleichung nicht in dieser Bedingungsgleichung vorkommt, so wurden schon $(cc,2)$ und $(cd,2) = 0$. Hätte aber die vierte Gleichung Theil an der Bedingungsgleichung, dann wären, dem Art. 13. zu Folge, $(cc,2)$ und $(cd,2)$ nicht Null geworden, sondern statt dessen $(dd,3)$, und dieses würde unabhängig von der Anzahl der vorhergehenden Gleichungen statt gefunden haben, die zur Bedingungsgleichung concurrieren. Um dieses auch an einem Beispiele zu zeigen, will ich die obige vierte und dritte Gleichung mit einander verwechseln. Also

$$\begin{aligned}
x + 2\,x''' + x'' + 4\,x' - 8 &= 0\\
x - 2\,x''' + 2\,x'' + 4\,x' - 5 &= 0\\
2\,x + x''' - 2\,x'' + 4\,x' - 5 &= 0\\
-x - 10\,x''' + x'' - 4\,x' \quad &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rlcrl}
\alpha & = -1 & \qquad & \alpha_1 & = -2\\
(bb,1) & = -4 & & (bb,1) & = -4\\
(bc,1) & = +1 & & (cb,1) & = -3\\
(bd,1) & = 0 & & (db,1) & = -8\\
\alpha' & = -\frac{5}{4} & & \alpha'_1 & = -\frac{3}{2}\\
\beta' & = -\frac{3}{4} & & \beta'_1 & = +\frac{1}{4}\\
(cc,2) & = -\frac{12}{4} & & (cc,2) & = -\frac{19}{4}\\
(cd,2) & = -4 & & (dc,2) & = 0\\
\alpha'' & = +3 & & \alpha''_1 & = -\frac{52}{19}\\
\beta'' & = -2 & & \beta''_1 & = -\frac{4}{19}\\
\gamma'' & = 0 & & \gamma''_1 & = -\frac{16}{19}\\
(dd,3) & = 0 & & (dd,3) & = 0
\end{array}$$

Setzen wir nun $f = \alpha'' f'''$, $f' = \beta'' f'''$, $f'' = \gamma'' f'''$, so bekommen wir

$$f = 3, \; f' = -2, \; f'' = 0, \; f''' = 1$$

und hiermit

$$3\,v - 2\,v' + v''' = \text{constante},$$

wie vorher.

16.

Um durch die hier gegebenen Auflösungen in zusammengesetzteren Fällen, wie die eben behandelten, ein System von linearischen Gleichungen mit möglichst wenigem Zeitaufwand aufzulösen, muss man sich an ein festes Rechnungsschema halten. Es wird sich zwar jeder leicht ein solches entwerfen können, aber ich glaube dennoch, diesem oder jenem einen Gefallen zu erzeigen, wenn ich das Schema, wornach ich die Auflösung bewerkstellige, hier an einem Beispiel ausführlich darlege. Ich wähle dazu das folgende:

$$\begin{aligned} 3x + 4x' - 3x'' + 5x''' + 2x^{\text{IV}} - 2 &= 0 \\ -5x + 2x' + 6x'' - 7x''' - 2x^{\text{IV}} + 10 &= 0 \\ 2x + 3x' + 8x'' + 7x''' + 3x^{\text{IV}} - 27 &= 0 \\ 2x - 3x' - 7x'' - 4x''' - 3x^{\text{IV}} + 12 &= 0 \\ 5x + 8x' + 2x'' - x''' + 5x^{\text{IV}} + 17 &= 0 \end{aligned}$$

Behandeln wir dieses System von Gleichungen zuerst nach der ersten Auflösung, so erhalten wir

$\log \alpha = 0{,}22185$	$\log \alpha_1 = 0{,}12494\,n$
$(bb,1) = +8{,}6667$	$(bb,1) = +8{,}6667$
$(bc,1) = +1.$	$(cb,1) = +0{,}3333$
$(bd,1) = +1{,}3333$	$(db,1) = -5{,}6667$
$(be,1) = +1{,}3333$	$(eb,1) = +1{,}3333$
$Q' = +6{,}6667$	
$\alpha' = -0{,}73077$	$\alpha'_1 = +1{,}15385$
$\log \beta' = 8{,}58503\,n$	$\log \beta'_1 = 9{,}06215\,n$
$(cc,2) = +9{,}9615$	$(cc,2) = +9{,}9615$
$(cd,2) = +3{,}6154$	$(dc,2) = -4{,}3461$
$(ce,2) = +1{,}6154$	$(ec,2) = +6{,}8462$
$Q'' = -25{,}9231$	
$\alpha'' = +0{,}10426$	$\alpha''_1 = -1{,}88031$
$\beta'' = +0{,}63708$	$\beta''_1 = -0{,}11197$
$\log \gamma'' = 9{,}63977$	$\log \gamma''_1 = 9{,}55983\,n$
$(dd,3) = -4{,}8843$	$(dd,3) = -4{,}8841$
$(de,3) = -2{,}7568$	$(ed,3) = -12{,}0233$
$Q''' = +6{,}3829$	
$\alpha''' = -1{,}67751$	$\alpha'''_1 = +0{,}41265$
$\beta''' = -1{,}69568$	$\beta'''_1 = -0{,}07194$
$\gamma''' = -1{,}76123$	$\gamma'''_1 = +0{,}04269$
$\log \delta''' = 0{,}39122\,n$	$\log \delta'''_1 = 9{,}75161\,n$
$(ee,4) = +7{,}1373$	$(ee,4) = +7{,}1375$
$Q^{\text{IV}} = +21{,}413$	

Anmerkung. Die Unterschiede in der letzten Stelle der doppelten Werthe von $(dd,3)$ und $(ee,4)$ sind unvermeidlich, und rühren von dem Fehler der letzten Stelle der angewandten Logarithmen her.

$$\left.\begin{aligned} x &= +\,0{,}9997 \\ x' &= -\,1{,}0000 \\ x'' &= +\,1{,}9999 \\ x''' &= +\,3{,}0001 \\ x^{\text{IV}} &= -\,3{,}0001 \end{aligned}\right\} \text{ Die strengen Werthe sind: } \left\{\begin{aligned} &= +\,1 \\ &= -\,1 \\ &= +\,2 \\ &= +\,3 \\ &= -\,3 \end{aligned}\right.$$

und diese Grössen sind durch die, wie folgt, gestellte Rechnung erhalten worden.

	(ab)	(ac)	(ad)	(ae)	q	(ba)	(ca)	(da)	(ea)
	0,60206	0,47712 n	0,69897	0,30103	0,30103 n	0,69897 n	0,30103	0,30103	0,69897
—(aa)..	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n
	0,82391	0,69897 n	0,92082	0,52288	0,52288 n	0,82391	0,42597 n	0,42597 n	0,82391 n
	+ 6,6667	— 5,0000	+8,3333	+3,3333	—8,3333	+ 6,6667	— 2,6667	—2,6667	—6,6667
	+ 2,	+ 6,	—7,	—2,	+10,	+ 2,	+ 3,	+3,	+ 8,
	+ 8,6667	+ 1,0000	+1,3333	+1,3333	+ 6,6667	+ 8,6667	+ 0,3333	—5,6667	+ 1,3333
		(bc,1)	(bd,1)	(be,1)	Q'		(cb,1)	(db,1)	(eb,1)
		0,00000	0,12494	0,12494	0,82391		9,52288	0,75333 n	0,12494
	— (bb,1)	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n	. . . . .	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n
	(ac)	— (bc,1)				(ca)	(cb,1)		
	— (aa)	(bb,1)				— (aa)	— (bb,1)		
	0,00000	9,06215 n				9,82391 n	8,58503 n		
		9,18709	. . . × α_1				8,80688 n	. . . × α	
	+1,00000					— 0,66667			
	+0,15385					—0,06410			
	+1,15385	= α'_1				—0,73077	= α'		
		(bc)	(bd)	(be)	q'		(cb)	(db)	(eb)
		0,77815	0,84510 n	0,30103 n	1,00000		0,47712 n	0,47712 n	0,90309
	(ac) α', etc.	0,34090	0,56275 n	0,16481 n	0,16481 n	(ca) α'_1, etc.	0,36318	0,36318	0,76112
	(bc) β', etc.	9,36318 n	9,43013	8,88606	9,58503 n	(cb) β'_1, etc.	9,53927 n	9,53927	9,96524 n
		+ 2,1923	- 3,6538	—1,4615	+1,4615		+ 2,3077	+2,3077	+5,7693
		— 0,2308	+0,2692	+0,0769	—0,3846		— 0,3462	+0,3462	—0,9231
		+ 8,	+ 7,	+3,	—27,		+ 8,	—7,	+2,
		+ 9,9615	+3,6154	+1,6154	—25,9231		+ 9,9615	—4,3461	+6,8462
			(cd,2)	(ce,2)	Q''			(dc,2)	(ec,2)
			0,55816	0,20828	1,41368 n			0,63810 n	0,83545
		— (cc,2) . .	0,99833 n	0,99833 n	0,99833 n	. . . .	. . . .	0,99833 n	0,99833 n
	(ad)	(bd,1)	(cd,2)			(da)	(db,1)	(dc,2)	
	— (aa)	— (bb,1)	— (cc,2)			— (aa)	— (bb,1)	— (cc,2)	
	0,22185 n	9,18709 n	9,55983 n			9,82391 n	9,81548	9,63977	
		9,31203	9,62198 n	× α_1, α'_1			0,03733	9,50355 n	× α, α'
			8,62198	× β'_1				8,22480 n	× β'
	- 1,66667					—0,66667			
	+0.20513	—0,15385				+ 1,08975	+ 0,65386		
	—0,41877	+ 0,04488				— 0,31882	— 0,01678		
	—1,88031	—0,11497	= α''_1, β''_1			+ 0,10426	+ 0,63708	= α'', β''	

		(cd)	(ce)	q''			(dc)	(ec)	
		0,84510	0,47712	1,43136 n			0,84510 n	0,30103	
	$(ad)\,\alpha''$, etc.	9,71709	9,31915	9,31915 n		$(da)\,\alpha''_1$, etc.	0,57526 n	0,97320 n	
	$(bd)\,\beta''$, etc.	0,64930 n	0,10523 n	0,80420		$(db)\,\beta''_1$, etc.	9,52622	9,95219 n	
	$(cd)\,\gamma''$, etc.	0,48487	0,11689	1,07113 n		$(dc)\,\gamma''_1$, etc.	0,40493	9,86086 n	
		+ 0,5213	+ 0,2085	− 0,2085			− 3,7606	− 9,4016	
		− 4,4596	− 1,2742	+ 6,3709			+ 0,3359	− 0,8958	
		+ 3,0540	+ 1,3089	− 11,7795			+ 2,5406	− 0,7259	
		− 4,	− 3,	+ 12,			− 4,	− 1,	
		− 4,8843	− 2,7568	+ 6,3829			− 4,8841	− 12,0233	
			$(de,3)$	Q''				$(ed,3)$	
			0,44041 n	0,80501				1,08002 n	
		$-\,(dd,3)$ ..	0,68880	0,68880	. . .	. . .	. . .	0,68880	
(ae)	$(be,1)$	$(ce,2)$	$(de,3)$		(ea)	$(eb,1)$	$(ec,2)$	$(ed,3)$	
$-\,(aa)$	$-\,(bb,1)$	$-\,(cc,2)$	$-\,(dd,3)$		$-\,(aa)$	$-\,(bb,1)$	$-\,(cc,2)$	$-\,(dd,3)$	
9,82391 n	9,18709 n	9,20995 n	9,75161 n		0,22185 n	9,18709 n	9,83712 n	0,39122 n	
	9,31203	9,27210 n	0,02584	$\times\alpha_1, \alpha'_1, \alpha'''_1$		9,40894 n	9,70090	9,40934 n	$\times\alpha, \alpha', \alpha''$
		8,27210	8,80071	$\times\beta'_1, \beta''_1$			8,42215	0,19542 n	$\times\beta', \beta''$
			9,31444	$\times\gamma''_1$				0,03099 n	$\times\gamma''$
− 0,66667					− 1,66667				
+ 0,20513	− 0,15385				− 0,25641	− 0,15385			
− 0,18711	+ 0,01871	− 0,16216			+ 0,50222	+ 0,02648	− 0,68726		
+ 1,06130	+ 0,06320	+ 0,20485			− 0,25665	− 1,56826	− 1,07397		
+ 0,41265	− 0,07194	+ 0,04269	$=\alpha'''_1, \beta'''_1,$	γ'''_1	− 1,67751	− 1,69563	− 1,76123	$=\alpha''', \beta''',$	γ'''

			(de)	q'''				(ed)
			0,47712 n	1,07918				0,00000 n
		$(ae)\,\alpha'''$, etc.	0,52569 n	0,52569			$(ea)\,\alpha'''_1$, etc.	0,31455
		$(be)\,\beta'''$, etc.	0,58037	1,22934 n			$(eb)\,\beta'''_1$, etc.	9,76006 n
		$(ce)\,\gamma'''$, etc.	0,72294 n	1,67718			$(ec)\,\gamma'''_1$, etc.	8,93136
		$(de)\,\delta'''$, etc.	0,86834	1,47040 n			$(ed)\,\delta'''_1$, etc.	9,75161
			− 3,3550	+ 3,355				+ 2,0632
			+ 3,3913	− 16,956				− 0,5755
			− 5,2838	+ 47,558				+ 0,0854
			+ 7,3848	− 29,539				+ 0,5644
			+ 5,	+ 17				+ 5,
			+ 7,1373	+ 21,418				+ 7,1375
				Q^{IV}				
				1,33068				
			$-\,(ee,4)$	0,85355 n				
q	Q'	Q''	Q'''	Q^{IV}				
$-\,(aa)$	$-\,(bb,1)$	$-\,(cc,2)$	$-\,(dd,3)$	$-\,(ee,4)$				
9,82391	9,88606 n	0,41585	0,11621	0,47718 n				
	0,01100	0,47750	0,39044 n	0,09271 n	$\times\alpha_1, \alpha'_1,$	$\alpha''_1, \alpha'''_1,$		
		9,47750 n	9,16531 n	9,33410	$\times\beta_1, \beta''_1,$	β'''_1		
			9,67604 n	9,10746 n	$\times\gamma''_1, \gamma'''_1$			
				0,22874	$\times\delta'''_1$			
+ 0,6667								
+ 1,0256	− 0,7692							
+ 3,0026	− 0,3003	+ 2,6023						
− 2,4572	− 0,1463	− 0,4743	+ 1,3068					
+ 1,2380	+ 0,2158	− 0,1281	+ 1,6933	− 3,0001				
+ 0,9997	− 1,0000	+ 1,9999	+ 3,0001	− 3,0001	$= x, x',$	etc.		

Hierzu kommen noch die folgenden Logarithmen der Factoren α, α', etc.

α	α'	β'	α''	β''	γ''
0,22185	9,86378 *n*	8,58503 *n*	9,01812	9,80420	9,63977
α'''	β'''	γ'''	δ'''		
0,22466 *n*	0,22934 *n*	0,24582 *n*	0,39122 *n*		
α_1	α'_1	β'_1	α''_1	β''_1	γ''_1
0,12494 *n*	0,06215	9,06215 *n*	0,27423 *n*	9,04910 *n*	9,55983 *n*
α_1'''	β_1'''	γ_1'''	δ_1'''		
9,61558	8,85697 *n*	8,63033	9,75161 *n*		

die nach und nach, so wie die Rechnung sie ergeben hatte, auf den untern Rand eines Streifens Papier geschrieben wurden, um durch Darüberhalten desselben die erforderlichen Additionen der Logarithmen ausführen zu können.

Um auch die unbestimmte Auflösung zu zeigen, werde ich die Formeln des Art. 8. auf dasselbe Beispiel anwenden.

$\frac{1}{-(aa)}$	$\frac{\alpha}{-(bb,1)}$	$\frac{\alpha'}{-(cc,2)}$	$\frac{\alpha''}{-(dd,3)}$	$\frac{\alpha'''}{-(ee,4)}$	
9,52288 *n*	9,28400 *n*	8,86545	8,32932	9,37144	
	9,40894	8,92760	8,60355 *n*	8,98669	$\times\,\alpha_1,\ \alpha_1'$, etc.
		7,92760 *n*	7,37842 *n*	8,22808 *n*	$\times\,\beta_1',\ \beta_1''$, etc.
			7,88915 *n*	8,00444	$\times\,\gamma_1'',\ \gamma_1'''$
				9,12272 *n*	$\times\,\delta_1'''$
− 0,33383					
+ 0,25641	− 0,19231				
+ 0,08464	− 0,00846	+ 0,07336			
− 0,04014	− 0,00239	− 0,00775	+ 0,02135		
+ 0,09698	− 0,01691	+ 0,01003	− 0,13265	+ 0,28502	
+ 0,06456	− 0,22007	+ 0,07564	− 0,11180	+ 0,28502	= (*AA*), (*BA*), etc.
	$\frac{1}{-(bb,1)}$	$\frac{\beta}{-(cc,2)}$	$\frac{\beta'}{-(dd,3)}$	$\frac{\beta''}{-(ee,4)}$	
	9,06215 *n*	7,58670	9,11540	9,37579	
	9,18709	7,64885	9,38963 *n*	8,99137	$\times\,\alpha_1,\ \alpha_1'$, etc.
		6,64885 *n*	8,16450 *n*	8,23276 *n*	$\times\,\beta_1',\ \beta_1''$, etc.
			8,67523 *n*	8,00612	$\times\,\gamma_1'',\ \gamma_1'''$
				9,12740 *n*	$\times\,\delta_1'''$
+ 0,15384	− 0,11538				
+ 0,00446	− 0,00045	+ 0,00386			
− 0,24526	− 0,01461	− 0,04734	+ 0,13044		
+ 0,30908	− 0,01709	+ 0,01014	− 0,13409	+ 0,28757	
+ 0,01107	− 0,14753	− 0,03334	− 0,00365	+ 0,28757	= (*AB*), (*BB*), etc.
		$\frac{1}{-(cc,2)}$	$\frac{\gamma''}{-(dd,3)}$	$\frac{\gamma'''}{-(ee,4)}$	
		9,00167 *n*	8,75097	9,39227	
		9,06382 *n*	9,22520 *n*	9,00785	$\times\,\alpha_1',\ \alpha_1'',\ \alpha_1'''$
		8,06382	8,00007 *n*	8,24924 *n*	$\times\,\beta_1'',\ \beta_1''',\ \beta_1'''$
			8,51080 *n*	8,02260	$\times\,\gamma_1'',\ \gamma_1$
				9,14388 *n*	$\times\,\delta_1'''$
− 0,14583	+ 0,01158	− 0,10038			
− 0,16796	− 0,01000	− 0,08242	+ 0,08932		
+ 0,10482	− 0,01775	+ 0,01053	− 0,13928	+ 0,24676	
− 0,18197	− 0,01617	− 0,12227	− 0,04996	+ 0,24676	= (*AC*), (*BC*), etc.
			$\frac{1}{-(dd,3)}$	$\frac{\delta'''}{-(ee,4)}$	
			9,31120	9,58767	
			9,58548 *n*	9,15325	$\times\,\alpha_1'',\ \alpha_1'''$
			8,36080 *n*	8,89464 *n*	$\times\,\beta_1'',\ \beta_1'''$
			8,87108 *n*	8,16800	$\times\,\gamma_1'',\ \gamma_1'''$
				9,28928 *n*	$\times\,\delta_1'''$
− 0,38497	− 0,02292	− 0,07481	+ 0,20473		
+ 0,14232	− 0,02481	+ 0,01472	− 0,19466	+ 0,34488	
− 0 24265	− 0,04773	− 0,05959	+ 0,01007	+ 0,34488	= (*AD*), (*BD*), etc.

				$\frac{1}{-(ee,4)}$	
				9,14645 n	
				8,76203 n	$\times \alpha'''_1$
				8,00342	$\times \beta'''_1$
				7,77678 n	$\times \gamma'''_1$
				8,89806	$\times \delta'''_1$
— 0,05781	+ 0,01008	— 0,00598	+ 0,07908	— 0,14010	= (AE), (BE), etc.

Wir haben also hierdurch erhalten:

$$x = +0{,}06456\,q + 0{,}01107\,q' - 0{,}18197\,q'' - 0{,}24265\,q''' - 0{,}05781\,q^{\text{IV}}$$
$$x' = -0{,}22007\,q - 0{,}14753\,q' - 0{,}01617\,q'' - 0{,}04773\,q''' + 0{,}01008\,q^{\text{IV}}$$
$$x'' = +0{,}07564\,q - 0{,}03334\,q' - 0{,}12227\,q'' - 0{,}05959\,q''' - 0{,}00598\,q^{\text{IV}}$$
$$x''' = -0{,}11130\,q - 0{,}00365\,q' - 0{,}04996\,q'' + 0{,}01007\,q''' + 0{,}07908\,q^{\text{IV}}$$
$$x^{\text{IV}} = +0{,}23502\,q + 0{,}23757\,q' + 0{,}24676\,q'' + 0{,}34488\,q''' - 0{,}14010\,q^{\text{IV}}$$

Führen wir nun die Auflösung derselben Gleichungen nach dem zweiten Verfahren, d. i. nach den Formeln des Art. 10., aus, so steht die Rechnung, wie folgt:

(ab)	(ac)	(ad)	(ae)	(q)	(ba)	(ca)	(da)	(ea)
0,60206	0,47712 n	0,69897	0,30103	0,30103 n	0,69897	0,30103	0,30103	0,69897
0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n
0,82391	0,69897 n	0,92082	0,52288	0,52288 n		0,42597	0,42597 n	0,82391 n
+ 6,6667	— 5,0000	+ 8,3333	+ 3,3333	— 3,3333		— 2,6667	— 2,6667	— 6,6667
+ 2,	+ 6,	— 7,	— 2,	+ 10,		+ 3,	— 3,	+ 8,
+ 8,6667	+ 1,0000	+ 1,3333	+ 1,3333	+ 6,6667		+ 0,3333	— 5,6667	+ 1,3333
(bb,1)	(bc,1)	(bd,1)	(be,1)	Q'		(cb,1)	(db,1)	(eb,1)
	0,00000	0,12494	0,12494	0,82391		0,52288	0,75333 n	0,12494
— (bb,1) . . .	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n	. . . . . .	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n
(ac) γ, etc.	0,30103	0,52288 n	0,12494 n	0,12494		(ac), δ, etc.	0,30103	0,69897
(bc,1)(γ₁,1), etc.	8,58503 n	8,70997	8,70997 n	9,40894 n		(bc,1)(δ,1), etc.	9,81548	9,18709 n
	+ 2,0000	— 3,3333	— 1,3333	+ 1,3333			+ 2,0000	+ 5,0000
	— 0,0385	— 0,0513	— 0,0513	— 0,2564			+ 0,6539	— 0,1538
	+ 8,	+ 7,	+ 3,	— 27,			— 7,	+ 2,
	+ 9,9615	+ 3,6154	+ 1,6154	— 25,9231			— 4,3461	+ 6,8462
	(cc,2)	(cd,2)	(ce,2)	Q''			(dc,2)	(ec,2)
		0,55816	0,20828	0,41368 n			0,63810 n	0,83545
	— (cc,2) . .	0,99833 n	0,99833 n	0,99833 n	. . . . .	. . . .	0,99833 n	0,99833 n
	(ad) δ, etc.	0,52288 n	0,12494	0,12494			(ad) ε,	0,92082 n
	(bd,1)(δ,1), etc.	9,94042	9,94042	0,63989			(bd,1)(ε,1)	9,31203 n
	(cd,2)(δ,2), etc.	0,49793	9,84805	1,05345 n			(cd,2)(ε,2)	0,39528 n
		— 3,3333	— 1,3333	+ 1,3333				— 8,3333
		+ 0,8718	+ 0,8718	+ 4,3590				— 0,2051
		+ 1,5774	+ 0,7048	— 11,3097				— 2,4847
		— 4,	— 3,	+ 2,				— 1,
		— 4,8841	— 2,7567	+ 6,3826				— 12,0231
		(dd,3)	(de,3)	Q'''				(ed,3)
			0,44039 n	0,80496				1,08001 n
		— (dd,3)	0,68879	0,68879	. . . . .	. . . .	. . . . . .	0,68879
	(ae) ε,	etc.	0,52288 n	0,52288				
	(be,1) (ε,1)	etc.	9,31203 n	0,01100 n				
	(ce,2) (ε,2)	etc.	0,04540 n	1,25080				
	(de,3) (ε,3)	etc.	0,83161	1,19618 n				
			— 3,3333	+ 3,3333				
			— 0,2051	— 1,026				
			— 1,1102	+ 17,816				
			+ 6,7860	— 15,740				
			+ 5,	+ 17,				
			+ 7,1374	+ 21,413				
			(ee,4)	Q^{IV}				
				1,33068				
			— (ee,4) . .	0,85354 n				

$\frac{(ab)}{-(aa)}$	$\frac{(ac)}{-(aa)}$ $\frac{(bc,1)}{-(bb,1)}$	$\frac{(ad)}{-(aa)}$ $\frac{(bd,1)}{-(bb,1)}$ etc.	$\frac{(ae)}{-(aa)}$ $\frac{(be,1)}{-(bb,1)}$ etc.	$\frac{q}{-(aa)}$	$\frac{Q'}{-(bb,1)}$	$\frac{Q''}{-(cc,2)}$	$\frac{Q'''}{-(dd,3)}$	$\frac{Q^{IV}}{-(ee,4)}$
0,12494 n	0,00000	0,22185 n	9,82891 n	9,82891	9,88606	0,41585	0,11617	0,47714 n
	0,06215 n	9,18709 n	9,18709 n	+ 0,6667	— 0,7693	+ 2,6022	+ 1,3067	— 3,0001
		9,55983 n	9,20995 n	+ 2,0001	+ 0,4616	+ 0,4865	+ 1,6983	x^{IV}
			9,75160 n	— 5,0000	— ,04615	— 1,0888	+ 3,0000	
0,12494	0,30101	0,69897 n	0,30105	+ 1,9999	— 0,2308	+ 1,9999	x'''	
	9,36316 n	9,66421 n	9,66423	+ 1,3333	— 1,0000	x''		
		0,03695 n	9,69709	+ 1,0000	x'			
			0,22874	x				

wozu noch die folgenden Logarithmen der Hülfsgrössen β, γ, etc. kommen, die, so wie in der vorigen Auflösung, auf den untern Rand eines Streifens Papier geschrieben wurden.

β	γ	δ	ε	$(\gamma,1)$	$(\delta,1)$	$(\varepsilon,1)$
0,22185	9,82391 n	9,82391 n	0,22185 n	8,58503 n	9,81548 n	9,18709 n

$(\delta,2)$	$(\varepsilon,2)$	$(\varepsilon,3)$
9,63977	9,83712 n	0,39122 n

Wenn man diese Rechnung mit der nach der ersten Auflösung vergleicht, so wird man gewahr, dass wenigstens für die bestimmte Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen die zweite Auflösung auf eine merklich kürzere Rechnung führt wie die erste. Doch ist hierbei auch zu bedenken, dass man bei dieser kürzeren Rechnung die Controllen entbehrt, die die erste Auflösung im Laufe derselben darbietet.

Führen wir jetzt, um eine Vergleichung machen zu können, die unbestimmte Auflösung nach der zweiten Methode, oder den Formeln des Art. 11., durch. Rechnen wir zuerst alle erforderlichen Hülfsgrössen R, R', etc. S, etc.

$(\gamma,1)$								
$(\delta,1)$	$(\delta,2)$		γ	δ	ε			
$(\varepsilon,1)$	$(\varepsilon,2)$	$(\varepsilon,3)$	— 0,66667	— 0,66667	— 1,6667			
8,58503 n			— 0,06410	+ 1,08975	— 0,2564			
9,81548	9,63977		— 0,78077	— 0,31882	+ 0,5022			
9,18709 n	9,83712 n	0,39122 n	R'	+ 0,10426	— 0,2566			
8,80688 n				R''	— 1,6775			
0,03733	9,50355 n				R'''			
9,40894 n	9,70090	9,40984 n	9,86378 n	9,01812	0,22466 n			
			0,99833 n	0,68879	0,85354 n	$(\delta,1)$	$(\varepsilon,1)$	
	8,22480 n					+ 0,65386	— 0,15385	
	8,42215	0,19542 n				— 0,01678	+ 0,02643	
						+ 0,63708	— 1,56826	
						S'	— 1,69568	
							S''	
						9,80420	0,22934 n	$(\varepsilon,2)$
						0,68879	0,85354 n	— 0,6873
		0,03099 n						— 1,0740
								— 1,7613
								T'
								0,24583 n
								0,85354 n

$\frac{(ab)}{-(aa)}$	$\frac{(ac)}{-(aa)}$ $\frac{(bc,1)}{-(bb,1)}$	$\frac{(ad)}{-(aa)}$ etc.	$\frac{(ae)}{-(aa)}$ etc.	$\frac{1}{-(aa)}$	$\frac{R}{-(bb,1)}$	$\frac{R'}{-(cc,2)}$	$\frac{R''}{-(dd,3)}$	$\frac{R'''}{-(ee,4)}$
0,12494 n	0,00000	0,22185 n	9,82391 n	9,52288n	9,28400n	8,86545	8,32933	9,87112
	9,06215 n	9,18709 n	9,18709 n	−0,33338	−0,19231	+0,07886	+0,02185	+0,23508
		9,55988 n	9,20995 n	−0,15669	−0,08616	−0,03811	−0,18265	(EA)
			9,75160 n	+0,18550	+0,01712	+0,04040	−0,11180	
9,46752	8,78881	9,26885	9,19508 n	+0,07565	−0,00873	+0,07565	(DA)	
	7,94096 n	8,23359	8,55821 n	+0,29344	−0,22008	(CA)		
		8,60638	8,58107 n	+0,06457	(BA)			
			9,12272 n	(AA)				
9,29379	8,52310 n	7,87414	9,19971 n		$\frac{1}{-(bb,1)}$	$\frac{S}{-(cc,2)}$	$\frac{S'}{-(dd,3)}$	$\frac{S''}{-(ee,4)}$
	7,58525	6,74938	8,56289 n		9,06215	7,58670	9,11541	9,87580
		7,12212	8,58575 n		−0,11538	+0,00386	+0,13044	+0,23757
			9,12740 n	−0,15838	−0,03655	−0,03858	−0,13409	(EB)
				+0,00608	+0,00056	+0,00132	−0,00365	
				−0,03335	+0,00385	−0,03335	(DB)	
				+0,19670	−0,14752	(CB)		
				+0,01105	(BB)			
				(AB)				
8,33365	9,08736 n	8,92039	9,21620 n			$\frac{1}{-(cc,2)}$	$\frac{T}{-(dd,3)}$	$\frac{T'}{-(ee,4)}$
	8,14951	7,88568	8,57938 n			9,00167n	8,95098	9,39229
		8,25837	8,60224 n			−0,10039	+0,08933	+0,24677
			9,14389 n	−0,16451	−0,03796	−0,04002	−0,13928	(EC)
				+0,08325	+0,00768	+0,01813	−0,04995	
				−0,12228	+0,01411	−0,12228	(DC)	
				+0,02156	−0,01617	(CC)		
				−0,18198	(BC)			
				(AC)				
8,80378	8,77517n	8,22531 n	9,36159 n				$\frac{1}{-(dd,3)}$	$\frac{U}{-(ee,4)}$
	7,88732	7,19055 n	8,72477 n				9,31121	9,53768
		7,56829 n	8,74763 n				+0,20474	+0,34489
			9,28928 n	−0,22993	−0,05306	−0,05593	−0,19466	(ED)
				−0,01680	−0,00155	−0,00366	+0,01008	
				−0,05959	+0,00688	−0,05959	(DD)	
				+0,06364	−0,04773	(CD)		
				−0,24268	(BD)			
				(AD)				
8,12883 n	7,77670 n	9,11991 n	8,97037					$\frac{1}{-(ee,4)}$
	6,83885	8,08515 n	8,33855					9,14646n
		8,45789 n	8,35641					−0,14014
			8,89806	+0,09481	+0,02156	+0,02272	+0,07908	(EE)
				−0,13180	−0,01216	−0,02870	(DE)	
				−0,00598	+0,00069	−0,00598		
				−0,01345	+0,01009	(CE)		
				−0,05782	(BE)			
				(AE)				

Vergleicht man diese Berechnung der Coefficienten der unbestimmten Auflösung mit der nach der ersten Methode, so sieht man, dass sie, für sich betrachtet, mehr Arbeit verursacht wie jene. Zählt man aber in beiden Methoden den Theil der bestimmten Auflösung hinzu, der nothwendig für die Ausführung der unbestimmten vorangehen muss, so scheint mir, dass beide Methoden sehr nahe dieselbe Arbeit verlangen.

II.

ÜBER DIE ENTWICKELUNG DER GRÖSSE $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ NACH DEN POTENZEN VON α.

1.

Die allgemeinste Form, in welcher in der Attractionstheorie die in der Ueberschrift genannte Wurzelgrösse vorkommt, ist die, wo

$$H = \cos\omega\cos\psi + \sin\omega\sin\psi\cos(\theta-\theta')$$

ist, und also den Cosinus der Seite eines sphärischen Dreiecks bezeichnet, in welchem der gegenüberliegende Winkel $\theta-\theta'$ ist, und die beiden andern Seiten ω und ψ sind. Die Entwickelung dieser Wurzelgrösse ist schon von Legendre in den Memoiren der Pariser Academie, und von Laplace in der «Mecanique celeste» ausgeführt und gezeigt worden, dass der Coefficient irgend einer Potenz von α aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, deren jedes aus 4 Factoren zusammengesetzt ist. Der erste dieser Factoren ist von ω, ψ und $\theta-\theta'$ unabhängig, der zweite hängt blos von ω ab, der dritte hat dieselbe Form wie der zweite, hängt aber von ψ statt von ω ab, der vierte endlich ist der Cosinus eines Vielfachen von $\theta-\theta'$.

Legendre hat später gezeigt, dass der zweite, und daher auch der dritte dieser Factoren bis auf einen von $\sin\omega$ und resp. $\sin\psi$ abhängigen Factor dieselbe Form hat wie die Entwickelungscoefficienten und ihre Differentialquotienten, die sich ergeben, wenn man dieselbe Wurzelgrösse, ohne H in mehrere Grössen zu zerlegen, entwickelt. Dieses merkwürdige Resultat findet man im zweiten Bande der «Exercices de calcul integral» abgeleitet, und man hat lange Zeit hindurch keine andere wesentlich von dieser verschiedene Ableitung gehabt, bis Jacobi in Crelle's Journal eine Ableitung gab, die von jener durchaus verschieden, sich durch Kürze und Eleganz auszeichnet. Ich habe noch eine andere Ableitung gefunden, die von jenen beiden gänzlich verschieden ist, und vermittelst einer kurzen Rechnung aus einer neuen Eigenschaft

dieser Entwickelungscoefficienten folgt, die darin besteht, dass man, wenn man den Coefficienten von α^n mit $U_n(H)$ bezeichnet, das Product der m^{ten} Differentialquotienten von $U_n(x)$ und $U_n(y)$ durch einen endlichen, von den Differentialquotienten der Function $U_n(xy)$ abhängenden Ausdruck darstellen kann. Dass man mit andern Worten das Product zweier resp. von den Argumenten x und y abhängigen Functionen durch die vom Product xy abhängige Function und ihre Differentialquotienten vermittelst eines endlichen Ausdruckes darstellen kann.

2.

Um diesen Satz abzuleiten, sei

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\alpha U_1(x)+\alpha^2 U_2(x)+\alpha^3 U_3(x)+\text{etc.}$$

Man weiss, dass $U_n(x)$ eine ganze und rationale Function von x von der n^{ten} Ordnung ist, deren Ausdruck nach den Potenzen von x geordnet der folgende ist:

$$U_n(x) = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}\left\{x^n - \frac{n.\ n-1}{2.2n-1}x^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2\ .\ n-3}{2.4\ .\ 2n-1.2n-3}x^{n-4} \mp \text{etc.}\right\}$$

Der m^{te} Differentialquotient dieser Function ist dem zu Folge eine ganze und rationale Function von x von der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung, und es ist leicht zu sehen, dass man diese auf folgende Form bringen kann:

$$\frac{d^m Un(x)}{dx^m} = A\left\{x^{n-m} + B(x^2-1)x^{n-m-2} + C(x^2-1)^2 x^{-n-m-4} + \text{etc.}\right\}$$

Wenn man in diesem Ausdruck die Potenzen von x^2-1 entwickelt, jenen $m$mal differentiiert, und dann die gleichartigen Glieder mit einander vergleicht, so ergeben sich die Werthe der unbestimmten Coefficienten A, B, C, etc. Dieser Weg ist aber umständlich, und man gelangt einfacher und direct zur Kenntniss dieser Coefficienten, wenn man ein Theorem von Jacobi zu Hülfe nimmt. Diesem zu Folge ist

$$\frac{d^m Un(x)}{dx^m} = \frac{1}{2^n(x^2-1)^m}\ \frac{n-m+1\ldots n+m}{1.2\ \ .\ \ .\ \ .\ \ n}\ \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}$$

Den angedeuteten Differentialquotienten findet man leicht, wenn man in $(x^2-1)^n$, x in $x+dx$ verwandelt und durch den Binomischen Satz den Coefficienten von dx^{n-m} sucht. Es ist erstlich

$$((x+dx)^2-1)^n = (x^2-1+2x\,dx+dx^2)^n =$$

$$(x^2-1+2x\,dx)^n + \frac{n}{1}(x^2-1+2x\,dx)^{n-1}dx^2 + \frac{n.n-1}{1.2}(x^2-1+2x\,dx)^{n-2}dx^4 + \ldots$$

und wir brauchen daher ferner noch

das mit dx^{n-m} multiplicierte Glied in $(x^2-1+2\,x\,dx)^n$
,, ,, dx^{n-m-2} ,, ,, ,, $(x^2-1+2\,x\,dx)^{n-1}$
,, ,, dx^{n-m-4} ,, ,, ,, $(x^2-1+2\,x\,dx)^{n-2}$

etc.

Diese Glieder sind beziehungsweise

$$2^{n-m}\frac{n.n-1\ldots m+1}{1.2\ldots\ldots n-m}(x^2-1)^m x^{n-m}\,dx^{n-m}$$

$$2^{n-m-2}\frac{n-1.n-2\ldots m+2}{1.2\ldots n-m-2}(x^2-1)^{m+1}x^{n-m-2}\,dx^{n-m-2}$$

$$2^{n-m-4}\frac{n-2.n-3\ldots m+3}{1.2\ldots n-m-4}(x^2-1)^{m+2}x^{n-m-4}\,dx^{n-m-4}$$

etc.

deren Substitution in den vorstehenden Ausdruck sogleich giebt

$$\frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{1.2..n-m.dx^{n-m}}=2^n(x^2-1)^m\frac{1}{2^m}\frac{n.n-1\ldots m+1}{1.2\ldots n-m}\Big\{x^{n-m}$$

$$+\frac{n-m.n-m-1}{2.2m+2}(x^2-1)x^{n-m-2}+\frac{n-m\ldots n-m-3}{2.4.2m+2.2m+4}(x^2-1)^2x^{n-m-4}+\text{etc.}\Big\}$$

also

$$\frac{d^m\,Un(x)}{dx^m}=\frac{n-m+1\ldots n+m}{2.4\ldots 2m}\Big\{x^{n-m}+\frac{n-m.n-m-1}{2.2m+2}(x^2-1)x^{n-m-2}$$

$$+\frac{n-m\,..\,n-m-3}{2.4.2m+2.2m+4}(x^2-1)^2x^{n-m-4}+\text{etc.}\Big\}$$

Es ist klar, dass $\frac{d^n\,Un(x)}{dx^n}$ constant ist, also

$$\frac{d^n\,Un(x)}{dx^n}=\frac{d^n\,Un(xy)}{d(xy)^n}$$

Hieraus folgt

$$(A)\ldots\frac{d^m\,Un(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^n\,Un(y)}{dy^n}\,dy^{n-m}=$$

$$\frac{n-m+1\ldots n+m}{2.4\ldots 2m}\Big\{x^{n-m}+\frac{n-m.n-m-1}{2.2m+2}(x^2-1)x^{n-m-2}+\text{etc.}\Big\}\frac{d^n Un(xy)}{d(xy)^n}\,dy^{n-m}$$

in welcher Gleichung x und y von einander unabhängige Grössen sind. Diese Gleichung können wir $n-m$mal integrieren, wodurch die linke Seite ohne Weiteres in

$$\frac{d^m\,Un(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^m\,Un(y)}{dy^m}$$

übergeht. Für die rechte Seite haben wir sogleich

$$\int^{n-m}\frac{d^n\,Un(xy)}{d(xy)}\,dy^{n-m}=\frac{1}{x^{n-m}}\,\frac{d^m\,Un(xy)}{d(xy)^m}$$

$$+fx+yf_1x+y^2f_2x+\ldots y^{n-m-1}f_{n-m-1}x\ldots(A^*)$$

wo fx, f_1x, etc. die den Integrationen zugefügten willkührlichen Constanten (hier möglicher Weise Functionen von x) sind. Dieses Integral kann aber auch eine Reihe von andern Formen annehmen. Da $\frac{d^n\,Un(xy)}{d(xy)^n}$ eine Constante ist, die ich K nennen will, so ist in der That das obige Integral $=$

$$\frac{K}{1.2\ldots n-m}y^{n-m}+c_{n-m-1}y^{n-m-1}+c_{n-m-2}y^{n-m-2}+\ldots c_1y+c$$

wo c_{n-m-1}, c_{n-m-2}, etc. die willkührlichen Constanten sind. Das erste Glied dieses Ausdrucks können wir auch so schreiben:

$$\frac{K}{1.2\ldots n-m.x^{n-m}}(xy)^{n-m}.$$

ja wir können auch statt des Factors $(xy)^{n-m}$ jede beliebige ganze und rationale Function der Ordnung $n-m$ von xy substituieren, wenn wir nur den Factor $\frac{K}{1.2..n-m}$ dem Coefficienten von $(xy)^{n-m}$ in der angewandten Function gemäss abändern, und unter den willkührlichen Grössen c_{n-m-1}, c_{n-m-2}, etc. Functionen von x verstehen. Der oben abgeleitete Ausdruck unsers Integrals ist ein specieller Fall dieses allgemeineren, indem $\frac{d^m Un(xy)}{d(xy)^m}$ eine ganze und rationale Function der Ordnung $n-m$ von xy ist. Wir können aber noch weiter gehen. Bezeichnen wir allgemein durch $Fp(xy)$ eine ganze und rationale Function der Ordnung p von xy, so können wir mit gehöriger Abänderung des constanten Coefficienten des ersten Gliedes, und indem wir für c_{n-m-1}, c_{n-m-2}, etc. willkührliche Functionen von x annehmen, für y^{n-m} nach einander schreiben:

$$\frac{y+a}{x^{n-m-1}}F_{n-m-1}(xy);\ \frac{y^2+a'y+b'}{x^{n-m-2}}F_{n-m-2}(xy);\ \frac{y^3+a''y^2+b''y+c}{x^{n-m-3}}F_{n-m-3}(xy);\ \text{etc.}$$

wo a, a', b', a'', etc. willkührlich gewählte Constanten sind. Es geht hieraus hervor, dass, ausser der obigen direct erhaltenen Form (A^*), unser Integral unter andern auch, wie folgt, dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned}\int^{n-m}\frac{d^n Un(xy)}{d(xy)^n}dy^{n-m} &= \frac{y^2-1}{k.x^{n-m-2}}\frac{d^{m+2}Un(xy)}{d(xy)^{m+2}}+\varphi x+y\varphi x+..y^{n-m-1}\varphi_{n-m-1}x\\ &= \frac{(y^2-1)^2}{k.x^{n-m-4}}\frac{d^{m+4}Un(xy)}{d(xy)^{m+4}}+\text{etc.}\\ &= \text{etc.}\end{aligned}$$

wo noch die Constanten k, k', etc. zu bestimmen sind. Dieses geschieht am einfachsten durch Rückdifferentiieren, und wir wenden zu dem Ende den folgenden Satz aus der Differentialrechnung an:

$$d^{n-m}.uv = ud^{n-m}v+\frac{n-m}{1}du.d^{n-m-1}v+\frac{n-m.n-m-1}{1.2}d^2u.d^{n-m-2}v+\text{etc.}$$

wo u und v irgend zwei veränderliche Grössen bedeuten.

Setzt man nun successive

$$u = y^2-1 = (y^2-1)^2 = \text{etc.}$$

$$v = \frac{d^{m+2}Un(xy)}{d(xy)^{m+2}} = \frac{d^{m+4}Un(xy)}{d(xy)^{m+4}} = \text{etc.}$$

und erwägt, dass

$$\frac{d^{n+1}Un(xy)}{d(xy)^{n+1}} = \frac{d^{n+2}Un(xy)}{d(xy)^{n+2}} = \text{etc.} = 0$$

ist, so bekommt man sogleich

$$\frac{d^{n-m}.\,(y^2-1)\frac{d^{m+2}Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+2}}}{dy^{n-m}}=(n-m)\,(n-m-1)\,x^{n-m-2}\frac{d^n\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^n}$$

$$\frac{d^{n-m}.\,(y^2-1)^2\frac{d^{m+4}Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+4}}}{dy^{n-m}}=(n-m)\,(n-m-1)\,(n-m-2)\,(n-m-3)\,x^{n-m-4}\frac{d^n Un\,(xy)}{d(xy)^n}$$

etc. etc.

Hiermit ergiebt sich

$$k = n-m\,.\,n-m-1$$

$$k' = n-m\,.\,n-m-1\,.\,n-m-2\,.\,n-m-3$$

etc. etc.

und wir erhalten somit durch die Substitution der im Vorhergehenden entwickelten Integrale in die Differentialgleichung (A)

$$\frac{d^m\,Un\,(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^m\,Un\,(y)}{dy^m}+fx+yf_1x+\ldots+y^{n-m-1}f_{n-m-1}\,x=$$

$$\frac{n-m-1\ldots n+m}{2.4\ldots 2m}\left\{\frac{d^m\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^m}+\frac{(x^2-1)\,(y^2-1)}{2.2m+2}\,\frac{d^{m+2}\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+2}}\right.$$

$$\left.+\frac{(x^2-1)^2\,(y^2-1)^2}{2.4.2m+2.2m+4}\,\frac{d^{m+4}\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+4}}+\text{etc.}\right\}$$

wo noch die willkührlichen Functionen fx, f_1x, etc. zu bestimmen sind.

Setzen wir $y=1$, so bekommen wir, da unter dieser Voraussetzung

$$\frac{d^m\,Un\,(y)}{dy^m}=\frac{n-m+1\,..\,n+m}{2.4\,.....\,2m}$$

ist,

$$\frac{d^m\,Un\,(x)}{dx^m}+fx+f_1x+f_2x+\text{etc.}=\frac{d^m\,Un\,(x)}{dx^m}$$

woraus folgt, dass

$$fx+f_1x+f_2x+\text{etc.}=0 \qquad (a)$$

Differentiieren wir unser Integral nach y, und setzen nach der Differentation $y=1$, so ergiebt sich

$$\frac{(n-m)\,(n+m+1)}{2m+2}\,\frac{d^m\,Un\,(x)}{dx^m}+f_1x+2f_2x+\ldots=$$

$$x\,\frac{d^{m+1}\,Un\,(x)}{dx^{m+1}}+\frac{x^2-1}{2m+2}\,\frac{d^{m+2}\,Un\,(x)}{dx^{m+2}}$$

aber es ist bekannt, dass zwischen den Differentialquotienten von $Un\,(x)$ die folgende Relation statt findet:

$$0=(x^2-1)\frac{d^{m+2}Un\,(x)}{dx^{m+2}}+(2m+2)\,x\frac{d^{m+1}Un\,(x)}{dx^{m+1}}-(n-m)\,(n+m+1)\,\frac{d^m\,Un\,(x)}{dx^m}$$

also

$$f_1x+2\,f_2x+\text{etc.}=0 \qquad (b)$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so findet man

$$2f_2x+\text{etc.}=0 \qquad (c)$$

u. s. w. Das System der Gleichungen (a), (b), (c), etc. giebt ohne Weiteres

zu erkennen, dass jede einzelne der durch die Integrationen eingeführten willkührlichen Functionen fx, $f_1 x$, $f_2 x$, etc. gleich Null ist, und wir haben daher endlich

$$(B)\qquad \frac{d^m Un(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^m Un(y)}{dy^m} =$$
$$\frac{n-m+1\,..\,n+m}{2.4\,...\,2m}\left\{\frac{d^m Un(xy)}{d(xy)^m}+\frac{(1-x^2)(1-y^2)}{2.2m+2}\,\frac{d^{m+2} Un(xy)}{d(xy)^{m+2}}\right.$$
$$\left.+\frac{(1-x^2)^2(1-y^2)^2}{2.4.2m+2.2m+4}\,\frac{d^{m+4} Un(xy)}{d(xy)^{m+4}}+\text{etc.}\right\}$$

wodurch sich zeigt, dass das Product der m^{ten} Differentialquotienten zweier beziehungsweise von x und y abhängenden Un Functionen durch einen endlichen Ausdruck des m^{ten} und der höheren Differentialquotienten der vom Product xy abhängigen U_n Function ausgedrückt werden kann. Der Satz giebt, um mich noch anders auszudrücken, das Product der Functionen durch dieselbe, dem Product der Argumente zugehörige Function und ihre Differentialquotienten.

Ich füge hinzu, dass man auch einen entgegengesetzten Ausdruck geben kann. Nämlich:

$$\frac{d^m Un(xy)}{d(xy)^m} = 2^m\,\frac{1.2\,...\,m}{n-m+1\,..\,n+m}\,\frac{d^m Un(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^m Un(y)}{dy^m}$$
$$-\frac{2^m}{1}\cdot\frac{1.2\,..\,m\,(m+2)}{n-m-1\,..\,n+m+2}\,(1-x^2)(1-y^2)\,\frac{d^{m+2} Un(x)}{dx^{m+2}}\cdot\frac{d^{m+2} Un(y)}{dy^{m+2}}$$
$$+\frac{2^m}{1.2}\cdot\frac{1.2\,...\,m+1\,(m+4)}{n-m-3\,...\,n+m+4}\,(1-x^2)^2(1-y^2)^2\,\frac{d^{m+4} Un(x)}{dx^{m+4}}\cdot\frac{d^{m+4} Un(y)}{dy^{m+4}}\mp\text{etc.}$$

welcher die dem Producte der Argumente zugehörige Function durch das Product der Functionen und ihrer Differentialquotienten giebt. Von diesem Satze werde ich indess hier keine Anwendung machen, weshalb ich den Beweis desselben übergehe.

3.

Gehen wir nun zur Entwickelung unserer Wurzelgrösse über. Wir haben

$$(1-2H\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\alpha U_1(H)+\alpha^2 U_2(H)+\text{etc.}$$

wo

$$H = \cos\omega\cos\psi+\sin\omega\sin\psi\cos(\theta-\theta')$$

ist. Da $U_n(H)$ eine ganze und rationale Function der Ordnung n von H ist, so ist ohne Weiteres klar, dass wir sie in eine endliche, nach den Cosinussen der Vielfachen von $\theta-\theta'$ fortschreitende Reihe verwandeln können. Wir können also annehmen, dass

$$U_n(H) = \Sigma_{-n}^{+n}\,\alpha_m\cos m(\theta-\theta') \qquad (\alpha)$$

sei, und haben einem bekannten Theorem zu Folge für die Bestimmung der Coefficienten α_m den folgenden allgemeinen Ausdruck

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Un\,(H)\cos m\,(\theta-\theta')\,d\,(\theta-\theta') \qquad (\beta)$$

Um dieses Integral zu ermitteln, setze ich

$$\cos\omega = x,\ \cos\psi = y$$

woraus

$$H = xy + \sin\omega\sin\psi\cos(\theta-\theta')$$

hervorgeht. Setzen wir nun erstlich $H = xy$, und sehen das zweite Glied des vollständigen Ausdrucks von H als einen Zuwachs des ersten an, so können wir diesen strenge durch das Taylorsche Theorem ermitteln, welches in diesem Falle auf eine endliche Anzahl von Gliedern führen muss. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} U_n\,(H) &= U_n\,(xy) + \frac{d Un\,(xy)}{d\,(xy)}\sin\omega\sin\psi\cos(\theta-\theta') \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d^2\, Un\,(xy)}{d\,(xy)^2}\sin^2\omega\sin^2\psi\cos^2(\theta-\theta') \qquad (\gamma) \\ &+ \ldots + \frac{1}{1.2..n}\frac{d^n\, Un\,(xy)}{d\,(xy)^n}\sin^n\omega\sin^n\psi\cos^n(\theta-\theta') \end{aligned}$$

Die Substitution dieses Ausdruckes in (β) führt auf Integrale von der Form

$$\int_0^\pi \cos^q(\theta-\theta')\cos m\,(\theta-\theta')\,d\,(\theta-\theta')$$

Aber es ist allgemein

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^q z\cos mz dz = \frac{1}{2^q}\,\frac{q\,.\,q-1\ldots\frac{q+m}{2}+1}{1\,.\,2\ldots\ldots\frac{q-m}{2}}$$

wenn $q \geqq m$, und q und m zugleich entweder gerade oder ungerade sind. In allen andern Fällen ist das Integral $= 0$. Die Substitution von (γ) in (β) giebt daher vermittelst dieses Satzes sogleich

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\sin^m\omega\,.\,\sin^m\psi}{2\,.\,4\,..\,2m}\;\frac{d^m\, Un\,(xy)}{d\,(xy)^m} \\ &+ \frac{1}{2}\;\frac{\sin^{m+2}\omega\,.\,\sin^{m+2}\psi}{2\,.\,4\ldots 2m+2}\;\frac{d^{m+2}\, Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+2}} \\ &+ \frac{1}{2.4}\;\frac{\sin^{m+4}\omega\,.\,\sin^{m+4}\psi}{2\,.\,4\ldots 2m+4}\;\frac{d^{m+4}\, Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+4}} \\ &+ \frac{1}{2.4.6}\;\frac{\sin^{m+6}\omega\,.\,\sin^{m+6}\psi}{2\,.\,4\ldots 2m+6}\;\frac{d^{m+6}\, Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+6}} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Erwägt man nun, dass

$$1 - x^2 = \sin^2\omega,\ 1 - y^2 = \sin^2\psi$$

und vergleicht man diesen Ausdruck von α_m mit der Gleichung (B), so ergiebt sich auf den ersten Anblick, dass

$$\alpha_m = \frac{\sin^m\omega\,.\,\sin^m\psi}{n-m+1\,..\,n+m}\cdot\frac{d^m\, Un\,(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^m\, Un\,(y)}{dy^m}$$

womit unsere Aufgabe gelöst ist.

Substituieren wir zum Ueberfluss diesen Werth von α_m in den obigen Ausdruck (α) für $U_n(H)$, schreiben einige der in der Summation inbegriffenen Glieder aus, und vereinigen die negativen Vielfachen von $\theta - \theta'$ mit den gleichen positiven, so bekommen wir:

$$\begin{aligned}
U_n(H) &= U_n(x) \,.\, U_n(y) \\
&+ \frac{2 \sin\omega \sin\psi}{n.n+1} \frac{d\,Un(x)}{dx} \cdot \frac{d\,Un(y)}{dy} \cos(\theta-\theta') \\
&+ \frac{2 \sin^2\omega \,.\, \sin^2\psi}{n-1.n.n+1.n+2} \frac{d^2\,Un(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2\,Un(y)}{dy^2} \cos 2(\theta-\theta') \\
&+ \frac{2 \sin^3\omega \,.\, \sin^3\psi}{n-2\ldots n+3} \frac{d^3\,Un(x)}{dx^3} \cdot \frac{d^3\,Un(y)}{dy^3} \cos 3(\theta-\theta') \\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&+ \frac{2 \sin^n\omega \,.\, \sin^n\psi}{1.2\ldots 2n} \frac{d^n\,Un(x)}{dx^n} \cdot \frac{d^n\,Un(y)}{dy^n} \cos n(\theta-\theta')
\end{aligned}$$

welches der bekannte Ausdruck dieses Coefficienten ist.

ÜBER DIE QUERSCHWINGUNGEN

GESPANNTER UND NICHT GESPANNTER

ELASTISCHER STÄBE

VON

A. SEEBECK.

Daniel Bernoulli war der Erste, welcher die Aufgabe von den Schwingungen der Stäbe aufgestellt und für den Fall, dass der Stab entweder an beiden Enden frei oder an einem Ende eingeklemmt und am andern frei sei, behandelt hat*). Zu diesen Fällen hat Euler noch vier andere hinzugefügt, nämlich den, wo beide Enden eingeklemmt sind, sowie die, wo ein Ende blos gegen ein festes Widerlager gestützt ist, während das andere entweder frei oder eingeklemmt oder ebenso gestützt ist**). Man kennt durch diese Untersuchungen die einzelnen Töne, welche der Stab erzeugen kann. Auch ist durch Poisson gezeigt worden, dass in der Zusammensetzung der einzelnen Schwingungsarten, welche den verschiedenen Tönen jedes Falles entsprechen, die vollständige Lösung des Problems dieser Bewegungen liegt***).

Die Schwingungsknoten sind für den Fall, dass der Stab an beiden Enden frei ist, von D. Bernoulli durch eine Näherung bestimmt worden, welche noch einen kleinen Fehler lässt. Riccati †) und noch vollständiger Strehlke ††) haben sie für denselben Fall durch ein Verfahren berechnet, welches jeden Grad von Annäherung zulässt. Für die übrigen Fälle fehlt diese Bestimmung noch; auch würden sich die so eben erwähnten Methoden nicht ohne Weiteres darauf übertragen lassen. Ich habe daher ein Verfahren gesucht, welches auf alle Fälle in gleicher Weise anwendbar sei und eine schnelle und beliebig grosse Annäherung gewähre, ohne doch — da es sich nur um eine einmalige Rechnung handelt — beträchtliche Umwandlungen der ohnehin unumgänglichen Gleichungen nothwendig zu machen. Ich füge die Bestimmung der

---

*) Comment. Acad. Petrop. T. XIII.

**) Acta Acad. Petrop. 1779.

***) Traité de Mécanique T. II. Auch in den umfassenderen Untersuchungen von Poisson (Mém. de l'Acad. T. VIII.) und Cauchy (Exerc. de Math. III.) kommen die Schwingungen der Stäbe vor.

†) Memorie della Società Italiana T. I.

††) Poggend. Ann. Bd. XXVII.

Wendepunkte, sowie der Stellen der stärksten Schwingung und die der stärksten Biegung hinzu, da sich zwischen der Lage dieser Punkte einige sehr einfache Beziehungen ergeben.

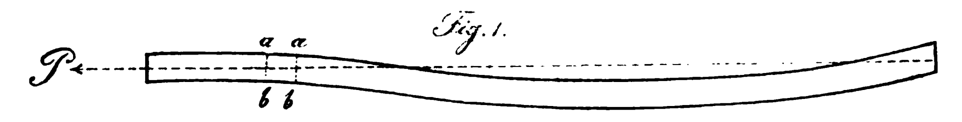
Dies wird den Inhalt des ersten Theiles dieser Abhandlung bilden. Im zweiten Theile werde ich von den Schwingungen gespannter Stäbe handeln. Zuvor aber sollen die Grundgleichungen entwickelt werden, aus welchen beide Fälle abzuleiten sind.

§. 1.

Gleichgewicht eines gespannten Stabes im Zustande der Biegung.

Es werde ein prismatischer Stab, dessen Querschnitt bh sehr klein im Vergleich zur Länge l ist, durch eine Kraft P in der Längenrichtung gespannt, und zwar so, dass alle Fasern gleich stark gespannt sind, also auf eine Faserschicht, deren Breite b und deren Dicke $d\omega$ ist, die spannende Kraft $P\frac{d\omega}{h}$ kommt. Die Resultante aller dieser Kräfte geht durch den Schwerpunkt des Querschnitts. Die durch diesen Punkt gezogene Axe des Stabes werde als Linie der x angenommen. Der Einfachheit wegen will ich zunächst voraussetzen, der Querschnitt des Stabes sei ein Rechteck, b seine Breite, h seine Dicke.

Jetzt werde der Stab in der Ebene xh unendlich wenig gebogen (Fig. 1.), so dass die Ablenkung y, die Neigung $\frac{dy}{dx}$ und die Krümmung



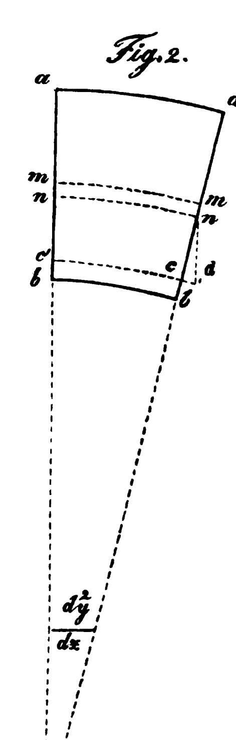
$\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich klein ist, auch dx und P als constant zu betrachten sind. Diese Biegung werde hervorgebracht durch ein System von Kräften, welche in der Richtung der Dicke h wirken, indem an jedem Theilchen $bhdx$ eine Kraft Xdx wirkt, wo X eine beliebige Function von x ist. X werde positiv gerechnet, wenn es y zu vergrössern sucht.

Durch die Biegung haben die bereits wegen P gedehnten Fasern entweder eine weitere Verlängerung oder eine Verkürzung, also eine Veränderung ihrer Spannung erlitten. Es wird aber irgend eine Faserschicht geben oder zu denken sein, deren Spannung ungeändert geblieben ist. Die Entfernung dieser Schicht, nn, von der mittlern Schicht, mm, sei $= c$.

Ist dann *aabb* Fig. 2. ein Theilchen *bhdx*, so erleidet eine Faserschicht $c'c$, deren Dicke $d\omega$ und deren Entfernung von der mittlern Schicht $mc = \omega$ ist, eine Verlängerung oder Verkürzung, indem aus der Länge $c'd = dx$ die Länge $c'c = dx - (\omega - c)\frac{d^2y}{dx}$ wird. Diese Aenderung setzt eine Kraft voraus, welche dem Querschnitt $bd\omega$ und der Aenderung selbst proportional, der Länge dx aber umgekehrt proportional ist, also $= - mb\frac{d^2y}{dx^2}(\omega - c)\,d\omega$ zu setzen ist, wo m ein Erfahrungscoefficient ist, welcher bekanntlich der Elasticitätsmodulus genannt wird. Fügt man diese Kraft zu der schon durch die Spannung P vorhandenen hinzu, so ist die Schicht $c'c$ oder $b\,d\omega\,dx$ mit der Kraft

$$\frac{P}{h}\,d\omega - mb\frac{d^2y}{dx^2}(\omega - c)\,d\omega$$

gespannt.



Um die Spannung des ganzen Theilchens *aabb* oder *bhdx* zu erhalten, hat man diesen Ausdruck nach ω zwischen den Grenzen $-\frac{h}{2}$ und $+\frac{h}{2}$ zu integriren. Dies giebt P, indem $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich klein ist. Um aber den Angriffspunkt dieser Kraft zu bestimmen, hat man ihr Moment Pd in Beziehung auf irgend eine Faserschicht, z. B. in Beziehung auf die mittlere mm zu nehmen. Dies erhält man, wenn man den vorigen Ausdruck mit ω multipliciert und dann zwischen den Grenzen $-\frac{h}{2}$ und $+\frac{h}{2}$ integrirt. Dadurch wird

$$Pd = \frac{P}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\omega d\omega - mb\frac{d^2y}{dx^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\omega^2 - c\omega)\,d\omega$$

$$Pd = -\frac{mbh^3}{12}\frac{d^2y}{dx^2}$$

Ist der Stab nicht ein Parallelepipedum, so hat man b als eine Function von ω mit unter das Integralzeichen zu setzen. Ist z. B. der Querschnitt ein Kreis, so wird $b = \sqrt{r^2 - \omega^2}$, und die Integration zwischen den Grenzen $\pm r$ giebt $Pd = -\frac{mr^4\pi}{4}\frac{d^2y}{dx^2}$. Ueberhaupt aber ist für $-Pd$ das elastische Moment zu setzen, welches allgemein durch $a\frac{d^2y}{dx^2}$ bezeichnet werden möge, so dass für rechteckige Stäbe $a = \frac{mbh^3}{12}$ und für cylindrische $a = \frac{mr^4\pi}{4}$.

Im Zustande des Gleichgewichts muss die Summe der statischen Momente in Beziehung auf jeden Punkt der Linie ab, z. B. in Beziehung auf m, $= 0$ sein. Diese Momente sind aber 1) das elastische Moment $-a\frac{d^2y}{dx^2}$, 2) das Moment der am Ende des Stabes wirkenden Spannung P, also Py, und 3) das Moment aller Kräfte Xdx von ab bis an das Ende des Stabes, also $Q\,(x-u)$, wenn man mit Q die Resultante aller dieser Kräfte und mit u die Abscisse ihres Angriffspunktes bezeichnet. Es ist aber $Q=\int Xdx$ und $Qu=\int xXdx$, beide Integrale von o bis x genommen, wenn der Anfangspunkt der Abscissen in das Ende des Stabes verlegt wird. Man hat daher als Bedingung des Gleichgewichts am gespannten und gebogenen Stabe:

$$\text{(I.)}\qquad -a\frac{d^2y}{dx^2}+Py+x\int Xdx=\int xXdx=0$$

Differentiirt man diese Gleichung, so erhält man

$$\text{(II.)}\qquad -a\frac{d^3y}{dx^3}+P\frac{dy}{dx}+\int Xdx=0$$

und durch nochmaliges Differentiieren

$$\text{(III.)}\qquad -a\frac{d^4y}{dx^4}+P\frac{d^2y}{dx^2}+X=0$$

§. 2.

Gleichung für die Schwingungen eines gespannten Stabes.

Der gebogene Stab sei im Zustande der Bewegung, indem seinen Theilen eine beliebige Ablenkung und Anfangsgeschwindigkeit ertheilt ist, während jetzt keine Kräfte weiter auf ihn wirken, als die aus der Biegung selbst entspringenden, so wie die an den beiden Enden angebrachten Longitudinal- und Transversalkräfte, welche theils den Stab spannen, theils seine Enden in der Befestigung halten. Diese Kräfte geben für jedes Theilchen $bhdx$ die beschleunigende Kraft $-Xdx$ *). Bezeichnet daher $-p$ das Gewicht einer Längeneinheit des Stabes, also pdx das Gewicht des beschleunigten Theilchens, so hat man die Bewegungsgleichung

*) Hierbei ist vorausgesetzt, dass die elastische Kraft während der Bewegung denselben Werth habe, wie im Zustande des Gleichgewichts. Diese Voraussetzung ist nicht vollkommen streng, theils wegen des von Wertheim geltend gemachten Einflusses der durch die Zusammendrückung entwickelten Wärme, theils auch wohl wegen der von W. Weber beobachteten elastischen Nachwirkung. (Poggend. Ann. Bd. 34 u. 54.) Beide Einflüsse kommen einer Verminderung von m gleich. Ich habe an einem andern Orte (Programm der technischen Bildungsanstalt zu Dresden, 1846) etwas mehr über diesen Gegenstand gesagt.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Xg}{p}$$

oder, wenn man für X seinen Werth aus der Gleichung (III.) einsetzt,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ag}{p}\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{Pg}{p}\frac{d^2y}{dx^2}$$

Diese Gleichung giebt, wenn $a = 0$ gesetzt wird, die Schwingungen einer vollkommen biegsamen Saite, und wenn man $P = 0$ setzt, die eines nicht gespannten Stabes.

Es hat diese Gleichung unendlich viele besondere Integrale, entsprechend den einzelnen Tönen, welche der gespannte Stab geben kann. Da jeder Ton in einer periodischen Bewegung besteht und eine solche stets auf ein Glied oder auch auf viele Glieder von der Form $A \sin(nt + \tau)$ zurückgeführt werden kann, diese Bewegung aber voraussetzt, dass $\frac{d^2y}{dt^2} = - n^2y$ sei, so wird man die den einzelnen Tönen entsprechenden Bewegungen erhalten, wenn man annimmt, die Biegung sei von der Art, dass

$$\frac{Xg}{p} = n^2y$$

wird, wo n die Anzahl der Schwingungen in der Zeit 2π bedeutet. Dadurch geht die Gleichung (III.) über in

$$n^2y = \frac{ag}{p}\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{Pg}{p}\frac{d^2y}{dx^2}$$

woraus die Werthe, welche n annehmen kann, zu bestimmen sind.

Das allgemeine Integral der letzten Gleichung ist

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + C \sin \beta x + D \cos \beta x \qquad \text{(IV.)}$$

wenn man mit $\pm \alpha$ und $\pm \beta\sqrt{-1}$ die vier Wurzeln der Gleichung

$$n^2 = \frac{ag}{p}\lambda^4 - \frac{Pg}{p}\lambda^2$$

bezeichnet, so dass

$$\alpha^2 = \quad \frac{P}{2a} + \sqrt{\frac{P^2}{4a^2} + \frac{n^2p}{ag}}$$

$$\beta^2 = -\frac{P}{2a} + \sqrt{\frac{P^2}{4a^2} + \frac{n^2p}{ag}}$$

Man sieht sogleich, dass α und β stets reell sind, sowohl für positive Werthe von P, d. h. wenn die Spannung den Stab dehnt, als auch für negative, d. h. wenn diese Kraft ihn in der Längenrichtung zusammendrückt.

Es soll nun die Gleichung (IV.) zuerst für nicht gespannte, sodann für gespannte Stäbe behandelt werden.

ERSTER THEIL.

Bestimmung der ausgezeichneten Punkte an schwingenden nicht gespannten Stäben.

§. 3.

Grundgleichungen.

Indem man $P = 0$ setzt, wird $\alpha = \beta$, und die Gleichung (IV.) geht über in:

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + C \sin \alpha x + D \cos \alpha x \qquad (1.)$$

wo

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{n^2 p}{ag}} \qquad (2.)$$

Durch die Annahmen, welche über die beiden Enden des Stabes gemacht werden, erhält man vier Gleichungen, durch welche man sowohl α und daher die Schwingungsmenge n, als auch drei von den Constanten A, B, C, D, im Verhältniss zur vierten, also die Gestalt des schwingenden Stabes bestimmen kann.

Ist nämlich 1) ein Ende fest eingeklemmt, so hat man sich an diesem Ende eine transversale Kraft und zugleich ein Kräftepaar so angebracht zu denken, dass dadurch beständig

$$y = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} = 0$$

bleibt.

Ist 2) ein Ende frei, so hat man sich hier weder eine Kraft noch ein Kraftmoment zu denken, d. h. es wird hier sowohl $\int Xdx = 0$, als auch $x\int Xdx - \int xXdx = 0$, daher nach den Gleichungen (I.) und (II.)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ und } \frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

Ist 3) ein Ende gegen ein festes Widerlager angestemmt oder mit einer Axe versehen, so dass der Stab sich um dieses Ende hebelartig drehen kann, so kommt diese Art der Befestigung einer Kraft gleich, welche beständig

$$y = 0$$

macht; und da in den Gleichgewichtsgleichungen des §. 1. das Moment in Beziehung auf diesen Punkt, also $x\int Xdx - \int xXdx = 0$ sein muss, so hat man zugleich aus (II.)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Nach diesen Bedingungen sind nun die sechs Fälle, welche vorkommen können, zu behandeln, nämlich:

1) ein Ende eingeklemmt, das andere frei,
2) beide Enden frei,
3) beide Enden eingeklemmt,
4) ein Ende angestemmt, das andere frei,
5) ein Ende angestemmt, das andere eingeklemmt,
6) beide Enden angestemmt.

§. 4.

Erster Fall: Ein Ende eingeklemmt, das andere frei.

1) Schwingungsmenge.

Wenn man das freie Ende als Anfangspunkt der Abscissen nimmt, so hat man nach dem vorhergehenden §., wenn $x = 0$ gesetzt wird, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Es giebt daher die Gleichung (1.)

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A + B - D \\ 0 &= A - B - C \end{aligned}\right\} \qquad (3.)$$

Wegen der Befestigung des andern Endes wird $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$, wenn man $x = l$ setzt, also

$$0 = Ae^{al} + Be^{-al} + C \sin\, al + D \cos\, al$$
$$0 = Ae^{al} - Be^{-al} + C \cos\, al - D \sin\, al$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man in Berücksichtigung von (3.)

$$A\,(e^{al} + \cos\, al) = B \sin\, al \qquad (4.)$$

Eben so durch Subtraction:

$$B\,(e^{-al} + \cos\, al) = -A \sin\, al$$

Multipliciert man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man:

$$\cos\, al = -\frac{2}{e^{al} + e^{-al}} \qquad (5.)$$

wofür man auch setzen kann:

$$\cos\, al = -2\,(e^{-al} - e^{-3al} + e^{-5al} - \ldots) \qquad (5^*.)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung, d. h. die Werthe al, welche derselben Genüge thun, können, da der Cosinus negativ ist, nur im 2[ten], 3[ten], 6[ten], 7[ten] etc. Quadranten liegen. Man kann sie in jeder beliebigen Annäherung berechnen. Die erste wird am leichtesten gefunden, wenn man die Gleichung (5.) unter die Form setzt:

$$-1 = \frac{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}{2} \cdot \frac{e^{\alpha l\sqrt{-1}} + e^{-\alpha l\sqrt{-1}}}{2}$$

daher

$$-1 = 1 - \frac{4\alpha^4 l^4}{1.2.3.4} + \frac{16\alpha^8 l^8}{1.2\ldots 8} - \frac{64\alpha^{12} l^{12}}{1.2\ldots\ldots 12} + \text{etc.}$$

Diese Reihe convergiert, wenn αl im zweiten oder auch im dritten Quadranten liegt, so schnell, dass man die Glieder, welche die 12te und höhere Potenzen von αl enthalten, zunächst vernachlässigen kann. Dies giebt den ersten Werth von $\alpha l = 1{,}8752..$ Setzt man den so erhaltenen Näherungswerth in die rechte Seite der Gleichung (5*.) ein, so erhält man einen Werth von $\cos \alpha l$, welcher αl genauer giebt. Diesen neuen Werth von αl kann man auf dieselbe Weise zur Berechnung eines noch genaueren benutzen und auf diese Weise die Annäherung zu jedem beliebigen Grade fortsetzen. Man erhält auf diese Weise $\alpha l = 1{,}87510..$ oder $0{,}59686.. \times \pi$. Für die höheren Töne, den zweiten mit eingeschlossen, wird $e^{-\alpha l}$ und daher $\cos \alpha l$ so klein, dass αl wenig von $\frac{2i-1}{2}\pi$ verschieden wird. Dieser erste Näherungswerth giebt dann mit Hülfe der Gleichung (5*.) $\cos \alpha l$ genauer und durch Fortsetzung desselben Verfahrens sehr schnell αl in grosser Annäherung. Es möge durch $\varepsilon_i \pi$ die i^{te} Wurzel der Gleichung (5.) bezeichnet werden, so erhält man durch das angegebene Verfahren:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= 0{,}59686..\\
\varepsilon_2 &= 1{,}49418..\\
\varepsilon_3 &= 2{,}50025..\\
\varepsilon_4 &= 3{,}49999..\\
\varepsilon_i &= \frac{2i-1}{2}
\end{aligned}$$

Setzt man für α seinen Werth $\frac{\varepsilon_i \pi}{l}$ in die Gleichung (2.) ein, so erhält man für die Anzahl der Schwingungen in der Zeit 2π den Ausdruck

$$n = \frac{\varepsilon_i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{ag}{p}} \qquad (6.)$$

2) Gestalt des Stabes.

Aus (5.) erhält man:

$$\sin \alpha l = \pm \frac{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}$$

wo das obere Zeichen für die ungeraden, das untere für die geraden Werthe von i gilt. Durch diese und die Gleichung (5.) erhält man aus (4.):

$$B = \pm A e^{\alpha l}$$

und daher aus (3.):

$$C = A\,(1 \mp e^{al})$$
$$D = A\,(1 \pm e^{al})$$

Daher geht die Gleichung (1.) für den gegenwärtigen Fall über in:

$$y = A\,\{e^{ax} \pm e^{a(l-x)} + (1 \mp e^{al}) \sin ax + (1 \pm e^{al}) \cos ax\} \qquad (7.)$$

3) Knoten.

Die Gleichung für die Lage der Knoten erhält man, wenn $y = 0$ gesetzt wird. Dies giebt:

$$0 = e^{ax} \pm e^{a(l-x)} + \sin ax + \cos ax \mp e^{al}\ (\sin ax - \cos ax)$$

Um aus dieser Gleichung x zu bestimmen, multipliciere man sie mit $\pm e^{-al}$ und setze zur Abkürzung

$$\vartheta = \pm e^{-a(l-x)} + e^{-ax} \pm e^{-al}\,(\sin ax + \cos ax) \qquad (8.)$$

alsdann ist

$$\sin ax - \cos ax = \vartheta$$

oder

$$\sin\left(ax - \tfrac{\pi}{4}\right) = \vartheta\sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad (9.)$$

Nun ist nicht nur für alle Töne, mit Ausnahme des ersten, welcher keine Knoten giebt, e^{-al} sehr klein, sondern auch für die höheren Töne und für solche Knoten, welche den Enden nicht sehr nahe liegen, $e^{-a(l-x)}$ und e^{-ax} noch so klein, dass ϑ nach (8.) einen unbeträchtlichen Werth annimmt. Daher zeigt die Gleichung (9.), dass für den 2ten, 3ten, ...$k$ten Knoten $ax - \frac{\pi}{4}$ wenig von π, 2π... $(k-1)\pi$ verschieden ist, also ax nahe $= \frac{4k-3}{4}\pi$ wird. Setzt man diesen ersten Näherungswerth in die rechte Seite der Gleichung (8.), so erhält man einen Werth für ϑ, mit welchem die Gleichung (9.) genauer berechnet werden kann. Auf diese Weise kann die Annäherung beliebig fortgesetzt werden.

Dies Verfahren ist nur für den Knoten, welcher dem freien Ende zunächst liegt, nicht anwendbar, indem hier x ein so kleiner Theil von l ist, dass e^{-ax} und daher ϑ nicht sehr klein ist. Um für diesen Fall einen ersten Näherungswerth zu erhalten, kann man zunächst ϑ angenähert $= e^{-ax}$ setzen, indem die beiden anderen Glieder der Gleichung (8.) sehr klein sind. Dann wird

$$0 = e^{-ax} - \sin ax + \cos ax$$

oder

$$0 = 1 - ax + \frac{a^4 x^4}{1.2.3.4} - \frac{a^5 x^5}{1.2..5} + \cdots$$

woraus man leicht ersieht, dass der kleinste Werth von ax nicht viel über 1, oder etwas näher ungefähr 1,04 ist. Mit diesem Werthe kann man ϑ nach (8.) genauer berechnen und dann die Näherung eben so wie in den übrigen Fällen zu jedem beliebigen Grade fortsetzen.

Ein zweiter Fall, wo das erste Näherungsverfahren nicht zureichen würde, könnte dann eintreten, wenn $e^{-\alpha(l-x)}$ nicht sehr klein würde. Jedoch überzeugt man sich durch eine ähnliche Anwendung der Reihen leicht, dass $\alpha\,(l - x)$ stets grösser als 3 sein muss und daher $e^{-\alpha(l-x)}$ klein genug wird, um das erste Verfahren zuzulassen.

Auf diese Weise sind folgende Entfernungen der Knoten vom freien Ende berechnet, die Länge des Stabes als Einheit genommen.

	1ster Knoten	2ter Knoten	3ter Knoten	kter Knoten	vorletzter Knoten	letzter Knoten
erster Ton	kein Knoten					
zweiter Ton	0,2261					
dritter Ton	0,1321	0,4999				
vierter Ton	0,0944	0,3558	0,6439			
iter Ton	$\frac{1,3222}{4i-2}$	$\frac{4,9820}{4i-2}$	$\frac{9,0007}{4i-2}$	$\frac{4k-3}{4i-2}$	$\frac{4i-10,9993}{4i-2}$	$\frac{4i-7,0175}{4i-2}$

4) Wendepunkte.

Die Wendepunkte des Stabes erhält man, wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ gesetzt wird. Sie könnten ganz eben so wie die Knoten berechnet werden. Eine sehr einfache Beziehung zwischen der Lage dieser beiderlei Punkte ergiebt sich aber auf folgende Weise.

Wenn man nicht, wie bisher, das freie, sondern das eingeklemmte Ende als Anfangspunkt der Abscissen nimmt, so wird y und $\frac{dy}{dx} = 0$, wenn $x = 0$ ist, und $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, wenn $x = l$ ist. Führt man die Elimination mit den vier dadurch entstehenden Gleichungen ganz eben so aus, wie vorhin für den andern Anfangspunkt, so erhält man:

$$y = A\,\{e^{\alpha x} \pm e^{\alpha(l-x)} - (1 \mp e^{\alpha l}) \sin \alpha x - (1 \pm e^{\alpha l}) \cos \alpha x\}$$

und hieraus:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2 A\,\{e^{\alpha x} \pm e^{\alpha(l-x)} + (1 \mp e^{\alpha l}) \sin \alpha x + (1 \pm e^{\alpha l}) \cos \alpha x\}$$

Setzt man diesen letzten Werth $= 0$, so erhält man für die Wendepunkte dieselbe Gleichung, welche oben für die Knoten erhalten wurde. Es liegen also die Wendepunkte vom festen Ende genau in denselben Entfernungen, wie die Knoten vom freien Ende. Mit Ausnahme des ersten Knotens (zunächst dem freien Ende) und des letzten Wendepunktes (zunächst dem festen Ende) liegt immer ein Knoten und ein Wendepunkt nahe neben einander, ohne jedoch genau zusammen-

zufallen, und es geht abwechselnd einmal der Knoten dem Wendepunkte, und einmal dieser jenem etwas voraus.

Auch sieht man, dass überhaupt die Gleichung für $\frac{d^2y}{dx^2}$, auf das feste Ende bezogen, sich von der für y, auf das freie Ende bezogen, nur durch den constanten Factor α^2 unterscheidet, und vice versa.

5) Bäuche.

Die Bäuche, d.h. die Stellen der stärksten Schwingung werden erhalten, wenn man $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt. Das giebt, wenn man die Gleichung (7.) anwendet,

$$0 = e^{\alpha x} \mp e^{\alpha(l-x)} + (1 \mp e^{\alpha l}) \cos \alpha x - (1 \pm e^{\alpha l}) \sin \alpha x$$

oder, wenn man diese Gleichung mit $\pm e^{-\alpha l}$ multipliciert und

$$\pm e^{-\alpha(l-x)} - e^{-\alpha x} \mp e^{-\alpha l} (\sin \alpha x - \cos \alpha x) = \delta$$

setzt,

$$\sin \alpha x + \cos \alpha x = \delta$$
$$\sin \left(\alpha x + \frac{\pi}{4}\right) = \delta \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

woraus x ganz auf dieselbe Weise wie bei den Knoten berechnet werden kann. Hier ist δ stets so klein, dass es für keinen Bauch nöthig wird, sich der Reihen zur Bestimmung des ersten Näherungswerthes zu bedienen. Für den k^{ten} Bauch erhält man angenähert $\alpha x = \frac{4k-1}{4}\pi$ und daher für den i^{ten} Ton angenähert:

$$\frac{x}{l} = \frac{4k-1}{4i-2}$$

6) Die Stellen der stärksten Biegung.

Die Stellen der stärksten Biegung werden erhalten, wenn man $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ setzt. Wählt man dazu die Gleichung der Gestalt, wo der Anfangspunkt der Abscissen in das eingeklemmte Ende verlegt ist, so erhält man ganz dieselbe Gleichung, welche, auf das freie Ende bezogen, für die Bäuche erhalten wurde. Es haben also die Stellen der stärksten Biegung vom festen Ende dieselben Entfernungen, wie die der stärksten Schwingung vom freien Ende.

§. 5.

Zweiter Fall: Beide Enden frei.

1) Schwingungsmenge.

Die Bedingung, dass beide Enden frei sind, giebt $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, wenn $x = 0$ oder $x = l$ gesetzt wirde. Man hat daher:



$$0 = A + \quad B - D$$
$$0 = A - \quad B - C$$
$$0 = Ae^{\alpha l} + Be^{-\alpha l} - C \sin \alpha l - D \cos \alpha l$$
$$0 = Ae^{\alpha l} - Be^{-\alpha l} - C \cos \alpha l + D \sin \alpha l$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von denen des vorigen Falles nur in den Vorzeichen, und es kann die Elimination der Constanten ganz eben so wie dort vollzogen werden. Man erhält dadurch zur Bestimmung von α:

$$\cos \alpha l = \frac{2}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}$$

woraus

$$\sin \alpha l = \mp \frac{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}$$

Die Werthe von αl müssen, da der Cosinus positiv ist, im 1sten, 4ten, 5ten, 9ten etc. Quadranten liegen. Dem ersten Quadranten gehört der Werth $\alpha l = 0$, welcher keine Schwingung giebt. Es liegt daher die erste geltende Wurzel im vierten Quadranten, so dass $e^{\alpha l}$ ziemlich gross und αl angenähert $\frac{2i+1}{2}\pi$ für den i^{ten} Ton wird. Mit diesem ersten Näherungswerthe kann man, ganz wie im vorigen Falle, αl genauer berechnen. Schreibt man auch hier $\varepsilon_i \pi$ für den i^{ten} geltenden Werth von αl, so ergiebt sich:

$$\varepsilon_1 = 1{,}50562..$$
$$\varepsilon_2 = 2{,}49975..$$
$$\varepsilon_3 = 3{,}50001..$$
$$\varepsilon_i = \frac{2i+1}{2}$$

Diese Werthe, in die Gleichung (6.) eingesetzt, geben die Töne des an beiden Enden freien Stabes.

2) Gestalt.

Die angedeutete Elimination der Constanten führt auf folgende Gleichung für die Gestalt des Stabes:

$$y = A\,\{e^{\alpha x} \pm e^{\alpha(l-x)} + (1 \mp e^{\alpha l}) \sin \alpha x + (1 \pm e^{\alpha l}) \cos \alpha x\}$$

wo wieder das obere Zeichen für die ungeraden, das untere für die geraden Töne gilt.

Dies ist zwar dieselbe Gleichung, wie im vorigen Falle (7.), drückt aber hier eine ganz andere Gestalt aus, weil α einen ganz andern Werth hat.

3) Knoten.

Setzt man $y = 0$, so erhält man zur Bestimmung der Knoten dieselbe Gleichung, wie im vorigen Falle, und kann daraus $\frac{x}{l}$ ganz eben so, wie dort, berechnen. Diese Werthe, welche wegen der Verschiedenheit von α nicht mit den dortigen identisch sind, findet man in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Sie brauchen natürlich nur für die eine Hälfte des Stabes angegeben zu werden.

	1ster Knoten	2ter Knoten	3ter Knoten	k^{ter} Knoten
erster Ton	0,2242			
zweiter Ton	0,1321	0,5000		
dritter Ton	0,0944	0,3558		
i^{ter} Ton	$\frac{1,3222}{4i+2}$	$\frac{4,9820}{4i+2}$	$\frac{9,0007}{4i+2}$	$\frac{4k-3}{4i+2}$

Es sind dies jene Zahlen, welche zuerst in einer unvollkommenen Annäherung von D. Bernoulli, nachher genauer von Riccati, so wie von Strehlke berechnet und von dem Letzteren mit einer grossen Anzahl sehr genauer Messungen verglichen worden sind. Jedoch kommt in diesen letzteren, sonst sehr genauen Rechnungen ein Versehen in einem Vorzeichen bei den geraden Knoten vor, welches besonders beim zweiten Knoten einen merklichen Einfluss übt. Berichtigt man dasselbe, so differieren Strehlke's Messungen noch bedeutend weniger von der Rechnung, als dies bei seinen Rechnungsangaben der Fall ist — ein gutes Kennzeichen für die Zuverlässigkeit der mitgetheilten Beobachtungen.

4) Wendepunkte.

Setzt man $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, so erhält man zur Bestimmung der Wendepunkte:

$$0 = e^{\alpha x} \pm e^{\alpha(l-x)} - (1 \mp e^{\alpha l}) \sin \alpha x - (1 \pm e^{\alpha l}) \cos \alpha x$$

daher, wenn man mit $\mp e^{-\alpha l}$ multipliciert und

$$\mp e^{-\alpha(l-x)} - e^{-\alpha x} \pm e^{-\alpha l} (\sin \alpha x + \cos \alpha x) = \delta$$

setzt,

$$\sin\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right) = \delta \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Der kleinste Werth von αx liegt im dritten Quadranten, wovon man sich durch Anwendung der Reihen, ähnlich wie in §. 4. unter 3), überzeugen kann. Daher ist δ stets sehr klein, und es wird angenähert für den k^{ten} Wendepunkt:

$$\alpha x = \frac{4k+1}{4} \pi$$

Setzt man die Annäherung auf dieselbe Weise wie bei den Knoten fort, so erhält man für die Entfernung der Wendepunkte vom nächsten Ende folgende Werthe:

	1ster Wendepunkt	2ter Wendepunkt	k^{ter} Wendepunkt
erster Ton	kein Wendepunkt		
zweiter Ton	0,5000		
dritter Ton	0,3593		
i^{ter} Ton	$\frac{5,0175}{4i+2}$	$\frac{8,9993}{4i+2}$	$\frac{4k+1}{4i+2}$

Den äussersten Knoten entsprechen keine Wendepunkte; den übrigen liegt allemal ein Wendepunkt sehr nahe, auch hier so, dass einmal der Knoten dem Wendepunkte, das anderemal der letztere dem erstern vorausgeht, ausser in der Mitte bei den geraden Tönen, wo natürlich beide zusammenfallen. Immer liegen die Wendepunkte unter oder über der Axe, jenachdem das ihnen nächste Ende des Stabes unter oder über derselben liegt.

5) Bäuche.

Setzt man $\frac{dy}{dx} = 0$, so erhält man zur Bestimmung der Bäuche:

$$0 = e^{\alpha x} \mp e^{\alpha(l-x)} + (1 \mp e^{\alpha l}) \cos \alpha x - (1 \pm e^{\alpha l}) \sin \alpha x$$

und wenn man mit $\pm e^{-\alpha l}$ multipliciert und

$$\pm e^{-\alpha(l-x)} - e^{-\alpha x} \pm e^{-\alpha l} (\sin \alpha x - \cos \alpha x) = \delta$$

setzt,

$$\sin(\alpha x + \tfrac{\pi}{4}) = \delta \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Daher wird für den k^{ten} Bauch in erster Annäherung:

$$\alpha x = \frac{4k-1}{4}\pi,$$

womit man, wie in den übrigen Fällen, genauer rechnen kann. Für den k^{ten} Bauch des i^{ten} Tones wird angenähert:

$$\frac{x}{l} = \frac{4k-1}{4i+2}$$

6) Stellen der stärksten Biegung.

Für die Stellen der stärksten Biegung erhält man, indem $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ gesetzt wird,

$$0 = e^{\alpha x} \mp e^{\alpha(l-x)} - (1 \mp e^{\alpha l}) \cos \alpha x + (1 \pm e^{\alpha l}) \sin \alpha x$$

und indem man

$$\mp e^{-\alpha(l-x)} + e^{-\alpha x} \mp e^{-\alpha l} (\sin \alpha x - \cos \alpha x) = \delta$$

setzt,

$$\sin(\alpha x + \tfrac{\pi}{4}) = \delta \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Dies giebt in erster Annäherung dieselben Werthe wie für die Bäuche, aber wegen der Verschiedenheit von δ fallen auch hier die Stellen der stärksten Biegung mit den Bäuchen nicht genau zusammen, ausser auf der Mitte des Stabes bei den ungeraden Tönen.

§. 6.

Dritter Fall: Beide Enden eingeklemmt.

1) Schwingungsmenge und Gestalt.

Die Gleichung (1.) muss $=0$ werden, wenn man $x=0$ oder $x=l$ setzt; zugleich wird dann $\frac{dy}{dx}=0$ und man hat daher:

$$0 = A + B + D$$
$$0 = A - B + C$$
$$0 = Ae^{\alpha l} + Be^{-\alpha l} + C \sin \alpha l + D \cos \alpha l$$
$$0 = Ae^{\alpha l} - Be^{-\alpha l} + C \cos \alpha l - D \sin \alpha l$$

Derselbe Algorithmus wie in den vorhergehenden Fällen führt auf die Gleichungen zur Bestimmung der Schwingungsmenge und der Gestalt

$$\cos \alpha l = \frac{2}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}$$

$$y = A \{e^{\alpha x} \pm e^{\alpha(l-x)} - (1 \mp e^{\alpha l}) \sin \alpha x - (1 \pm e^{\alpha l}) \cos \alpha x\}$$

Die erstere Gleichung ist die nämliche wie im nächstvorhergehenden Falle und giebt daher genau dieselbe Tonreihe, als da der Stab an beiden Enden frei war, wogegen die Gestalt von der in jenem Falle ganz verschieden ist.

2) Knoten, Wendepunkte, Bäuche und Stellen der stärksten Biegung.

Setzt man $y=0$, so erhält man zur Bestimmung der Knoten dieselbe Gleichung, wie im vorhergehenden Falle zur Bestimmung der Wendepunkte. Da nun α in beiden Fällen genau dieselben Werthe hat, so sieht man, dass bei dem an beiden Enden eingeklemmten Stabe die Knoten dieselben Stellen einnehmen, an welchen, wenn der Stab an beiden Enden frei ist, die Wendepunkte liegen.

Eben so findet sich, dass in jenem Falle die Wendepunkte eben so liegen, wie in diesem die Knoten. Eine gleiche Vertauschung der Lage findet für die Bäuche im einen und die Stellen der stärksten Biegung im andern Falle statt.

Ueberhaupt gilt für die Gestalt, welche der Stab in diesen beiden Fällen annimmt, die Beziehung, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ des einen Falles sich von y des andern Falles nur durch den constanten Factor α^2 unterscheidet.

Da der Stab bei der Befestigung seiner Enden nicht gebogen werden kann, ohne zugleich etwas gedehnt zu werden, so ist streng genommen im vorliegenden Falle ausser der Kraft $a\frac{d^4y}{dx^4}$ noch eine Kraft $-q\frac{d^2y}{dx^2}$ vorhanden (vgl. § 1.), wo q den veränderlichen Werth dieser Spannung bedeutet. Da aber für unendlich kleine Schwingungen q unendlich klein gegen a, und $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine unendlich kleine Grösse derselben Ordnung wie $\frac{d^4y}{dx^4}$ ist, so ist $q\frac{d^2y}{dx^2}$ gegen $a\frac{d^4y}{dx^4}$ zu vernachlässigen.

§. 7.

Vierter Fall: Ein Ende frei, das andere angestemmt.

Nimmt man das freie Ende als Anfangspunkt der Abscissen und setzt $x = 0$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A + B - D \\ 0 &= A - B - C \end{aligned}\right\} \quad (10.)$$

Setzt man aber $x = l$, so muss $y = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ werden, also:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Ae^{\alpha l} + Be^{-\alpha l} + C\sin\alpha l + D\cos\alpha l \\ 0 &= Ae^{\alpha l} + Be^{-\alpha l} - C\sin\alpha l - D\cos\alpha l \end{aligned}\right\} \quad (11.)$$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man:

$$B = -Ae^{2\alpha l}$$

Daher wegen (10.)

$$C = A(1 + e^{2\alpha l})$$
$$D = A(1 - e^{2\alpha l})$$

Subtrahiert man die Gleichungen (11.) von einander, so erhält man:

$$0 = C\sin\alpha l + D\cos\alpha l$$

$$\operatorname{tg}\alpha l = -\frac{D}{C} = \frac{e^{2\alpha l} - 1}{e^{2\alpha l} + 1}$$

woraus sich ergiebt:

$$\sin 2\alpha l = \frac{e^{2\alpha l} - e^{-2\alpha l}}{e^{2\alpha l} + e^{-2\alpha l}}$$

Setzt man ferner die Werthe von B, C, D in (1.) ein, so erhält man:

$$y = A\{e^{\alpha x} - e^{\alpha(2l-x)} + (1 + e^{2\alpha l})\sin\alpha x + (1 - e^{2\alpha l})\cos\alpha x\}$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen mit den entsprechenden des §. 5., so sieht man, dass sie sich von jenen nur darin unterscheiden, dass hier $2l$ anstatt l steht und das obere Vorzeichen weggefallen ist. Daraus sieht man 1) dass die Töne des gegenwärtigen Falles genau dieselbe Höhe haben, wie die geraden Töne eines doppelt so langen Stabes, der an beiden Enden frei wäre, und 2) dass dabei die Gestalt des Stabes

die nämliche ist, wie für jede Hälfte dieses längeren Stabes. Dies liegt darin, dass die Mitte eines Stabes, der an beiden Enden frei ist, bei den geraden Tönen zugleich Knoten und Wendepunkt sein muss, also, indem hier y und $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist, dieselbe Eigenschaft geniesst, wie ein angestemmtes Ende.

Damit ist nicht nur die Berechnung der Töne, sondern auch die der ausgezeichneten Punkte auf den früheren Fall zurückgeführt.

§. 8.

Fünfter Fall: Ein Ende eingeklemmt, das andere angestemmt.

Nimmt man das eingeklemmte Ende als Anfangspunkt der Abscissen und eliminiert die Constanten ganz wie im vorigen §., so erhält man zur Berechnung der Töne dieselbe Gleichung, wie im vorhergehenden Falle, und zur Bestimmung der Gestalt:

$$y = A\,\{e^{\alpha x} - e^{\alpha(2l-x)} - (1 + e^{2\alpha l}) \sin \alpha x - (1 - e^{2\alpha l}) \cos \alpha x\}$$

Denkt man sich einen doppelt so langen Stab an beiden Enden eingeklemmt, und an ihm die Schwingungen mit einer ungeraden Anzahl von Knoten erzeugt, so giebt dieses die nämlichen Töne, und es hat jede Hälfte desselben die nämliche Gestalt, wie der ganze Stab im vorliegenden Falle.

Es versteht sich, dass alle oben nachgewiesenen Beziehungen zwischen dem zweiten und dritten Falle auch für den vierten und fünften gelten.

§. 9.

Sechster Fall: Beide Enden angestemmt.

Wenn $x = 0$ gemacht wird, so wird $y = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, also:

$$0 = A + B + D$$
$$0 = A + B - D$$

also
$$D = 0 \text{ u. } B = -A$$

Setzt man diese Werthe in (1.) und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein und macht $x = l$, so wird

$$0 = A\,(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}) + C \sin \alpha l$$
$$0 = A\,(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}) - C \sin \alpha l$$

Daher

$$0 = A\,(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l})$$

und da $e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}$ nur dann $= 0$ wird, wenn $\alpha l = 0$ ist, was hier nicht in Betracht kommt, so ist

$$A = 0$$

und man behält

$$0 = C \sin \alpha l$$

C kann nicht $= 0$ sein, weil sonst y überall $= 0$ würde, es ist also

$$\sin \alpha l = 0$$
$$\alpha l = i\pi$$
$$\varepsilon_i = i$$

Für die Gestalt des Stabes hat man also:

$$y = C \sin \frac{i\pi x}{l}$$

Man sieht sogleich, dass hier die Knoten und Wendepunkte zusammenfallen und den Stab in eine Anzahl gleicher Theile theilen, so wie dass die Wendepunkte und die Punkte der stärksten Biegung in der Mitte zwischen zwei Knoten liegen.

§. 10.

Vergleichung der Stäbe mit Saiten.

Der letzte Fall bietet die meiste Analogie mit den Schwingungen der Saiten dar. Die Gleichung

$$y = C \sin \frac{i\pi x}{l}$$

ist dieselbe, auf welche man auch bei Saiten kommt, wenn man, wie Taylor, die auf jedes Theilchen wirkende Kraft proportional der Ablenkung annimmt. Denkt man sich aber die verschiedenen Schwingungen, deren der Stab fähig ist, gleichzeitig, so erhält man hier, wie bei der Saite:

$$y = \Sigma C_i \sin \frac{i\pi x}{l}$$

Dies würde also hier dieselbe Willkührlichkeit der Gestalt ausdrücken, wie bei einem absolut biegsamen, unendlich dünnen Faden, wenn es gestattet wäre, auch den Stab so dünn anzunehmen, dass die Dicke gegen $\frac{l}{i}$ für alle Werthe von i verschwindend klein bliebe.

Denkt man sich die Saite und den an beiden Enden angestemmten Stab von gleicher Schwingungsdauer und für irgend einen Augenblick von gleicher Gestalt, wie auch von gleicher Geschwindigkeit der entsprechenden Punkte, so bleibt doch diese Uebereinstimmung der Gestalt nicht während der ganzen Schwingungsdauer, weil die Bewegung eines Punktes bei der Saite durch $\Sigma c_i \sin(int + \tau_i)$, beim Stabe durch $\Sigma c_i \sin(i^2 nt + \tau_i)$ ausgedrückt wird.

Damit hängt auch folgende Verschiedenheit zusammen. Wenn auf der Saite eine Welle erregt ist, so läuft sie in unveränderter Gestalt bis zu einem Ende und wird von da mit entgegengesetzter Biegung zurückgeworfen. Wenn die Saite oder ein Theil derselben aus dem Zustande des Gleichgewichts gebracht ist, so entspringen daraus im Allgemeinen zwei entgegengesetzt laufende Wellen, und die Schwingung kann bekanntlich als das Hin- und Herlaufen dieser beiden Wellen zwischen den Enden der Saite gedacht werden. Beim Stabe ist diese Vorstellung selbst bei dem der Saite analogsten Falle nicht zulässig. Denn denkt man sich auf dem beiderseits angestemmten Stabe eine Erhöhung erregt, so kann diese Gestalt durch $\Sigma C_i \sin \frac{i\pi x}{l}$ dargestellt werden. Wenn nun das Glied $C_i \sin \frac{\pi x}{l}$ in der Zeit $\frac{\pi}{n}$ die Länge des Stabes (nach beiden Seiten) durchläuft, so durchläuft das Glied $C_i \sin \frac{i\pi x}{l}$ die Länge $\frac{l}{i}$ in der Zeit $\frac{\pi}{i^2 n}$, geht also $i$mal schneller. Man sieht daraus, dass die beiden Wellen, in welche man sich die erregte Erhöhung getheilt denken kann, ihre Gestalt im Fortlaufen beständig ändern.

Bei einer Saite überzeugt man sich leicht, dass ein Knoten stets auch Wendepunkt sein muss, und dass umgekehrt ein Punkt, der beständig Wendepunkt ist, auch Knoten sein muss, wie auch die Gestalt jeder Abtheilung zwischen zwei Knoten beschaffen sei. Eben so wenn es ein Theilchen giebt, das stets stärker abgelenkt ist, als seine Nachbartheilchen, so ist es auch stets stärker gebogen als diese, und umgekehrt, und liegt dann in der Mitte zwischen zwei Knoten. Beim Stabe gilt, für den Fall, dass er an beiden Enden angestemmt ist, dasselbe, nicht aber, wie oben gezeigt worden ist, für alle übrigen Fälle.

Die Bewegung eines Punktes des Stabes, nachdem das Gleichgewicht willkührlich gestört worden ist, wird für alle sechs Fälle dargestellt durch

$$\Sigma c_i \sin (s_i^2 nt + \tau_i)$$

Dies drückt mit Ausnahme des letzten Falles im Allgemeinen keine periodische Bewegung aus, da, allem Anscheine nach, die Werthe der s incommensurabel zu einander sind.

§. 11.

Ueber die Bedeutung der Constanten C und D.

Setzt man im zweiten und vierten Falle $x = 0$, so wird

$$y = A + B + D = 2D$$

Dasselbe gilt für den ersten Fall, wenn man die Abscissen vom freien Ende aus rechnet. Es ist daher $2D$ stets die Ablenkung am freien Ende.

In denselben Fällen wird

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\,(A - B + C) = 2\alpha C$$

Es drückt also $2\alpha C$ die Neigung am freien Ende aus.

Setzt man im dritten und fünften Falle $x = 0$, so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2\,(A + B - D) = -\,2\alpha^2 D$$

Dasselbe findet im ersten Falle statt, wenn man das eingeklemmte Ende als Anfangspunkt der x nimmt. Es drückt also $-\,2\alpha^2 D$ stets die Biegung an einem eingeklemmten Ende aus. Ebenso ist $-\,2\alpha^3 C$ der Werth, welchen $\frac{d^3y}{dx^3}$ am eingeklemmten Ende annimmt.

In der folgenden Tabelle ist für alle sechs Fälle die Lage sämmtlicher Knoten und Wendepunkte zusammengestellt und die Werthe von ε hinzugefügt, aus welchen die Anzahl der in einer Zeiteinheit statt findenden Schwingungen, N, zu berechnen ist.

TABELLE

über die Schwingungsmenge nicht gespannter Stäbe

nach der Formel $N = \frac{\varepsilon^2 \pi}{2 l^2} \sqrt{\frac{ag}{p}}$ p. Sec.

so wie

über die Lage der Knoten und Wendepunkte,

die Länge des Stabes = 1 gesetzt.

Erster Fall:

Ein Ende fest, das andere frei.

	ε	Entfernung der {Knoten vom freien / Wendepunkte vom festen} Ende: erster	zweiter	dritter	k^{ter}	vorletzter	letzter
erster Ton	0,59686						
zweiter „	1,49418	0,2261					
dritter „	2,50025	0,1321	0,4999				
vierter „	3,49999	0,0944	0,3558	0,6439			
i^{ter} „	$\frac{2i-1}{2}$	$\frac{1,3222}{4i-2}$	$\frac{4,9820}{4i-2}$	$\frac{9,0007}{4i-2}$	$\frac{4k-3}{4i-2}$	$\frac{4i-10,9993}{4i-2}$	$\frac{4i-7,0175}{4i-2}$

Zweiter und dritter Fall:

Beide Enden $\left\{\begin{matrix}\text{frei}\\ \text{fest}\end{matrix}\right\}$.

	s	Entfernung der {Knoten / Wendepunkte} vom nächsten {freien / festen} Ende: erster	zweiter	dritter	k^{ter}	Entfernung d. {Wendepunkte / Knoten} v. nächsten {freien / festen} Ende: erster	zweiter	k^{ter}
erster Ton	1,50562	0,2242						
zweiter „	2,49975	0,1321	0,5000			0,5000		
dritter „	3,50001	0,0944	0,3558			0,3593		
i^{ter} „	$\frac{2i+1}{2}$	$\frac{1,3222}{4i+2}$	$\frac{4,9820}{4i+2}$	$\frac{9,0007}{4i+2}$	$\frac{4k-3}{4i+2}$	$\frac{5,0175}{4i+2}$	$\frac{8,9993}{4i+2}$	$\frac{4k+1}{4i+2}$

Vierter und fünfter Fall:

Ein Ende angestemmt, das andere $\left\{\begin{matrix}\text{frei}\\ \text{fest}\end{matrix}\right\}$.

	s	Entfernung der {Knoten vom freien / Wendepunkte vom festen} Ende: erster	zweiter	dritter	k^{ter}	Entfer-nung d. {Wendepunkte vom freien / Knoten vom festen} Ende		
erster Ton	1,24987	0,2642						
i^{ter} „	$\frac{4i+1}{4}$	$\frac{1,3222}{4i+1}$	$\frac{4,9820}{4i+1}$	$\frac{9,0007}{4i+1}$	$\frac{4k-3}{4i+1}$	$\frac{5,0175}{4i+1}$	$\frac{8,9993}{4i+1}$	$\frac{4k+1}{4i+1}$

Sechster Fall:

Beide Enden angestemmt.

i^{ter} Ton: $s = i$; Entfernung des k^{ten} Knotens und Wendepunktes vom Ende $= \frac{k}{i}$.

ZWEITER THEIL.

Schwingungen gespannter Stäbe.

§. 12.

N. Savarts Versuche und Duhamels Theorie.

Die Schwingungen gespannter Stäbe sind hauptsächlich deshalb von Interesse, weil, streng genommen, die Saiten in diese Klasse gehören und bei der gewöhnlichen Theorie dieser Körper nur die Steifheit gegen die sehr überwiegende Spannung vernachlässigt wird. Offenbar bedarf die Schwingungsmenge, welche man nach der Taylorschen Formel berechnet, einer kleinen Correction wegen der Steifheit.

Um den Einfluss dieses Umstandes auf die Höhe des Tones gespannter Drähte zu ermitteln, hat N. Savart einige Versuchsreihen mit kurzen und ziemlich starken Drähten angestellt, die gespannt und zugleich an beiden Enden eingeklemmt waren*). Aus diesen Versuchen hat er folgende Regel gezogen. Wenn n_0 die durch den Versuch ermittelte Schwingungsmenge des nicht gespannten Drahtes, n_1 die Schwingungsmenge vermöge der blossen Spannung ist, wie sie sich aus der Taylorschen Formel mit Vernachlässigung der Steifheit ergiebt, und n die Schwingungsmenge ist, wie sie sich unter der gleichzeitigen Wirkung der Steifheit und Spannung findet, so ist

$$n^2 = n_0^2 + n^2$$

Ob dieses Gesetz genau oder nur angenähert richtig sei, kann natürlich nicht durch die Erfahrung entschieden werden, und es darf aus den Versuchen, selbst wenn sie mit der äussersten Schärfe angestellt wären, nicht geschlossen werden, dass gerade bei sehr geringer Steifheit jene Gleichung den an sich sehr kleinen Werth der Correction, welchen die Taylorsche Formel wegen dieses Einflusses zu erhalten hat, hinreichend genau angiebt. Denn angenommen, Savarts Regel sei nur angenähert richtig, so könnte man sie ausdrücken durch die Gleichung

$$\frac{n_0^2 + n_1^2}{n^2} = 1 + \delta$$

wo δ ein sehr kleiner Zahlenwerth ist. Man hätte alsdann:

$$n^2 - n_1^2 = n_0^2 - n^2\delta$$

und es würde sich fragen, ob $n^2\delta$ auch dann noch gegen n_0^2 vernachlässigt werden dürfe, wenn n_0^2 selbst sehr klein ist.

*) Ann. de Chim. et Phys. S. III. T. VI.

Duhamel hat durch eine sehr einfache Betrachtung das von Savart empirisch gefundene Resultat theoretisch herzuleiten gesucht*). Er sagt nämlich: Wenn n_1 die zur Spannung P_1 gehörende Schwingungsmenge bezeichnet, so ist bekanntlich für den vollkommen biegsamen Faden $P_1 = Kn_1^2$, wo die Constante K von der Länge und Masse der Saite abhängt. Beim steifen Drahte hat man n statt n_1, und bei der Spannung Null die Schwingungsmenge n_0. Nähme man nun an, der Draht wäre nicht steif, sondern absolut biegsam, statt dessen aber einer zweckmässigen Spannung P_0 unterworfen, so könnte man ihm dadurch dieselbe Bewegung geben, welche er seiner Steifheit verdankt und bei welcher er n_0 Schwingungen macht. Er befindet sich alsdann in dem Falle, für welchen jene Formel gilt, und man wird also haben $P_0 = Kn_0^2$ Nun braucht man nur zu der so gespannten biegsamen Saite die wirkliche Spannung P_1 hinzuzufügen, damit sie in demselben Falle wie die steife Saite sei, weil die aus der Steifheit entspringenden Kräfte durch die von der Spannung P_0 herrührenden ersetzt sind. Man kann also n nach der gewöhnlichen Formel berechnen, wenn man annimmt, die Spannung sei $P_1 + P_0$. Man hat also $P_1 + P_0 = Kn^2$, woraus $n^2 = n_1^2 + n_0^2$ wird, übereinstimmend mit Savarts Versuchen.

Diese Theorie Duhamels ist im Allgemeinen nicht richtig, denn man kann zwar durch die Spannung P_0 stets dieselbe Schwingungsmenge, nicht aber im Allgemeinen dieselbe relative Bewegung der Theile erzeugen, wie durch die aus der Steifheit entspringenden Kräfte. Die Voraussetzung, dass diese letzteren Kräfte eben so gut durch die Spannung P_0 hervorgebracht werden können, darf weder allgemein, noch insbesondere in dem Falle der Savartschen Versuche, sondern nur in einem andern, weiter unten zu berührenden Falle gemacht werden. Da nämlich die auf ein Theilchen dx wirkende Kraft für die Steifheit durch $a\,\frac{d^4y}{dx^4}$, für die Spannung P_0 aber durch $-P_0\frac{d^2y}{dx^2}$ ausgedrückt wird, so besteht jene Voraussetzung darin, dass

$$-P_0\,\frac{d^2y}{dx^2} = a\,\frac{d^4y}{dx^4}$$

gesetzt werden könne; dies führt aber auf eine besondere Gestalt des gebogenen Stabes, und zwar, wie sich leicht ergiebt, auf eine Gestalt von dem Ausdrucke $y = c \sin i\pi\,\frac{x}{l}$, welche bei einem an beiden Enden eingeklemmten Stabe nicht möglich ist.

*) Compt. rend. T. XIV.

§. 13.

Grundgleichungen für die Schwingungen gespannter Stäbe.

Ich werde die Schwingungsmenge für diese Klasse von Körpern aus den in §. 1. und 2. entwickelten Gleichungen herleiten, und zwar

1) für den Fall, dass der gespannte Stab an jedem Ende gestützt oder mit einer Queraxe versehen sei — die letztere Art der Befestigung gestattet wirkliche Spannung, während die blosse Stützung nur negative Werthe von P, d. h. Druck zulassen würde — und

2) für den Fall, dass beide Enden fest eingeklemmt sind.

Der dritte Fall, wo der Stab an einem Ende eingeklemmt, am andern mit einer Axe versehen ist, braucht nicht besonders behandelt zu werden, da aus dem Vorhergehenden einleuchtend ist, dass man sich statt dessen einen doppelt so langen, an beiden Enden eingeklemmten Stab, der in der Mitte einen Knoten und Wendepunkt hat, denken kann.

Zur Bestimmung der Schwingungsmenge n in der Zeit 2π hat man aus §. 2.

$$\alpha^2 = \frac{P}{2a} + \sqrt{\frac{P^2}{4a^2} + \frac{n^2 p}{ag}} \qquad (a)$$

$$\beta^2 = -\frac{P}{2a} + \sqrt{\frac{P^2}{4a^2} + \frac{n^2 p}{ag}} \qquad (b)$$

oder

$$n^2 = \frac{ag}{p}\beta^4 + \frac{Pg}{p}\beta^2 \qquad (c)$$

wo β oder α aus der Gleichung

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + C\sin\beta x + D\cos\beta x \qquad (d)$$

mit Hülfe der für die Enden des Stabes angenommenen Bedingungen zu entwickeln.

Für ein eingeklemmtes Ende ist wie im Vorhergehenden

$$y = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} = 0,$$

für ein angestemmtes

$$y = 0 \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

zu setzen.

§. 14.

Gespannter Stab, an jedem Ende mit einer Axe versehen.

Da $y = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ wird, wenn $x = 0$ oder $x = l$ gesetzt wird, so hat man

$$0 = A + B + D$$
$$0 = A\alpha^2 + B\alpha^2 - D\beta^2$$

woraus man erhält:

$$0 = D\,(\alpha^2 + \beta^2)$$

und da $\alpha^2 + \beta^2$ nicht $= 0$ sein kann, so wird

$$D = 0 \qquad A = -B$$

Setzt man diese Werthe in (d) ein und nimmt $x = l$, so wird

$$0 = A\,(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}) + C \sin \beta l$$

$$0 = A\alpha^2 (e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}) - C\beta^2 \sin \beta l$$

daher

$$0 = A\,(\alpha^2 + \beta^2)\,(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l})$$

und da weder der zweite noch der dritte Factor dieses Ausdrucks $= 0$ sein kann, so wird

$$A = -B = 0$$

und

$$C \sin \beta l = 0$$

also, da C nicht auch $= 0$ sein kann, weil sonst y beständig $= 0$ wäre, so ist

$$\beta = \frac{i\pi}{l}$$

Wenn dieser Werth in (c) eingesetzt wird, so erhält man:

$$n^2 = \frac{i^4\pi^4 ag}{l^4 p} + \frac{i^2\pi^2 Pg}{l^2 p}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Schwingungsmenge des nicht gespannten Stabes, n_0 (Gleichung (6.) und §. 9.), so wie mit der bekannten Schwingungsmenge einer absolut biegsamen Saite, n_1, so sieht man, dass

$$n^2 = n_0^2 + n_1^2$$

In diesem Falle ist also Savarts Regel streng richtig, obgleich es nicht derjenige Fall ist, auf welchen sich seine Versuche beziehen, da bei diesen der Draht eingeklemmt war. Auch ist leicht ersichtlich, dass gerade der gegenwärtige Fall der ist, auf welchen Duhamels Theorie anwendbar ist, weil

$$y = C \sin i\pi \frac{x}{l}$$

und daher

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{i^2\pi^2}{l^2}\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

Ist der Stab nicht gespannt, sondern in seiner Längenrichtung gedrückt, so hat man nur P negativ zu nehmen. Setzt man $n^2 = 0$, so erhält man den Werth dieses Druckes, welcher die Tragfähigkeit einer Säule ausdrückt; von dieser Grenze an findet kein Schwingen mehr statt.

§. 15.

Gespannter Stab, an beiden Enden eingeklemmt.

Dieser Fall ist viel weniger einfach und führt nicht zu demselben Resultat.

Da beide Enden eingeklemmt sind, so hat man in der Gleichung (d)

$$y = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} = 0,$$

wenn $x = 0$ oder $x = l$ gesetzt wird. Es ist daher

$$0 = A + B + D$$
$$0 = A\alpha - B\alpha + C\beta$$

also

$$-2A\alpha = C\beta + D\alpha$$
$$2B\alpha = C\beta - D\alpha$$

ferner

$$0 = Ae^{\alpha l} + Be^{-\alpha l} + C \sin \beta l + D \cos \beta l$$
$$0 = A\alpha e^{\alpha l} - B\alpha e^{-\alpha l} + C\beta \cos \beta l - D\beta \sin \beta l$$

Multipliciert man die erste Gleichung mit α und addiert sie zur zweiten, so erhält man:

$$C\{\beta e^{\alpha l} - \alpha \sin \beta l - \beta \cos \beta l\} = D\{-\alpha e^{\alpha l} - \beta \sin \beta l + \alpha \cos \beta l\}$$

Eben so durch Subtraction:

$$D\{\alpha e^{-\alpha l} - \beta \sin \beta l - \alpha \cos \beta l\} = C\{\beta e^{-\alpha l} + \alpha \sin \beta l - \beta \cos \beta l\}$$

Multipliciert man diese beiden Gleichungen mit einander, so kommt:

$$(\alpha^2 - \beta^2)(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}) \sin \beta l = 2\alpha\beta (e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}) \cos \beta l - 4\alpha\beta$$

Um hieraus β und dadurch n zu berechnen, kann man folgendermassen verfahren.

Die vorhergehende Gleichung giebt:

$$\operatorname{tang} \beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \frac{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}} - \frac{2}{\cos \beta l\, (e^{\alpha l} - e^{-\alpha l})} \right\} \qquad (e)$$

und

$$\operatorname{cotg} \beta l = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \cdot \frac{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}} + \frac{2}{\sin \beta l\, (e^{\alpha l} + e^{-\alpha l})} \qquad (f)$$

wofür man auch setzen kann:

$$\operatorname{tang} \beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ 1 + 2(e^{-2\alpha l} + e^{-4\alpha l} + e^{-6\alpha l} + ..) - \frac{2}{\cos \beta l} (e^{-\alpha l} + e^{-3\alpha l} + e^{-5\alpha l} + ..) \right\} \quad (e^*)$$

$$\operatorname{cotg} \beta l = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \left\{ 1 - 2(e^{-2\alpha l} - e^{-4\alpha l} + e^{-6\alpha l} - ..) \right\} + \frac{2}{\sin \beta l} (e^{-\alpha l} - e^{-3\alpha l} + e^{-5\alpha l} + ..) \quad (f^*)$$

Ohne Spannung ist $\beta l = \alpha l$ nahe $= \frac{2i+1}{2} \pi$; bei zunehmender Spannung gehen beide Werthe immer weiter aus einander, indem βl allmählig abnimmt, dagegen αl schnell zunimmt, wobei βl sich der Grenze $i\pi$, und αl der Grenze ∞ bei wachsender Spannung beständig

nähert*). Daher ist $e^{-\alpha l}$ schon beim ungespannten Stabe und noch mehr beim gespannten stets so klein, dass man die mit diesem Factor behafteten Glieder zunächst vernachlässigen und βl angenähert ausdrücken kann durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} \beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$$

oder

$$\operatorname{tang} \beta l = \frac{2n}{p} \sqrt{\frac{ap}{g}} \qquad (g)$$

Hat man nun erst einen wenn auch ungenauen Näherungswerth von βl und berechnet darnach n aus der Gleichung (c), so erhält man zwar einen ebenfalls ungenauen Werth von n, allein dieser, in die Gleichung (g) eingesetzt, giebt die Grösse von βl mit einem verhältnissmässig so geringen Fehler, dass diese Grösse, in (c) eingesetzt, schon auf einen sehr viel genaueren Werth von n führt, mit welchem man dann dieselbe Rechnung wiederholen kann. Dies Verfahren führt so schnell auf eine grosse Annäherung, dass man die Rechnung mit einem sehr ungenauen ersten Näherungswerthe von βl oder n beginnen kann. Es wird aber ein solcher erster Werth nicht nur sehr leicht durch Probieren gefunden, da man schon weiss, dass βl zwischen $i\pi$ und $\frac{2i+1}{2}\pi$ liegen muss, sondern es geben auch die in §. 16. und 17. abgeleiteten Gleichungen (i) oder (l) einen sehr guten ersten Näherungswerth von βl.

Hat man nun durch das angegebene Verfahren n in grosser Annäherung erhalten, so kann man, wenn es auf eine Genauigkeit ankommen sollte, für welche die Gleichung (g) nicht ausreicht, auch auf die Gleichungen (e^*) und (f^*) zurückgehen und mit jenem Werthe von n die vorher vernachlässigten Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichungen berechnen, wodurch die Annäherung auf jeden beliebigen Grad fortgesetzt werden kann. Es ist im Allgemeinen gleichgültig, welche von jenen beiden Gleichungen man benutzt, nur wird man bei sehr grosser Spannung (e^*) und bei sehr geringer (f^*) anwenden.

Nach jenem Verfahren habe ich Savarts Versuche berechnet. Alle beobachteten Töne sind etwas tiefer, als sie nach der Theorie sein sollten, und es beläuft sich dieser Unterschied bis auf einen halben Ton. Der Grund davon mag wohl theils in dem von Savart bemerkten Umstande liegen, dass die Spannung des eingeklemmten Drahtes durch das

*) Es ist hier nur von positiver Spannung die Rede; der Fall der negativen Spannung, d. h. der Zusammendrückung des Stabes, bietet kein besonderes Interesse dar.



Ansetzen des Bogens sehr leicht vermindert wird, theils darin, dass sowohl eine unvollkommene Befestigung der Enden, als ein Plattdrücken derselben durch die Klemmen den Ton tiefer machen und den Fall jenem näher bringen muss, welcher im vorhergehenden §. behandelt und mit Savarts Regel übereinstimmend gefunden worden ist. Durch eine vorgängige Reckung des Drahtes mittelst sehr starker Spannung und durch eine Befestigung der Enden, wie an W. Webers Monochord, würden sich wohl diese Fehlerquellen beseitigen lassen.*)

§. 16.

Correction der Schwingungsmenge einer Saite wegen der Steifheit, in erster Annäherung.

Ich werde jetzt noch für den Fall, dass die Steifheit sehr gering gegen die Spannung sei, also für gewöhnliche Saiten, die Gleichungen des vorhergehenden §. auf eine einfachere Gestalt bringen. Dies dient einestheils den Fehler zu beurtheilen, welcher bei sehr genauen Tonmessungen am Monochord aus der Vernachlässigung der Steifheit entspringen kann, anderntheils zu erkennen, wie viel die verschiedenen Töne einer Saite von der vollkommenen harmonischen Reinheit gegen einander abweichen.

Nach den Gleichungen (a) und (b) ist $\alpha^2 l^2 = \beta^2 l^2 + \frac{Pl^2}{a}$, also αl stets grösser als $\sqrt{\frac{Pl^2}{a}}$. Da nun dieser letzte Werth im vorliegenden Falle sehr gross ist — er beläuft sich meist in die Hunderte —, so ist gerade hier $e^{-\alpha l}$ so klein, dass die Gleichung (g) jeden wünschenswerthen Grad von Genauigkeit gewährt. Man kann diese Gleichung folgendermassen schreiben:

$$\operatorname{tang} \beta l = \frac{2n_1}{P} \sqrt{\frac{ap}{g}} \left\{ 1 + \frac{n - n_1}{n_1} \right\}$$

und unter n_1 die Schwingungsmenge der absolut biegsamen Saite verstehen. Setzt man dann für n_1 seinen Werth nach der Taylorschen Formel, also $i\pi \sqrt{\frac{Pg}{pl^2}}$, so wird

$$\operatorname{tang} \beta l = 2i\pi \sqrt{\frac{a}{Pl^2}} \left\{ 1 + \frac{n - n_1}{n_1} \right\} \tag{h}$$

Erwägt man nun, dass bei geringer Steifheit der Saite $\frac{n - n_1}{n_1}$ nur sehr klein sein kann, so erhält man in erster Annäherung, mit Vernachlässigung der sehr kleinen Grössen höherer Ordnung:

*) Vergl. den Nachtrag am Ende dieser Abhandlung.

$$\operatorname{tang} \beta l = 2 i \pi \sqrt{\frac{a}{Pl^2}} \qquad (i)$$

und daher $\beta l = i\pi + Arc\,(\operatorname{tang} = 2i\pi \sqrt{\frac{a}{Pl^2}})$ für den i^{ten} Ton. Da $\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}$ sehr klein ist, so kann man, wenn i nicht sehr gross ist, mit Vernachlässigung der höheren Potenzen den Bogen für die Tangente setzen; dies giebt:

$$\beta l = i\pi \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}\right)$$

Setzt man den so erhaltenen Werth von β in die Gleichung (c) ein, so erhält man bei fortgesetzter Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}$

$$n = i\pi \sqrt{\frac{Pg}{pl^2}} \left\{1 + 2\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}\right\}$$

oder

$$n = n_1 \left\{1 + 2\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}\right\} \qquad (k)$$

Die Correction beträgt also $2\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}$ für je eine Schwingung, oder bei cylindrischen Saiten, deren Dicke $2r$ ist, $\frac{r^2}{l}\sqrt{\frac{m\pi}{P}}$ (§. 1.). Der grösste Werth, den P annehmen kann, ist $cr^2\pi$, wenn man den Festigkeitscoefficienten durch c bezeichnet. Setzt man diesen Werth für P ein, so wird die Correction: $\frac{r}{l}\sqrt{\frac{m}{c}}$. Dies giebt z. B. für Stahlsaiten ungefähr $16\frac{r}{l}$, wenn man $m = 20000$ und $c = 80$ rechnet, beide Zahlen auf Quadratmillimeter und Kilogramm bezogen.

Diese Correction darf bei genaueren Bestimmungen der Tonhöhe mit dem Monochord nicht vernachlässigt werden, da sie leicht einige Schwingungen für die Secunde betragen kann, auch wenn man sich ziemlich feiner Saitennummern bedient. So sind z. B. einige früher von mir ausgeführte Bestimmungen über die Töne verschiedener Stimmgabeln aus diesem Grunde etwas zu tief berechnet. Die Berichtigung würde hier bei einer Stahlsaite von 340 bis 350^{mm} Länge und 0,^{mm}16 Dicke 1 Schwingung auf 125 bis 130 Schwingungen, also $3\frac{1}{2}$ auf die Schwingungsmenge 440 betragen haben, wenn die Enden vollkommen eingeklemmt wären*).

§. 17.

Dieselbe Correction in zweiter Annäherung.

Die Gleichung (k) giebt die Berichtigung der Schwingungsmenge wegen der Steifheit für gewöhnliche Saiten schon in sehr grosser An-

*) Wegen der minderen Befestigung der Enden reduciert sich diese Berichtigung nahe auf die Hälfte. Vgl. den Nachtrag.

näherung. Da aber dieselbe von i unabhängig ist, so sieht man, dass bei diesem Grade der Annäherung die Folge der Töne noch durch die natürliche Zahlenreihe dargestellt wird. Will man den Einfluss erkennen, welchen die Steifheit auf die Reinheit der von den Aliquottönen der Saite gebildeten Intervalle hat, so muss man die Annäherung noch einen Schritt weiter fortsetzen. Dies kann auf folgende Weise geschehen, indem man die zweite, nicht aber die dritte und höhere Potenzen von $\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}$ berücksichtigt.

Aus der Gleichung (k) ergiebt sich:

$$\frac{n - n_1}{n} = 2\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (h), so erhält man:

$$\text{tang}\, \beta l = 2i\pi \sqrt{\frac{a}{Pl^2}} \left\{1 + 2\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}\right\} \qquad (l)$$

oder bei fortgesetzter Vernachlässigung der dritten und höheren Potenzen von $\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}$:

$$\beta = \frac{i\pi}{l}\left\{1 + 2\sqrt{\frac{a}{Pl^2}} + 4\frac{a}{Pl^2}\right\}$$

Dies in (c) eingesetzt, giebt:

$$n^2 = \frac{i^2\pi^2 Pg}{pl^2}\left\{1 + 4\sqrt{\frac{a}{Pl^2}} + (12 + i^2\pi^2)\frac{a}{Pl^2}\right\}$$

oder

$$n^2 = n_1^2\left\{1 + 4\sqrt{\frac{a}{Pl^2}} + (12 + i^2\pi^2)\frac{a}{Pl^2}\right\} \qquad (m)$$

Für sehr hohe Aliquottöne der Saite wird diese Gleichung nicht mehr ausreichen; denn wenn i sehr gross ist, so dürfen die höheren Potenzen von $\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}$ nicht mehr gegen die niederen vernachlässigt werden, im Falle sie zugleich mit höheren Potenzen von i multipliciert sind. Schliesst man aber diese sehr hohen Werthe von i aus, so lässt die Gleichung (m) erkennen, nach welchem Gesetz die Tonreihe der Saite von der natürlichen Zahlenreihe abweicht.

Dass in der That die Schwingungszahlen der Aliquottöne stärker als nach der natürlichen Zahlenreihe steigen, ist an steiferen und nicht zu langen Saiten leicht wahrzunehmen. Da die Beimischung solcher Töne, welche wenig von den harmonischen abweichen, noch störender ist, als selbst die Beimischung von ganz unharmonischen, wie letztere z. B. an ungespannten Stäben vorkommen, so müssen steifere und kürzere Saiten bei mässiger Spannung selbst dann unrein tönen, wenn sie als vollkommene Cylinder betrachtet werden dürfen, und man sieht, dass der Grad der Reinheit von der Kleinheit des Werthes $\frac{a}{Pl^2}$ oder $\frac{r^2}{l^2} \cdot \frac{m}{c}$ abhängt.

Um jenes Gesetz, nach welchem die Töne der Saite von der natürlichen Zahlenreihe abweichen, noch etwas einfacher darzustellen, bezeichne man mit $n_{\prime\prime}$ den von i unabhängigen Werth $\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{Pg}{p}\left(1+4\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}+12\frac{a}{Pl^2}\right)}$. Dann erhält man leicht aus der Gleichung (m)

$$n = in_{\prime\prime}\left(1+\tfrac{1}{2}i^2\pi^2\frac{a}{Pl^2}\right)$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{1}{2}\pi^2\frac{a}{Pl^2}=\delta$, so verhält sich die Schwingungsmenge des ersten Tones zu der des i^{ten}, wie

$$(1+\delta) : i\,(1+i^2\delta)$$

so dass die Abweichung von der harmonischen Reinheit durch das Intervall $\frac{1+i^2\delta}{1+\delta}$ oder durch den Betrag von $(i^2-1)\,\delta$ auf je 1 Schwingung ausgedrückt wird. In dem am Ende des vorigen §. erwähnten Beispiele einer Stahlsaite würde δ bei vollkommener Befestigung beider Enden weniger als $\frac{1}{40000}$ betragen. An meinem Monochord, wo die Saite für die gewöhnlichen Vorlesungsversuche 27 Par. Zoll lang ist, wird δ für dieselbe Saitennummer bei voller Spannung nicht viel über $\frac{1}{60000}$, so dass z. B. noch der 8te Ton kaum um ein Schisma und erst der 27ste um ein Komma von der harmonischen Reinheit gegen den ersten abweicht. Man begreift hieraus, dass selbst unter weniger günstigen Verhältnissen die Steifheit der Saite nicht im Stande ist, auf eine merkliche Weise jene Reinheit der Intervalle zu beeinträchtigen, welche das Ohr bei den Aliquottönen des Monochords so angenehm empfindet.

NACHTRAG.

Versuche über die Töne steifer Saiten.

Die Theorie der Schwingungen gespannter Stäbe, welche ich der K. Gesellschaft in einer frühern Sitzung vorgetragen habe, hat zu einem andern Resultat geführt, als das ist, welches N. Savart aus seinen Versuchen an gespannten Drähten abgeleitet hatte. Obgleich die zwischen diesen Beobachtungen und der Theorie statt findenden Differenzen nicht so bedeutend sind, dass sie nicht durch die Einflüsse, welche den Versuch ungenau machen können, erklärlich wären, so schien es doch gut, das theoretische Resultat durch ein empirisches Verfahren zu prüfen, bei welchem jene Fehlerquellen so viel als möglich vermieden würden. Es wurde daher eine Versuchsreihe angestellt unter Verhältnissen, welche denen der Savartschen Beobachtungen absichtlich sehr ähnlich gewählt waren.

3,01 Par. Zoll einer Stahlsaite, von welcher 36 Zoll 3,045 Grmm. wogen, waren in verticaler Stellung zwischen zwei Klemmen so gefasst, dass die Enden, ohne gequetscht zu werden, sehr fest geklemmt werden konnten, indem jedes Ende zwischen zwei Kupferstücken, in welche eine Vertiefung für die Saite eingeschliffen war, gepresst wurde. Da durch das Anziehen der Schrauben die Spannung sehr leicht verändert wird, so war nur die obere Klemme fest gegen das hölzerne Widerlager geschraubt, die untere aber, eine eiserne Zwinge, welche die Kupferstücke zusammenpresste, war beweglich und wurde erst nach dem Anhängen der spannenden Gewichte durch einen mässigen Druck gegen das Widerlager so weit als nöthig befestigt. Das spannende Gewicht wurde von 5 zu 5 Kilogramm bis auf 30 Kilogramm vermehrt und die jedesmalige Tonhöhe durch Vergleichung mit einer feinen Stahlsaite bestimmt, welche am Monochord hing und durch Verschieben des beweglichen Stegs mit dem zu untersuchenden Ton in Einklang gebracht wurde. Diese dünne Saite, von welcher 36 Zoll 0,3715 Grmm. wiegen und welche mit 4211,8 Grmm. gespannt war, gestattet, wenn sie nicht zu kurz ist, sehr nahe die Anwendung der Taylorschen Formel und bedarf nur einer unbeträchtlichen Correction wegen der Steifheit.

Nachdem auf diese Weise die Schwingungsmenge empirisch gefunden worden, war es noch nöthig, zur theoretischen Berechnung derselben das elastische Moment des eingeklemmten Drahtes zu kennen. Da die Bestimmung des Tones, welchen dieser ohne Spannung giebt, bei einem Stück von solcher Länge und so mässiger Steifheit keine Genauigkeit zulässt, so wurde zum Schluss der Versuche das eingeklemmte Stück mitten durchgeschnitten und darauf verschiedene Längen beider Theile so eingeklemmt, dass sie als Stäbe, die nur am einen Ende fest sind, tönten, und aus den beobachteten Tonhöhen im Mittel aus 18 Versuchen das elastische Moment berechnet, was $a = 314{,}7$ (auf Par. Zoll und Gramme bezogen) gab. Auf dieselbe Weise ist für die dünne Saite des Monochords $a = 5{,}113$ gefunden.

Tab. I. enthält in der ersten Spalte die Spannungen des eingeklemmten starken Drahtes, in der letzten die nach §. 15. der vorstehenden Abhandlung berechnete Anzahl von Schwingungen in der Secunde, wobei ein Hin- und Hergang für eine Schwingung gerechnet ist; die vier anderen Spalten beziehen sich auf die dünne Saite des Monochords, und zwar enthält die zweite Spalte die gemessene Länge derselben, die dritte und vierte einen untern und obern Grenzwerth, zwischen welchen die daraus sich ergebende Schwingungsmenge liegen muss, indem die Berechnung nach Taylors Formel dieselbe offenbar etwas zu klein, die Berücksichtigung der Steifheit aber, wenn man die durch Stege begrenzte Saite wie eine an beiden Enden festgeklemmte behandelt, etwas zu gross geben muss; die fünfte Spalte enthält die wirkliche Schwingungsmenge, wie sie sich nach einer weiter unten zu erklärenden Correction wenigstens in sehr grosser Annäherung ergiebt.

Tab. I.

Spannung	Saitenlänge am Monochord	Schwingungsmenge nach dem Versuch			Schwingungsmenge nach der Theorie
		untere Grenze	obere Grenze	corr. Werth	
0					456
5kil.,05	6",385	952	963	958	956
10,05	4,865	1250	1268	1259	1256
15,05	4,105	1483	1504	1494	1492
20,05	3,63	1675	1707	1691	1694
25,05	3,29	1848	1888	1869	1872
30,05	3,045	1997	2044	2021	2033

Die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung ist vollständig, indem nicht nur alle theoretischen Werthe zwischen die engen Grenzen fallen, zwischen welchen die Beobachtungswerthe nothwendig eingeschlossen sind, sondern auch den corrigierten Zahlen des Monochordversuchs so nahe kommen, dass die Differenz in keinem Falle die Grösse von einem halben Komma erreicht. Berechnet man dagegen die Schwingungsmengen nach Savarts Regel, so erhält man Werthe, welche sämmtlich $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Ton zu tief sind.

Auch die in Tab. II. enthaltenen Beobachtungen des zweiten Tones (mit einem Knoten), obgleich bei der grossen Höhe dieser Töne etwas weniger zuverlässig, geben eine genügende Uebereinstimmung mit der Theorie.

Tab. II.

Spannung	Saitenlänge am Monochord	Schwingungsmenge nach dem Versuch			Schwingungsmenge nach der Theorie
		untere Grenze	obere Grenze	corr. Werth	
5$^{kil.}$,05	2″,98	2040	2090	2066	2075
10,05	2,37	2566	2646	2607	2631
15,05	2,03	2995	3107	3055	3082

Es ist noch die Correction anzugeben, nach welcher die Schwingungsmenge in der vorletzten Spalte dieser Tabellen aus den Versuchen berechnet ist. Es war nämlich die Monochordsaite an ihrem oberen Ende scharf gegen zwei parallele Stege gedrückt, über welche sie von dem Anhängestift aus geführt war und von denen der erste sie in ziemlicher Breite, der zweite aber, dicht unter dem ersten stehend, nur mit der Schärfe einer Schneide berührte. Von dieser Schneide aus sind die Längen der Saite gemessen. Die untere Begrenzung wurde durch den verschiebbaren Steg gebildet, der mit einer Schneide nur ziemlich leicht die Saite berührte, während der übrige noch tiefere Theil derselben mit der Hand gedämpft wurde. Berechnet man nun aus der so begrenzten Länge die Schwingungsmenge nach Taylors Formel, so ist einleuchtend, dass man etwas zu kleine Zahlen erhält, weil auch hier der Ton durch die Steifheit etwas erhöht wird. Berechnet man sie dagegen unter der Voraussetzung, dass beide Enden sich eben so verhalten, als ob sie fest eingeklemmt wären, so erhält man offenbar etwas zu grosse Zahlen. Dadurch ist die untere und obere Grenze bestimmt, welche in der dritten und vierten Spalte der vorhergehenden Tabellen angegeben sind, und zwischen welche die wirkliche Schwingungsmenge nothwendig fallen

muss. Um aber zu ermitteln, welchen Werth zwischen diesen Grenzen dieselbe einnehme, habe ich folgende Versuchsreihe angestellt, deren Resultate in Tab. III. enthalten sind.

Es wurde neben der feinen Monochordsaite eine andere viel stärkere aufgehangen, von demselben Draht, der bei den vorhergehenden Versuchen gebraucht war, gespannt mit 20 Kilogr. und über die Stege geführt ganz auf dieselbe Weise, wie die dünne Saite. Während die starke Saite nach und nach die Längen erhielt, welche in der ersten Spalte der Tab. III. enthalten sind, wurde die dünne Saite durch Verschieben ihres unteren Stegs in den Einklang gebracht; diese Längen sind in der zweiten Spalte angegeben. Unter den verschiedenen Formen, durch welche ich diese beiderlei Zahlen in Einklang zu bringen gesucht habe, stimmt am nächsten die Annahme, dass die Saiten bei der beschriebenen Art der Begrenzung sich verhalten, wie ein gespannter Stab, der am einen Ende fest eingeklemmt, am andern gestützt (mit einer Axe versehen) ist. In der That aber überzeugt man sich, dass bei der beschriebenen Einrichtung das obere Ende den Bedingungen einer vollkommenen Befestigung, das untere denen der Stützung in einer Axe ziemlich nahe kommt. Tab. III. enthält in den beiden letzten Spalten die nach dieser Annahme berechneten Schwingungsmengen. In den beiden vorhergehenden sind die uncorrigierten Werthe hinzugefügt, damit man den Betrag der Correction ersehe.

Tab. III.

Länge der starken Saite	Länge der dünnen Saite	Schwingungsmenge nach Taylors Formel, für die		Corrigierte Schwingungsmenge für die	
		starke Saite	dünne Saite	starke Saite	dünne Saite
18"	23",3025	257	261	259	261
14,4	18,71	321	325	324	326
12	16,57	386	391	390	391
9	11,6325	514	523	522	524
7,2	9,3175	643	653	655	655
6	7,78	771	781	789	785
4,5	5,78	1029	1052	1061	1059
3,6	4,61	1286	1319	1340	1330
3	3,79	1543	1604	1624	1620

Die beiden letzten Spalten stimmen so weit überein, dass die an-

gegebene Form der Correction der Erfahrung nahe genügt. Ist auch dieselbe nicht ganz streng anwendbar, so wird doch jedenfalls da, wo die Correction selbst nur so wenig beträgt, wie bei den Zahlen der Tab. I., der Fehler der Correction nur höchst unbedeutend sein können, so dass die vorletzte Spalte jener Tabelle die wirklichen Schwingungsmengen in sehr grosser Annäherung darstellt.

ÜBER DIE

CYCLOCENTRISCHE CONCHOSPIRALE

UND ÜBER DAS

WINDUNGSGESETZ VON PLANORBIS CORNEUS

VON

C. F. NAUMANN.

ÜBER DIE CYCLOCENTRISCHE CONCHOSPIRALE

als

WINDUNGSGESETZ VON PLANORBIS CORNEUS.

I. Allgemeine Betrachtung der cyclocentrischen Conchospirale.

§. 1.

Vorbemerkungen.

Die Conchyliometrie ist eine erst im Entstehen begriffene Wissenschaft; denn in der That sind bis jetzt nur einzelne Grundsteine zu dem Gebäude gelegt worden, welches vielleicht künftig einen ehrenvollen Platz neben der Krystallographie und anderen Theilen der angewandten Mathematik behaupten wird.

Das nächste und wichtigste Problem war es unstreitig, das Wachsthumsgesetz der Conchylien, oder, was auf dasselbe hinausläuft, das Wachsthumsgesetz der in ihnen lebenden Thiere aufzufinden. Man hat dieses Problem einstweilen nur für die einschaligen, spiralförmig gewundenen Conchylien in Angriff genommen, bei welchen allerdings durch Messung und Rechnung leichter ein Resultat zu erwarten stand, als bei den zweischaligen Conchylien. Das Wachsthumsgesetz einer solchen Conchylie wird nun aber in der Hauptsache gefunden sein, sobald es gelingt, die Gleichung derjenigen Spirale aufzustellen, welche der Windungsrücken um die Axe der Conchylie beschreibt. Denn da die Entwickelung der betreffenden Thiere wesentlich an das Gesetz gebunden ist, dass solche mit beständig wechselnder Richtung in einem und demselben Sinne auf dem Rücken ihres selbst gebildeten Gehäuses fortwachsen, indem sie, die centrale Axe des letzteren entweder in einer Ebene oder in einer Kegeloberfläche umkreisend, eine gewisse Anzahl von Windungen zu Stande bringen; so müssen die successiven Abstände des Windungsrückens (als der von der Windungsaxe am weitesten entfernten Linie) nothwendig die successiven Radial-Dimensionen des Thieres selbst in den verschiedenen Stadien seines Wachsthumes repräsentieren.

Dieser Ansicht gemäss hat sich denn auch die Aufmerksamkeit Derer, welche bis jetzt die Formen der Conchylien geometrisch zu ergründen bemüht waren, vorzugsweise der Aufsuchung derjenigen Spirale zugewendet, welche den Verlauf des Windungs rückens bestimmt und daher als Rückenspirale bezeichnet werden kann.

Indessen hat man auch bisweilen die Nahtspirale, d. h. diejenige Spirale zu ermitteln versucht, welche dem Rande entspricht, in welchem sich eine jede Windung an die nächst vorhergehende anschmiegt. Diese Windungsnaht kann wohl auch häufig benutzt werden, obwohl Fälle genug vorkommen, wo sie einen ganz abweichenden und zum Theil wenig regelmässigen Verlauf besitzt. Da sie den Umgriff des Windungsrandes darstellt, welcher gewissermassen die Extremitäten der Windung bezeichnet, so kann sie freilich nicht geeignet sein, das allgemeine Wachsthum des Thieres erkennen zu lassen; wenn sie jedoch nach demselben Gesetze gewunden ist, wie die Rückenspirale, so wird sie wenigstens zur Kenntniss des Windungs-Quotienten führen, womit schon sehr viel gewonnen ist.

Nachdem Reinecke schon im Jahre 1818 die erste Hinweisung auf den Windungs-Quotienten als das wichtigste Element der Ammonitenformen gegeben, dann aber Leopold v. Buch diesen Quotienten als den Ausdruck eines bestimmten Gesetzes erkannt, und daher als ein specifisches Merkmal eingeführt hatte, so wurde zuerst von Moseley im Jahre 1838 die logarithmische Spirale als die eigentliche Grundlinie vieler Conchylien nachgewiesen, während später Heis bei Argonauta Argo die parabolische Spirale entdeckte. Dagegen wurde ich durch den oft vorkommenden Wechsel des Windungs-Quotienten in verschiedenen Regionen der Schale und durch einige zwischen Rechnung und Beobachtung wahrgenommene Widersprüche zu Zweifeln an der Allgemeingültigkeit der logarithmischen Spirale veranlasst, und endlich, nach manchen vergeblichen Versuchen, auf das Resultat geführt, dass sehr vielen Conchylien ihr Windungsgesetz durch eine neue und eigenthümliche Spirale vorgeschrieben werde, welche ich deshalb unter dem Namen der Conchospirale einzuführen mir erlaubte.

Das wesentliche Grundgesetz dieser Conchospirale ist, dass die successiven Windungsabstände eine geometrische Reihe nach irgend einem Quotienten p bilden. Setzt man nun den ersten, vom Mittelpunkte

ausgehenden Windungsabstand oder den Parameter der Spirale $= a$, so wird die allgemeine Gleichung derselben:

$$r = \frac{a}{p-1}(p^m - 1)$$

oder, indem man für m den entsprechenden Umlaufswinkel $v = m.2\pi$ substituiert*):

$$r = \frac{a}{p-1}(p^{\frac{v}{2\pi}} - 1)$$

Diese Spirale hat zwar einige Eigenschaften mit der logarithmischen Spirale gemein, weicht aber doch wesentlich von ihr ab, wie sich namentlich daraus ergiebt, dass ihr Anfangspunkt mit dem Mittelpunkte zusammenfällt, dass sie für negative Werthe von v Anfangs eine Schleife bildet, und mit allen ferneren rückläufigen Windungen einer asymptotischen Grenze entgegen strebt, welche ein Kreis vom Halbmesser $\frac{a}{p-1}$ ist**). Auch geben sich ein paar sehr bedeutsame Unterschiede darin zu erkennen, dass die Radien und Diameter der Conchospirale keine geometrische Progression bilden, und dass der Tangentialwinkel (d. h. der Neigungswinkel der Tangente irgend eines Punktes gegen dessen Radius) nicht constant, sondern fortwährend veränderlich ist.

§. 2.

Einfache cyclocentrische Conchospirale.

Der vorstehenden Gleichung der Conchospirale liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Axe der Conchylie eine ideale Axe oder eine blosse mathematische Linie sei. Es lassen jedoch mehrere Beobachtungen vermuthen, dass dies keinesweges in allen Fällen statt finde, sondern dass die Axe gar häufig durch einen Cylinder oder Central-Nucleus von bestimmtem Durchmesser dargestellt werde. Dieser Durchmesser scheint zwar gewöhnlich sehr klein zu sein; er ist aber doch immer bedeutend genug, um keine gänzliche Vernachlässigung zu gestatten; viel-

*) In der von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zur 200jährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegebenen Sammlung von Abhandlungen wurde S. 151 ff. die Theorie der Conchospirale ausführlich entwickelt. Die hier gegebene Gleichung ist wesentlich dieselbe, wie solche a. a. O. S. 158 steht; nur erfasst sie die Spirale unmittelbar von ihrem Mittelpunkte aus, so dass alle wirklichen Windungen auf positive Werthe von v zu beziehen sind.

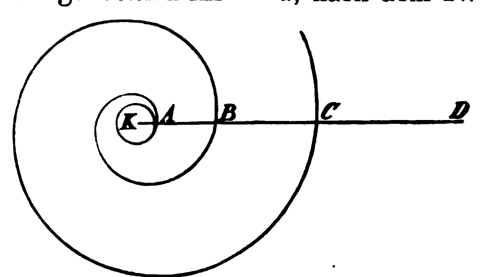
**) Da der rückläufige, oder der durch negative Werthe von v bestimmte Zweig der Spirale gar keine Bedeutung für die Conchylien hat, so habe ich ihn auch in der erwähnten Abhandlung unberücksichtigt gelassen und mich damit begnügt, den Verlauf der Curve bis zu ihrem Mittelpunkte zu verfolgen.



mehr dürfte in manchen Fällen nur durch die Berücksichtigung desselben eine Ausgleichung der letzten, zwischen Rechnung und Messung noch hervortretenden Differenzen zu erwarten sein.

Da nun ausserdem bei Voraussetzung eines derartigen Central-Nucleus die Gleichung der Conchospirale in einer solchen Form hervortritt, dass sie bei einem gewissen Durchmesser des Nucleus unmittelbar in die logarithmische Spirale übergeht; da also hierin ein Fingerzeig gegeben zu sein scheint, auf welche Weise die verschiedenen Beobachtungen zu vereinigen sein möchten, von denen einige auf die logarithmische Spirale, andere auf die Conchospirale geführt haben; da endlich die Annahme eines Central-Nucleus mit der von mir in Vorschlag gebrachten Theorie der zusammengesetzten Spirale völlig übereinstimmt; so dürfte es der Mühe nicht unwerth erscheinen, die Conchospirale von diesem neuen Gesichtspunkte aus in Betrachtung zu ziehen.

Wollen wir uns nun, wie bisher, so auch gegenwärtig, darauf beschränken, das ganze Phänomen lediglich in seiner Horizontal-Projection zu studieren (weil an die Betrachtung des Windungskegels und aller übrigen Form-Verhältnisse doch jedenfalls erst nach Feststellung der Grundspirale zu denken ist), so werden wir die Projection des Central-Nucleus als einen Kreis vorzustellen haben, um welchen sich die Conchospirale gleichsam wie um ihr Fundament entwickelt, weshalb auch der Halbmesser dieses Kreises den eigentlichen Urhalbmesser oder Archiradius der Spirale bildet. Bezeichnen wir diesen Archiradius KA mit α und nehmen wir an, die in irgend einem Punkte der Kreisperipherie, z. B. in dem Punkte A, beginnende Spirale erreiche nach dem ersten Umlaufe den Windungsabstand $AB = a$, nach dem zweiten Umlaufe den



Windungsabstand $BC = ap$, nach dem dritten Umlaufe den Windungsabstand $CD = ap^2$, und allgemein nach dem m^{ten} Umlaufe den Windungsabstand ap^{m-1}, so wird der dem Ende des letzteren Umlaufes entsprechende Radius r durch die Summe aller vorherigen Windungs-

abstände, einschliesslich des Archiradius α, bestimmt sein. Dem Umlaufswinkel $v = m.2\pi$ entspricht also der Radius

$$r = \alpha + \frac{a}{p-1}(p^m - 1)$$

und irgend einem beliebigen Umlaufswinkel v entspricht der Radius

$$r = \alpha + \frac{a}{p-1}(p^{\frac{v}{2\pi}} - 1)$$

Dies ist die Gleichung der um den Axencylinder oder Central-Nucleus entwickelten Conchospirale. Man kann sie die cyclocentrische Gleichung der Curve nennen, weil deren positiver (hier allein in Rücksicht kommender) Zweig durch eine Kreislinie von dem innern centralen Theile getrennt wird, oder weil sich ihr Mittelpunkt gewissermassen zu einem Kreise ausgedehnt hat.

Setzt man nun in dieser Gleichung $\alpha = 0$, so gelangt man auf die oben S. 3 stehende Gleichung der gewöhnlichen Conchospirale; setzt man dagegen $\alpha = \frac{a}{p-1}$, so wird

$$r = \alpha p^{\frac{v}{2\pi}} = \frac{a}{p-1} p^{\frac{v}{2\pi}}$$

welches die Gleichung der logarithmischen Spirale ist. Diese letztere Spirale lässt sich daher nur als ein besonderer Fall der cyclocentrischen Conchospirale betrachten; wenn also die letztere überhaupt in der Welt der Conchylien eine wichtige Rolle spielt, so kann es uns gar nicht mehr befremden, dass gewisse Conchylien wirklich nach dem Gesetze der logarithmischen Spirale gewunden sind.

Die Bestimmung des Windungs-Quotienten p erfolgt am einfachsten und sichersten aus den gemessenen Windungsabständen oder auch aus den Differenzen der Diameter, und ist in dieser Hinsicht zu den Bemerkungen der §§. 3. und 5. der oben angeführten Abhandlung nichts hinzuzufügen, auf welche ich mich im Folgenden mehrfach beziehen werde.

§. 3.

Berechnung der Diameter, des Parameters und des Tangentialwinkels.

Die Diameter der cyclocentrischen Conchospirale erfordern dagegen eine neue Bestimmung. Aus der Gleichung

$$r = \alpha + \frac{a}{p-1}(p^m - 1)$$

folgt für den nächst grössern semissodistanten Radius:

$$r' = \alpha + \frac{a}{p-1}(p^m p^{\frac{1}{2}} - 1)$$

Die Summe dieser beiden Radien ist derjenige Diameter D, welcher dem Umlaufswinkel $v = (m + \frac{1}{2})\, 2\pi$ zukommt. Also wird

$$D = r' + r = 2\alpha + \frac{a}{p-1}\left[p^m\left(p^{\frac{1}{2}} + 1\right) - 2\right]$$

Aus irgend einem gemessenen Diameter D folgen aber rückwärts die beiden ihn zusammensetzenden Radien:

$$r = \frac{D\left(p^{\frac{1}{2}} + 1\right) - a + \alpha(p-1)}{\left(p^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2}$$

$$r' = \frac{D\left(p^{\frac{1}{2}} + 1\right) p^{\frac{1}{2}} + a - \alpha(p-1)}{\left(p^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2}$$

welche Ausdrücke für $\alpha = 0$ auf die a. a. O. §. 4. stehenden Werthe und für $\alpha = \frac{a}{p-1}$ auf die in Poggendorffs Annalen Bd. 51. S. 250 mitgetheilten Werthe zurückkommen.

Die Bestimmung des Parameters a ist in der cyclocentrischen Conchospirale mit abhängig von dem Archiradius α, dessen Kenntniss in allen Fällen nur durch unmittelbare Messung erlangt werden kann. Aus irgend zwei $x$todistanten Diametern D und D' folgt:

$$a = \frac{(p-1)\left[(D' - p^x D) + 2\alpha(p^x - 1)\right]}{2\,(p^x - 1)}$$

folglich aus zwei singulodistanten Diametern:

$$a = \tfrac{1}{2}(D' - pD) + \alpha(p-1)$$

welche Werthe für $\alpha = 0$ auf die a. a. O. §. 6. stehenden Werthe zurückkommen, für $\alpha = \frac{a}{p-1}$ dagegen auf das Ergebniss führen, dass a gar nicht aus den Diametern berechnet werden kann, weil dann die Spirale eine logarithmische ist.

Die Berechnung des Umlaufswinkels v oder $m.2\pi$ erfolgt aus dem zugehörigen Windungsabstande h, wie a. a. O. §. 7. Für irgend einen Umlaufswinkel $v = m.2\pi$ ist nämlich der entsprechende Windungsabstand $h = ap^{m-1}$; folglich wird

$$m = \frac{v}{2\pi} = 1 + \frac{\log h - \log a}{\log p}$$

Man kann also für jeden Punkt, dessen Windungsabstand gemessen wurde, seinen Umlaufswinkel oder die Anzahl der bis dahin vollendeten Windungen berechnen, sobald p und a bekannt sind.

Der Tangentialwinkel φ der cyclocentrischen Conchospirale bestimmt sich aus der Gleichung derselben durch:

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{2\pi\left[\alpha(p-1) + a\left(p^{\frac{v}{2\pi}} - 1\right)\right]}{a p^{\frac{v}{2\pi}} \log p}$$

in welchem Ausdrucke unter $\log p$ der natürliche Logarithmus zu verstehen ist. Dies giebt für $\alpha = 0$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2\pi\,(p^{\frac{v}{2\pi}} - 1)}{p^{\frac{v}{2\pi}} \log p}$$

wie a, a. O. S. 163, dagegen für $\alpha = \frac{a}{p-1}$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2\pi}{\log p}$$

welcher Werth die logarithmische Spirale charakterisiert. Setzen wir $v = 0$, so wird in der cyclocentrischen Conchospirale:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\alpha\,(p-1)\,2\pi}{a \log p}$$

Dies ist also die Tangente desjenigen Winkels, mit welchem die Spirale beginnt; setzen wir endlich $v = \infty$, so wird

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2\pi}{\log p}$$

wodurch derjenige Tangentialwinkel bestimmt wird, welchem die Spirale entgegen strebt, ohne ihn doch jemals zu erreichen.

§. 4.

Zusammengesetzte cyclocentrische Conchospirale.

Die Theorie der zusammengesetzten Conchospirale bleibt ziemlich unverändert, wenn wir sie cyclocentrisch ausgebildet denken; ja, sie ist wesentlich nichts Anderes, als eine Wiederholung der Theorie der einfachen cyclocentrischen Spirale. Indem wir nämlich die a. a. O. S. 165 angenommene Vorstellung zu Grunde legen, dass sich die äussere Spirale um einen Kreis entwickele, dessen Halbmesser der letzte Radius $R = \alpha'$ der innern Spirale ist, so wird die äussere Spirale offenbar als eine cyclocentrische Spirale vom Archiradius α' eingeführt. Der Parameter derselben, d. h. der Windungsabstand ihres ersten Umlaufes, wird durch das Product aus dem letzten Windungsabstande ap^{m-1} der innern Spirale in den neuen Windungs-Quotienten q bestimmt. Bezeichnen wir also dieses Product mit a', so wird die Gleichung der äussern Spirale:

$$r = \alpha' + \frac{a'}{q-1}\,(q^n - 1)$$

ganz analog der Gleichung

$$r = \alpha + \frac{a}{p-1}\,(p^m - 1)$$

welche der innern Spirale zukommt.

Schreiben wir in dieser letztern Gleichung u statt m, um denjenigen Umlaufswinkel zu bezeichnen, bei welchem die innere Spirale zu Ende geht, so wird der diesem Winkel entsprechende Werth von r der Archiradius α' der äussern Spirale, und folglich die Gleichung der letztern:

$$r = \alpha + \frac{a}{p-1}(p^u - 1) + \frac{a'}{q-1}(q^u - 1)$$

in welcher a' den Werth aqp^{u-1} hat.

Die weiteren Betrachtungen sind nun wesentlich dieselben, wie a. a. O. §. 10. bis §. 14., nur ist überall das dortige R um α zu vergrössern.

Die ebendaselbst in den §§. 15. und 16. gegebene Bestimmung von a und u aus irgend zweien Diametern der äussern Spirale ändert sich jedoch dahin, dass

$$a = \frac{(p-1)(q-1)[Dq^x - D' - 2\alpha(q^x-1)]}{2(q^x-1)[(q-p)p^{u-1} - q + 1]} = N$$

gefunden wird, wodurch denn natürlich auch der Werth von u eine angemessene Veränderung erfährt.

§. 5.

Berechnung für den Fall, da die innere Spirale eine logarithmische ist.

Nachdem wir nun die wichtigsten Sätze in Betreff sowohl der einfachen als auch der zusammengesetzten cyclocentrischen Conchospirale kennen gelernt haben, müssen wir noch einen besondern Fall der zusammengesetzten Spirale in Betrachtung ziehen, welchen ich an einer unserer gewöhnlichen Süsswasserschnecken beobachtet habe, von dem aber wohl zu vermuthen ist, dass er in der Natur häufig vorkommen wird. Es ist dies nämlich derjenige Fall, da die innere Spirale eine logarithmische ist, während die äussere Spirale als eine gewöhnliche cyclocentrische Conchospirale auftritt. Weil nun in diesem Falle $a = \alpha(p-1)$ wird, so ergiebt sich aus dem zuletzt angegebenen Werthe von a:

$$\alpha(p-1) = N$$

und, nach den erforderlichen Umstellungen,

$$\alpha = \frac{(Dq^x - D')(q-1)}{2(q^x-1)(q-p)p^{u-1}}$$

folglich

$$p^{u-1} = \frac{(Dq^x - D')(q-1)}{2\alpha(q^x-1)(q-p)}$$

wenn $q > p$ ist, oder

$$p^{u-1} = \frac{(D' - q^x D)(q-1)}{2\alpha(q^x-1)(p-q)}$$

wenn $q < p$ ist. In dem letztern Falle wird also

$$p^u = \frac{Mp}{\alpha\,(p - q)} = L$$

wenn wir der Kürze wegen die Grösse

$$\frac{(D' - q^x D)\,(q - 1)}{2\,(q^x - 1)}$$

mit M bezeichnen. Hieraus folgt endlich die den grössten Umlaufswinkel $u.2\pi$ der innern Spirale bestimmende Zahl

$$u = \frac{\log L}{\log p}$$

Hat man diesen Grenzwinkel beider Spiralen auf solche Weise gefunden, so ergiebt sich sofort der Archiradius α' der äussern Spirale:

$$\alpha' = \alpha p^u$$

und der letzte Windungsabstand der innern Spirale:

$$H = \alpha p^{u-1} = \frac{\alpha'\,(p - 1)}{p}$$

Da nun für irgend einen Punkt der äussern Spirale der zugehörige Windungsabstand

$$h = \alpha q^n p^{u-1} = \frac{\alpha'\,(p - 1)\,q^n}{p} = Hq^n$$

ist, so berechnet sich der entsprechende Umlaufswinkel $n.2\pi$ durch

$$n = \frac{\log \frac{h}{H}}{\log q}$$

aus welchem endlich der Radius desselben Punktes nach der Gleichung

$$r = \alpha' + \frac{\alpha q p^{u-1}}{q - 1}\,(q^n - 1)$$

und, durch Addition je zweier semissodistanter Radien, ein jeder Diameter der äussern Spirale berechnet werden kann. Diese Berechnung der Diameter und die Vergleichung der berechneten mit den beobachteten Werthen dürfte als ein vorzüglicher Prüfstein der Theorie zu betrachten sein.

II. Anwendung auf die Schale von Planorbis corneus.

§. 6.

Beschaffenheit der Schale dieser Conchylie.

Ohne zu ahnen, dass mich diese Schnecke auf die Theorie der cyclocentrischen Conchospirale führen würde, hatte ich sie deshalb zum Gegenstande meiner Untersuchungen gewählt, weil die Süsswasserconchylien überhaupt, wegen ihrer dünnern Schale, häufigeren und bedeutenderen Störungen unterliegen dürften, als die dickschaligeren Meeresconchylien, und daher vorzüglich geeignet scheinen, eine jede Theorie die Probe

bestehen zu lassen, ob sie ihre Gesetze auch noch bei bedeutenden Perturbationen geltend zu machen vermag.

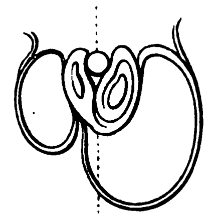
Die Species Planorbis corneus ist bekanntlich eine der grössten ihres Geschlechtes und theilt mit mehreren anderen Species jene Eigenthümlichkeit der Formbildung, welche uns einigermassen in Zweifel darüber lässt, ob die Schale als rechts oder als links gewunden zu betrachten ist*). Die scharf ausgeprägte und fast in einer Ebene liegende Windungsnaht der obern Seite schien mir bei dem ersten Anblicke ganz geeignet zu sein, um wenigstens ihre Windungs-Quotienten zu bestimmen. Allein mehrere zu diesem Ende angestellte Messungen überzeugten mich, dass diese Windungsnaht kein bestimmtes, oder doch wenigstens kein sehr einfaches Gesetz befolge. Eingedenk der weit grössern Bedeutung des Windungsrückens gerieth ich daher auf den Gedanken, mir von einigen Exemplaren möglichst centrale Querschnitte durch Schleifung herzustellen, um an ihnen, auf ähnliche Weise wie an den Ammoniten, die Windungspuncte der Rückenspirale zu messen. Der Erfolg entsprach meinen Erwartungen vollkommen; denn während ich in der Nahtspirale vergebens ein Gesetz gesucht hatte, so liess mich die Rückenspirale ein sehr bestimmtes und in allen Exemplaren übereinstimmendes Gesetz erkennen.

Die Sprödigkeit und leichte Zerbrechlichkeit der Schale von Planorbis corneus macht die Durchschleifung derselben etwas mühsam, und es gelingt nicht immer, einen hinreichend centralen und zugleich ganz unbeschädigten Querschnitt herzustellen; besonders springen die innersten, zunächst um die Axe gelegenen Theile leicht aus. Ich habe mir nun solche Querschnitte an drei Exemplaren geschliffen, von welchen Nr. I. fast völlig central gerathen und nur in einer der inneren Windungen etwas verbrochen ist. Das Exemplar Nr. II. ist ebenfalls in einer innern Windung beschädigt, hat auch das Ende seiner äussersten Windung verloren, jedoch den centralen Theil erhalten. An dem Exemplare Nr. III. dagegen ist dieser centrale Theil völlig ausgesprungen. Um übrigens die gefundenen Resultate noch auf eine andere Weise zu controlieren, habe ich ein viertes Exemplar parallel seiner Windungsfläche so weit durchschliffen, dass der Windungsrücken von fast viertehalb Windungen sichtbar geworden ist.

*) Die Querschnitte der Schale scheinen allerdings die Ansicht von Cuvier zu bestätigen, dass wir es mit einer links gewundenen Schnecke zu thun haben.

In den beiden vollständigen Querschnitten Nr. I. und II. sieht man nun deutlich, dass der innerste Theil der Windungen, etwas über einen Umlauf hinaus, fast gänzlich mit Kalkmasse ausgefüllt ist. Wir müssen daher schliessen, dass sich das Thier in den späteren Stadien seines Wachsthums aus diesem centralen Theile der Schale allmählig zurückgezogen habe. Zwar kann man noch sehr deutlich im Querschnitte zwei Zellen erkennen, welche eine den folgenden Windungsöffnungen analoge Form und Lage besitzen; aber diese Zellen sind mit einer hellgrauen Masse ausgefüllt, und ihre starken und dunkelbraunen Wände contrastieren auffallend gegen die zarten und weissen Wände der nächsten Windungen.

Ausserdem entdeckt man noch ganz oben, unmittelbar unter dem auf der Oberfläche des Gewindes sichtbaren Windungsknöpfchen einen rundlichen, ebenfalls ausgefüllten Kern, welcher genau in der Axe der Schale liegt und gleichsam den Grundstein des ganzen Gebäudes bildet. Dieser Kern, an welchen sich die innerste Windung unmittelbar anschmiegt, scheint nun wirklich ein besonderer Theil zu sein, dessen Ausbildung vielleicht in eine andere Entwickelungsperiode des Thieres gehört, als die Ausbildung der eigentlichen Schale *). Die beistehende Figur giebt das vergrösserte Bild vom centralen Theile des Querschnittes Nr. I., in welchem sich der Central-Nucleus besonders deutlich als ein völlig geschlossener Körper darstellt.



Stark vergrösserter centraler Theil eines Querschnittes von Planorbis corneus.

*) Allerdings liesse sich einwenden, dass dieser Kern nur der allerinnerste und einseitig geschlossene Theil der ersten Windung sei, und dass überhaupt der Central-Nucleus als solcher gar nicht realiter existiere, sondern bloss als eine ideelle, die Entwickelung der Schale regulierende Kreislinie oder Cylinderfläche vorgestellt werden müsse; etwa so, wie der Kreis bei der Bildung einer Diplospirale. Für die Rechnung ist es im Allgemeinen gleichgültig, wie sich die Sache verhält; allein die Messung von α würde dann unsicher werden, weil der Durchmesser der innersten Windungshälfte nur sehr ungefähr den Durchmesser jenes ideellen Centralkreises repräsentiert und stets grösser als derselbe sein muss.

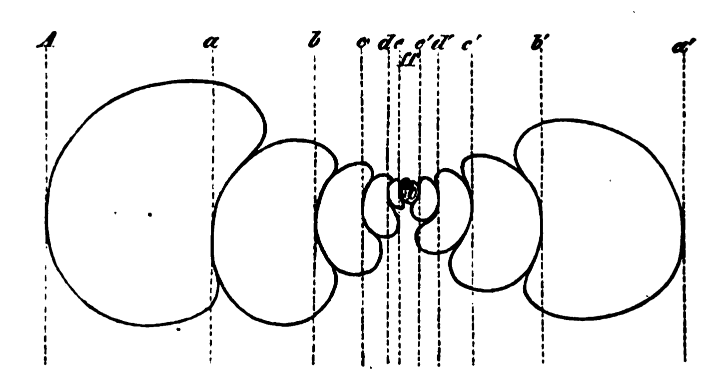
Da es also scheint, dass die Schale von Planorbis corneus wirklich um einen Central-Nucleus zur Entwickelung gelangt sei, so wollen wir dieses Ergebniss zuvörderst bei der Berechnung des Querschnittes Nr. I. zu Grunde legen.

A. Messung und Berechnung des Exemplars Nr. I.

§. 7.

Beobachtungs-Elemente und nächste Folgerungen.

Das Exemplar wurde auf der Scheibe des Conchyliometers dergestalt aufgestellt, dass die Axe der Conchylie möglichst rechtwinkelig gegen den Millimeter-Massstab lag; indem nun das gehörig eingestellte Mikroskop über die Schnittfläche fortbewegt wurde, so deckte der auf demselben Massstabe rechtwinkelige Faden des Fadenkreuzes nach und nach alle äussersten Punkte des Windungsrückens, deren radiale Abstände auf diese Weise bestimmt wurden. Die Ablesung erfolgte allemal, wenn derselbe Rand des Fadens den innern Rand der Schale erreicht hatte. Da der Windungsrücken bei dem Punkte *c* etwas ausgebrochen war, und folglich dieser Punkt jedenfalls etwas zu nahe nach der Axe der Conchylie beobachtet wurde, so ist sein beobachteter Abstand von dem Punkte *d* um 0,1 *mm.* vergrössert worden.



Querschnitt von Planorbis corneus, 2½ Mal vergrössert.

Die auf diese Weise gefundenen Beobachtungs-Elemente sind nun folgende:

Windungsabstände	Diameter
Aa = 9,65 *mm.*	$a'a$ = 26,30 *mm.*
ab = 5,90 „	ab' = 18,40 „
bc = 2,90 „	$b'b$ = 12,50 „
cd = 1,30 „	bc' = 8,45 „
de = 0,60 „	$c'c$ = 5,55 „
ef = 0,20 „	cd' = 3,60 „
ff' = 0,25 „	$d'd$ = 2,30 „
$e'f'$ = 0,30 „	de' = 1,35 „
$d'e'$ = 0,95 „	$e'e$ = 0,75 „
$c'd'$ = 1,95 „	ef' = 0,45 „
$b'c'$ = 4,05 „	$f'f$ = 0,25 „
$a'b'$ = 7,90 „	

Von diesen Elementen haben wir $f'f$ als den äussern Durchmesser des Central-Nucleus zu betrachten.

Man sieht nun sogleich, dass die Windungsabstände von a' bis d' und von a bis c ganz entschieden auf den Werth $q = 2$ verweisen; dagegen muss bei d eine Störung statt gefunden haben, durch welche die Abstände cd und de einen etwas anomalen Werth erhalten. Der grösste Windungsabstand Aa endlich weicht so bedeutend von dem Werthe 11,8 ab, welcher für ihn unter Voraussetzung desselben Quotienten folgen würde, dass wir uns zu der Annahme genöthigt sehen, die Schale sei in ihrer letzten halben Windung auf einen kleinern Quotienten übergegangen, dessen Werth sich aus ab und Aa zu $\frac{5}{3}$ bestimmen dürfte. Dieses Verhältniss scheint sich übrigens im Allgemeinen für alle ausgewachsenen Exemplare von Planorbis corneus zu bestätigen.

Daher wird auch der Diameter Aa' bei den folgenden Betrachtungen zu vernachlässigen sein. Berechnet man nämlich aus den Diametern $a'a$ bis cd' den Windungs-Quotienten, so erhält man ebenfalls sehr übereinstimmend den Werth $q = 2$. Es kann also dieser Werth als der Normalwerth für die Mehrzahl der äusseren Windungen betrachtet werden.

Dagegen ist es sehr auffallend, dass die innersten Windungen bis zu dem Punkte d' ein abweichendes Gesetz befolgen. Die wenigen Windungsabstände verweisen nämlich auf den Quotienten $p = 3$, und dasselbe Resultat geben die betreffenden Diameter. Noch merkwürdiger aber ist es, dass diese inneren Diameter eine geometrische Pro-

gression nach derselben Zahl 3 bilden. Dieses Verhältniss beweist, dass der innerste Theil der Schale nach einer logarithmischen Spirale gewunden ist. Da nun aber der äussere Theil der Schale auf eine Conchospirale verweist, so sind wir für die ganze Schale überhaupt zu der Annahme einer zusammengesetzten cyclocentrischen Conchospirale genöthigt, deren innerer Theil als logarithmische Spirale, d. h. um einen Central-Nucleus ausgebildet ist, für welchen sich $\alpha = \frac{a}{p-1}$ bestimmt.

§. 8.

Berechnung der innern Spirale.

Der Durchmesser 2α des Central-Nucleus wurde approximativ zu 0,25 *mm.* bestimmt, und dies würde denn auch in gegenwärtigem Falle der Werth des Parameters a sein. Demnach sind die Elemente der innern Spirale:

$$p = 3$$
$$\alpha = 0{,}125\,mm.$$
$$a = 0{,}25\,mm.$$

Wir wollen nun zuvörderst aus diesen Elementen uud aus den gemessenen Windungsabständen h der Punkte d', e' u. s. w. die Umlaufswinkel derselben nach der Formel

$$v = 2\pi\left(1 + \frac{\log h - \log a}{\log p}\right)$$

berechnen; die Rechnung ergiebt:

für d', $v = 2{,}215.2\pi$
,, e', $v = 1{,}166.2\pi$
,, d, $v = 1{,}797.2\pi$
,, e, $v = 0{,}797.2\pi$

Aus diesen vier Winkeln folgt als corrigierter mittlerer Werth für d' $v = 2{,}27.2\pi$, und daher die Reihe der corrigierten Winkel:

für d', $v = 2{,}27.2\pi$
,, e', $v = 1{,}27.2\pi$
,, d, $v = 1{,}77.2\pi$
,, e, $v = 0{,}77.2\pi$

Berechnen wir nun aus diesen corrigierten Winkeln rückwärts die Radien der Punkte d', e' u. s. w. nach der Gleichung

$$r = \alpha p^{\frac{v}{2\pi}}$$

so erhalten wir die nachstehenden Werthe:

für d', $r = 1{,}513$ *mm.*	für d, $r = 0{,}874$ *mm.*
„ e', $r = 0{,}504$	„ e, $r = 0{,}291$
„ f', $r = 0{,}168$	„ f, $r = 0{,}097$

Hieraus ergeben sich folgende berechnete Werthe der Windungsabstände und Diameter, welchen zur Vergleichung die beobachteten Werthe beigesetzt sind.

Diameter	berechnet	beobachtet
$d'd$	2,387	2,30
de'	1,378	1,35
$e'e$	0,795	0,75
ef'	0,459	0,45
$f'f$	0,265	0,25

Windungsabstände	berechnet	beobachtet
$d'e'$	1,009	0,95
$e'f'$	0,336	0,30
ef	0,194	0,20
de	0,583	0,60

Die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist so genügend, als sie der Natur der Sache nach erwartet werden kann. Da jedoch alle Diameter etwas zu gross berechnet worden sind, so ist dies wohl ein Beweis, dass der Umlaufswinkel $2{,}27.2\pi$ für d' noch etwas zu gross sei; wahrscheinlich dürfte der aus den beiden für d und e' gefundenen Winkeln folgende Mittelwerth $2{,}23.2\pi$ dem wahren Werthe sehr nahe kommen. Dass übrigens $f'f$ in diesen Rechnungen nicht den Diameter des Central-Nucleus bedeutet, versteht sich von selbst; denn der berechnete Punkt f gehört ja schon dem negativen Zweige der Spirale, welcher in der Schale gar nicht existiert.

§. 9.

Berechnung der äussern Spirale.

Nachdem solchergestalt die Ansicht von der Natur der innersten Spirale und die Elemente derselben hinreichend gerechtfertigt worden sind, verschreiten wir zur Betrachtung der äussern Spirale, von welcher wir bereits wissen, dass solche nach dem Quotienten $q = 2$ gewunden ist. Da uns nun auch die Werthe von α und p bekannt sind, so

stellt sich als nächstes Problem die Berechnung des Grenzwinkels $u.2\pi$ beider Spiralen heraus, welche in gegenwärtigem Falle nach den Formeln

$$p^u = \frac{Mp}{a\,(p-q)} = L$$

und
$$u = \frac{\log L}{\log p}$$

in §. 5. auszuführen sein wird.

Nach dem Vorhergehenden war:

$$a = 0{,}125\,mm.,\ p = 3 \text{ und } q = 2;$$

Der mittlere Werth von M bestimmt sich nun durch sechs, aus den duplodistanten und singulodistanten äusseren Diametern (von $a'a$ bis zu cd') berechneten Einzelwerthen fast genau zu 0,68 *mm*; daraus folgt:

$$u = 2{,}542$$

Die Conchylie geht also nach etwas mehr als drittehalb Windungen von der innern auf die äussere Spirale über. Ferner ergiebt sich der constante Radius des Kreises, um welchen wir uns die zweite Spirale entwickelt denken, oder der Archiradius dieser Spirale:

$$a' = 2{,}04\,mm.$$

und der letzte Windungsabstand der innern Spirale:

$$H = 1{,}36\,mm.$$

Wir wollen nun die Umlaufswinkel $n.2\pi$ der äussern Spirale von ihrem Anfangspunkte aus berechnen, indem wir successiv die gemessenen Windungsabstände $h = a'b'$, $h = ab$ u. s. w. zu Grunde legen, wobei wir jedoch von den beiden Abständen $c'd'$ und cd abstrahieren, weil solche der Uebergangswindung angehören. Wir finden so:

für a',	$n = 2{,}538$	für a,	$n = 2{,}117$
„ b',	$n = 1{,}574$	„ b,	$n = 1{,}092$

Diese vier Werthe führen für a' auf den corrigierten Mittelwerth 2,58, und folglich überhaupt auf die berichtigten Umlaufswinkel:

für a',	$x = 2{,}58.2\pi$	für a,	$x = 2{,}08.2\pi$
„ b',	$= 1{,}58$	„ b,	$= 1{,}08$
„ c',	$= 0{,}58$	„ c,	$= 0{,}08$

Die Radien dieser Punkte berechnen sich nun aus den so eben gefundenen Umlaufswinkeln, nach der zu Ende von §. 5. stehenden Gleichung der äussern Spirale, wie folgt:

für a',	$r = 15{,}590\,mm.$	für a,	$r = 10{,}820$
„ b',	$= 7{,}451$	„ b,	$= 5{,}070$
„ c',	$= 3{,}386$	„ c,	$= 2{,}195$

Addieren wir nun je zwei semissodistante Radien, so erhalten wir endlich die Diameter der äussern Spirale mit folgenden berechneten Werthen, welchen zur Vergleichung die gemessenen Werthe beigesetzt sind:

Diameter.	berechnet	gemessen
$a'a$	26,410	26,30
ab'	18,271	18,40
$b'b$	12,521	12,50
bc'	8,456	8,45
$c'c$	5,581	5,55

Endlich folgen durch Subtraction der Radien (unter Zuziehung der in §. 8. gefundenen Radien für d' und d) die berechneten äusseren Windungsabstände:

Windungsabstände	berechnet	gemessen
$a'b'$	8,139	7,90
$b'c'$	4,065	4,05
$c'd'$	1,873	1,95
cd	1,321	1,30
bc	2,875	2,90
ab	5,750	5,90

Die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist in der That so genügend, als es sich nur erwarten lässt; eine vollkommene Uebereinstimmung wird ohnedies niemals statt finden können, weil Störungen und Beobachtungsfehler mehr oder weniger ihren Einfluss auf die Beobachtungs-Elemente ausüben werden.

§. 10.

Anderweite Berechnung der innern Spirale.

Wir können nun auch rückwärts aus dem in §. 9. gefundenen Grenzwinkel beider Spiralen und aus dem Umlaufswinkel des Punktes c die Radien und Diameter der innern Spirale berechnen. Weil nämlich der Punkt c um $0{,}08.2\pi$ vom Anfangspunkte der äussern Spirale, dieser letztere Punkt aber um $2{,}542.2\pi$ vom Anfangspunkte der innern Spirale gelegen ist, so wird der ganze Umlaufswinkel des Punktes c $= 2{,}622.2\pi$ sein. Da nun der Punkt d' der nächst innere semissodistante Punkt ist, so würde dessen Umlaufswinkel $2{,}122.2\pi$ betragen müssen, während er doch oben in §. 8. zu $2{,}27.2\pi$ berechnet wurde.

Es wurde schon dort die Vermuthung ausgesprochen, dass der Werth $2{,}27.2\pi$ etwas zu gross sein dürfte; es ist aber noch viel gewisser, dass der Werth $2{,}122.2\pi$ zu klein sei; denn berechnen wir abermals aus ihm, nach der Gleichung $r = \alpha p^m$, die Radien und Diameter der innern Spirale, so erhalten wir folgende Resultate:

Diameter	berechnet	gemessen
$d'd$	2,029	2,30
de'	1,172	1,35
$e'e$	0,677	0,75
ef'	0,391	0,45

Die Differenzen zwischen Rechnung und Messung sind hier offenbar so gross, dass an der unrichtigen und zwar zu kleinen Bestimmung des Umlaufswinkels von d' gar nicht gezweifelt werden kann. Daraus ergiebt sich aber wiederum, dass entweder der Grenzwinkel u, oder der Umlaufswinkel von c, oder auch der Archiradius α nicht ganz richtig bestimmt worden sein kann. Die Fehler werden zuletzt immer in der Unvollkommenheit der eigentlichen Beobachtungs-Elemente begründet sein, und ich glaube nicht, dass die so eben erörterte Differenz irgend einen Zweifel gegen die Theorie hervorrufen kann. Denn kleine Messungsfehler und unbedeutende Störungen des gesetzmässigen Baues, von welchen ja die ersteren nie gänzlich zu vermeiden, die letzteren aber gerade bei Planorbis corneus durch die Messungen selbst angezeigt sind, werden in der Regel nur eine approximative Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erreichen lassen.

B. Messung und Berechnung des Exemplars Nr. II.

§. 11.

Beobachtungs-Elemente und nächste Folgerungen.

Da der grössere Theil der letzten Windung an diesem Exemplare abgebrochen war, so fehlt auch derjenige Beobachtungspunkt, welcher uns bei dem Exemplare Nr. I. auf die Existenz einer dritten (äussersten) Spirale verwies. Ausserdem aber führte die Messung auf folgende Beobachtungs-Elemente:

Windungsabstände	Diameter
$a'b' = 7{,}60$ *mm.*	$a'a = 25{,}05$ *mm.*
$b'c' = 3{,}95$ „	$ab' = 17{,}45$ „
$c'd' = 1{,}90$ „	$b'b = 12{,}05$ „
$d'e' = 0{,}80$ „	$bc' = 8{,}10$ „
$e'f' = 0{,}25$ „	$c'c = 5{,}30$ „
$f'f = 0{,}25$ „	$cd' = 3{,}40$ „
$ef = 0{,}20$ „	$d'd = 2{,}05$ „
$de = 0{,}55$ „	$de' = 1{,}25$ „
$cd = 1{,}35$ „	$e'e = 0{,}70$ „
$bc = 2{,}80$ „	$ef' = 0{,}45$ „
$ab = 5{,}40$ „	$f'f = 0{,}25$ „

Der centrale Theil der ganzen Schale, welchen wir als den Repräsentanten des Central-Nucleus zu betrachten haben, besitzt also auch in diesem Exemplare ungefähr den Durchmesser von 0,25 *mm.*

Die zunächst angrenzenden innersten Windungsabstände bis zu den Punkten d und d' lassen nicht wohl einen andern Quotienten annehmen, als $p = 3$, womit auch die aus den entsprechenden Diametern abzuleitenden Werthe übereinstimmen. Auch sieht man, dass diese Diameter selbst eine geometrische Progression nach demselben Quotienten bilden, daher denn der innere Theil der Conchylie abermals nach einer logarithmischen Spirale vom Quotienten 3 gewunden ist.

Dagegen ist es ersichtlich, dass die äusseren drei Windungen bis zu den Punkten d' und d nach einem andern Quotienten q gebildet sein müssen, welcher sich sowohl aus den Windungsabständen als aus den Diametern zu $q = 2$ bestimmt.

So weit also die Schale des Exemplars Nr. II. noch erhalten ist, giebt sie uns wesentlich dieselben Resultate, wie jene des Exemplars Nr. I.; d. h. ihre innersten Windungen sind um einen Central-Nucleus vom Archiradius $\alpha = 0{,}125$ *mm.* nach einer logarithmischen Spirale vom Quotienten 3, ihre äusseren Windungen dagegen nach einer cyclocentrischen Conchospirale vom Quotienten 2 gewunden.

§. 12.

Berechnung beider Spiralen.

Aus den duplodistanten und singulodistanten Diametern der äussern Spirale erhalten wir zuvörderst für M den Mittelwerth 0,655 *mm.*, und aus diesem $u = 2{,}508$

Nach drittehalb Windungen vollendet sich also das Gesetz der innern Spirale; weiter ergiebt sich:

$$\alpha' = 1{,}967\ mm.$$
$$H = 1{,}311\ mm.$$

wodurch die Umlaufswinkel $n.2\pi$ der vier Punkte a', b', a und b gefunden werden, wie folgt:

für a', $n = 2{,}535$	für a, $n = 2{,}042$
für b', $n = 1{,}591$	für b, $n = 1{,}095$

Diese Werthe führen für a' auf den corrigierten Mittelwerth $n = 2{,}566$, und daher auf die berichtigten Umlaufswinkel:

für a', $x = 2{,}566.2\pi$	für a, $x = 2{,}066.2\pi$
„ b', $= 1{,}566$	„ b, $= 1{,}066$
„ c', $= 0{,}566$	„ c, $= 0{,}066$

Berechnen wir nun aus diesen Umlaufswinkeln nach der zu Ende von §. 5. stehenden Gleichung die Radien der Punkte a', b' u. s. w., so wie die Diameter und Windungsabstände derselben*), so erhalten wir folgende Werthe:

für a', $r = 14{,}867\ mm.$	für a, $r = 10{,}323$
„ b', $= 7{,}109$	„ b, $= 4{,}833$
„ c', $= 3{,}228$	„ c, $= 2{,}090$

Diameter	berechnet	gemessen
$a'a$	25,190	25,05
ab'	17,432	17,45
$b'b$	11,942	12,05
bc'	8,061	8,10
$c'c$	5,318	5,30

Windungsabstände	berechnet	gemessen
$a'b'$	7,758	7,60
$b'c'$	3,881	3,95
$c'd'$	1,873	1,90
cd	1,321	1,35
bc	2,743	2,80
ab	5,490	5,40

*) Bei den Windungsabständen ist auf die weiter unten berechneten Radien von d' und d sogleich mit Rücksicht genommen worden.

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist wiederum so gross, dass die Richtigkeit der erstern erwiesen sein dürfte. Dabei verdient es hervorgehoben zu werden, dass diese Uebereinstimmung hier, eben so wie in §. 9., für die Diameter weit auffallender hervortritt, als für die Radien. Es mag dies wohl seinen Grund darin haben, dass das Thier die an einzelnen Stellen jeder Windung vorkommenden Anomalieen der Schalenbildung im Laufe der ganzen Windung auszugleichen strebt, so dass sich je zwei gegenüberliegende Windungspunkte in dieser Hinsicht gewissermassen compensieren.

Da die innere Spirale bei $2{,}508.2\pi$ aufhört, und der Punkt c um $0{,}066.2\pi$ weiter liegt, so entspricht diesem Punkte vom Anfangspunkte der Conchylie an der ganze Umlaufswinkel $2{,}574.2\pi$, folglich dem Punkte d' der Winkel $2{,}074.2\pi$, dem Punkte d der Winkel $1{,}574$ u. s. w, Hieraus berechnen sich nach der Gleichung $r = \alpha p^m$ die Radien der innern Spirale:

für d', $r = 1{,}220$ *mm.*	für d, $r = 0{,}705$
„ e', $= 0{,}407$	„ e, $= 0{,}235$
„ f', $= 0{,}136$	

und endlich die Diameter und Windungsabstände derselben, wie folgt:

Diameter	berechnet	gemessen
$d'd$	1,925	2,05
de'	1,112	1,25
$e'e$	0,642	0,70
ef'	0,371	0,45
Windungsabstände	**berechnet**	**gemessen**
$d'e'$	0,813	0,80
$e'f'$	0,271	0,25
de	0,470	0,55

Auch diese Resultate stimmen hinreichend überein, wenn man bedenkt, dass die Messungen nur bis auf $\pm$ 0,05 *mm.* genau sind, und dass die Schale ziemlich bedeutende Störungen des Bildungsgesetzes zeigt.

C. Messung und Berechnung des Exemplars Nr. III.

§. 13.

Beobachtungs-Elemente und nächste Folgerungen.

Da an diesem Exemplare der centrale Theil ausgesprungen war, so gestattete solches fast nur eine Untersuchung der Verhältnisse der

äussern Spirale. Es liessen sich jederseits vier Windungspunkte bestimmen, und die Messung ergab folgende Elemente:

Windungsabstände	Diameter
$a'b' = 9{,}05$ *mm.*	$ab' = 22{,}90$ *mm.*
$b'c' = 5{,}25$ „	$b'b = 16{,}05$ „
$c'd' = 2{,}50$ „	$bc' = 10{,}80$ „
$cd = 1{,}85$ „	$c'c = 7{,}25$ „
$bc = 3{,}55$ „	$cd' = 4{,}75$ „
$ab = 6{,}85$ „	$d'd = 2{,}90$ „

Die Windungsabstände, mit Ausnahme des letzten Abstandes $a'b'$, führen auf den Quotienten $q = 2$, welche Zahl noch weit genauer aus den Differenzen der Diameter folgt. Nur der äusserste Theil der letzten Windung strebt einem kleinern Quotienten entgegen, wie das Verhältniss von $b'c' : a'b'$ lehrt, weshalb denn auch der Diameter $a'a$ ausser Acht gelassen worden ist. Es bestätigt sich sonach an diesem dritten Individuum, dass Planorbis corneus den grössten Theil seiner Schale nach dem Quotienten 2 bildet, zuletzt aber in einen kleinern Quotienten übergeht.

Die Windungspunkte d' und d gehören übrigens schon zu der innern Spirale, wie die nachfolgende Rechnung lehrt.

§. 14.

Berechnung der Spirale.

Die an den beiden vollständigen Exemplaren Nr. I. und II. angestellten Beobachtungen berechtigen wohl ohne Weiteres zu der Annahme, dass auch das Exemplar III. in seinem Innern nach einer logarithmischen Spirale vom Quotienten $p = 3$ gewunden gewesen sei. Setzen wir nun auch den Werth von α abermals $= 0{,}125$ *mm*,, so führen die duplodistanten, singulodistanten und semissodistanten Diameter von ab' bis $d'd$ auf den Mittelwerth von M (§. 5.)

$$M = 0{,}68 \ mm.$$

Aus diesem Werthe, welcher mit dem in §. 9. für das Exemplar Nr. I. gefundenen völlig übereinstimmt, folgt also eben so wie dort:

$$u = 2{,}542$$
$$\alpha' = 2{,}04 \ mm.$$
$$H = 1{,}36 \ mm.$$

und es berechnen sich die Umlaufswinkel der Windungspunkte a, b u. s. w. vom Anfangspunkte der äussern Spirale aus, wie folgt:

für a, $n = 2{,}332$	für b' $n = 1{,}950$
„ b $= 1{,}384$	„ c' $= 0{,}878$

Aus diesen ergiebt sich 2,386 als der corrigierte mittlere Werth für a, und überhaupt der corrigierte Umlaufswinkel:

für a, $x = 2{,}386.2\pi$	für a' $x = 2{,}886.2\pi$
„ b, $= 1{,}386.2\pi$	„ b' $= 1{,}886.2\pi$
„ c, $= 0{,}386.2\pi$	„ c' $= 0{,}886.2\pi$

Berechnen wir nun aus diesen Umlaufswinkeln die Radien der Punkte a, b u. s. w., so erhalten wir die unten stehenden Werthe, welchen die Radien der beiden zur innern Spirale gehörigen Punkte d' und d beigefügt sind, deren Berechnung auf Folgendem beruht. Der Punkt c liegt $0{,}386.2\pi$ vom Anfangspunkte der äussern Spirale, welcher seinerseits $2{,}542.2\pi$ vom Anfangspunkte der innern Spirale entfernt ist; der totale Umlaufswinkel des Punktes c beträgt also $2{,}928.2\pi$, woraus sich natürlich für die beiden Punkte d' und d die Umlaufswinkel $2{,}428.2\pi$ und $1{,}928.2\pi$ ergeben, aus denen ihre Radien nach der Gleichung $r = \alpha p^m$ berechnet werden konnten. Die ganze Reihe der berechneten Radien wird hiernach folgende:

für a, $r = 13{,}540$	
„ b, $= 6{,}427$	für b', $r = 9{,}373$
„ c, $= 2{,}874$	„ c', $= 4{,}347$
„ d, $= 1{,}040$	„ d' $= 1{,}800$

Durch Addition der singulodistanten Radien gelangt man endlich auf folgende berechnete Werthe der Diameter und Windungsabstände, welchen die beobachteten Werthe beigesetzt sind:

Diameter	berechnet	gemessen
ab'	22,913	22,90
$b'b$	15,800	16,05
bc'	10,774	10,80
$c'c$	7,221	7,25
cd'	4,674	4,75
$d'd$	2,840	2,90

Windungsabstände	berechnet	gemessen
$b'c'$	5,026	5,25
$c'd'$	2,547	2,50
cd	1,834	1,85
bc	3,553	3,55
ab	7,113	6,85

Wiederum stellt sich eine so nahe Uebereinstimmung zwischen Messung und Rechnung heraus, dass die Theorie, als die Grundlage der letztern, eine neue Bürgschaft ihrer Richtigkeit gefunden haben dürfte.

§. 15.

Endresultate.

Nach den an drei verschiedenen Individuen von Planorbis corneus gefundenen Ergebnissen der Messung und Rechnung glaube ich mich berechtigt, über das Gestaltungsgesetz dieser Süsswasserschnecke folgende Sätze aufstellen zu dürfen:

1) Die Schale völlig ausgewachsener Exemplare ist dreifach zusammengesetzt, oder triplospiral.

2) Der innerste Theil der Schale ist nämlich nach einer logarithmischen Spirale vom Quotienten 3 und vom Archiradius $\alpha = 0{,}125$ *mm.* gewunden; dieser Theil absolvirt etwas über $2\frac{1}{2}$ Windungen; seine erste Hälfte wird aber bei dem spätern Wachsthum des Thieres allmählig mit Kalkmasse ausgefüllt, indem sich dasselbe nach und nach aus demselben herauszieht.

3) Der mittlere und bedeutendste Theil der Schale ist nach einer cyclocentrischen Conchospirale vom Quotienten $q = 2$ und vom Archiradius $\alpha' = 2{,}0$ *mm.* gewunden; er scheint ungefähr drei Windungen zu bilden.

4) Der äusserste, meist nur etwa in einer Viertelwindung ausgebildete Theil der Schale ist nach einem dritten Quotienten gewunden, welcher kleiner als 2 und vielleicht $= \frac{5}{3}$ ist.

Schlüsslich will ich nur noch bemerken, dass das Bildungsgesetz des mittlern Theiles der Schale durch den in §. 6. erwähnten Längsschnitt eines vierten Exemplars vollkommen bestätigt wird, indem

sowohl die Windungsabstände als auch die Diameter der sichtbar gemachten Windungen ganz entschieden den Quotienten $q = 2$ geben. Eine Messung gab z. B. die Elemente:

Windungsabstände	Diameter
$a'b' = 5{,}20$ *mm.*	$a'a = 16{,}60$ *mm.*
$b'c' = 2{,}55$,,	$ab' = 11{,}40$,,
$c'd' = 1{,}25$,,	$b'b = 7{,}70$,,
$bc = 1{,}80$,,	$bc' = 5{,}15$,,
$ba = 3{,}70$,,	$c'c = 3{,}35$,,
	$cd' = 2{,}10$,,

aus welchen gar kein anderer Werth von q gefolgert werden kann.

ELEKTRODYNAMISCHE
MAASSBESTIMMUNGEN
INSBESONDERE
WIDERSTANDSMESSUNGEN

VON

WILHELM WEBER.

I.

WIDERSTANDSMESSUNGEN NACH EINEM GEGEBENEN GRUNDMAASSE.

1.

Die Ausführung der Widerstandsmessungen setzt, wie die Ausführung anderer Messungen, dreierlei voraus, nämlich erstens eine Definition der zu messenden Grössenart, zweitens ein bestimmtes Maass und drittens eine Methode zur Vergleichung der Grössen dieser Art unter einander.

Erstens die Definition des Widerstandes, von welchem hier gehandelt wird, lässt sich auf folgende Weise aussprechen. Nach den von Ohm aufgestellten Gesetzen der galvanischen Kette hat bei unverändertem geschlossenem Leiter der Quotient aus der gemessenen elektromotorischen Kraft und aus der gemessenen Stromintensität immer gleichen Werth und dieser Werth hängt bloss von der Grösse und Beschaffenheit des Leiters ab. Dies vorausgesetzt, wird nun Dasjenige, was in der Grösse und Beschaffenheit des Leiters liegt und wovon der Werth jenes constanten Quotienten abhängt, mit dem Namen des Widerstandes des Leiters bezeichnet und als eine jenem Quotienten proportionale Grösse betrachtet. Hierdurch ist die Möglichkeit von Widerstandsmessungen vermittelst der Bestimmung jenes Quotienten gegeben.

Was zweitens das Maass des Widerstandes betrifft, so soll hier das von Jacobi in Petersburg aufgestellte und unter dem 30. August 1846 mit folgenden Bemerkungen an Herrn Professor Poggendorff in Berlin übersendete Grundmaass angenommen werden. Herr Jacobi schreibt: «Ich habe mich schon bei einer früheren Gelegenheit darüber geäussert, wie interessant und wichtig es wäre, wenn die Physiker bei ihren galvanischen Untersuchungen ihre Strom-

messungen nach elektrolytischem, also absolutem Maasse angäben. Es wäre dazu nur nöthig, die Boussolen, mit denen man arbeitet, auf elektrolytische Actionen zu beziehen, um durch Publicierung der angestellten Versuche Auskunft über den Grad der Genauigkeit zu geben, den das gewählte Instrument oder die gewählte Methode gewährt. Indessen behalte ich, dieses näher zu erörtern, einer andern Gelegenheit vor. Nicht minder wichtig, als die Absolutheit der Strommessungen, ist es, wenn die Physiker das Maass der Leitungswiderstände, die sie messen, durch eine gemeinschaftliche Einheit ausdrücken. Hier aber kann keine absolute Bestimmung stattfinden, weil es scheint, dass bei den Widerständen auch der chemisch reinsten Metalle Unterschiede stattfinden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen allein nicht erklärt werden können. Gesetzt also, Sie hätten Ihre Widerstandsmesser und Multiplicatoren auf Kupferdraht von 1 Meter Länge und 1 Millimeter Dicke bezogen, so hätten wir immer noch nicht die Ueberzeugung, ob Ihr Kupferdraht und der unsrige einen gleichen Widerstandscoefficienten besitzen. Alle diese Schwierigkeiten nun werden gehoben, wenn man einen beliebig gewählten Kupfer- oder andern Draht bei den Physikern umherwandern lässt und diese bittet, ihre Widerstandsmessinstrumente darauf zu beziehen und ihre Messungen künftig nur nach diesem Maasse anzugeben. Herr Professor Magnus wird Ihnen also ein kleines schwarzes, mit zwei Schrauben versehenes Kistchen überreichen, in welchem ein auf einem Brete aufgewundener Kupferdraht durch einen aus Wachs und Harz bestehenden Mastix eingekittet und vor Nässe und Feuchtigkeit geschützt ist. Diesen Widerstands-Etalon bitte ich mit Ihren Widerstandsmessern zu vergleichen, zu einem solchen Vergleiche aber auch Herrn Professor Weber und andere Physiker, die sich mit galvanometrischen Messungen beschäftigen, aufzufordern. . . . .
Der Kupferdraht, der in diesem Kästchen befindlich ist, ist zwischen den Schrauben genau 25′ russisch-englisch lang, wiegt 22^{gr},5495 und seine Dicke beträgt nach den mit einem guten Münchener, mit Mikrometer versehenen Mikroskope gemachten Messungen an einem Ende 0″0265 englisch und am andern 0″0260, im Mittel also 0″02625 englisch. Diese Messungen selbst sind das Mittel aus 3 sehr nahe übereinstimmenden Beobachtungen. Bemerken will ich noch, dass die gewogene Drahtlänge $25\frac{1}{8}'$ betrug (also $25\frac{1}{8}' = 22^{gr},5495$), und dass $\frac{3}{4}''$ auf jeder Seite an den Schrauben angelöthet sind. In französischem Maasse ausgedrückt, würde

die Länge des Drahtes 25' = 7^m,61975 und seine Dicke 0"02625 = 0^m000667 sein.«

Was endlich drittens die Vergleichung des Widerstandes zweier Leiter oder die Bestimmung ihres Widerstandsverhältnisses betrifft, zum Beispiel die Vergleichung einer Copie mit dem gegebenen Grundmaasse, so sind dazu zwei Instrumente nebst mehreren Leitern erforderlich, nämlich 1) ein Elektromotor, mit welchem galvanische Ströme erregt werden, 2) ein Galvanometer, mit welchem die Intensität der erregten Ströme gemessen wird. In dem ersten Instrumente bildet derjenige Leiter, in welchem der Strom erregt wird, in dem zweiten Instrumente derjenige Leiter, durch welchen der Strom gehen muss, um gemessen zu werden, einen wesentlichen Bestandtheil. Fügt man zu diesen beiden in den beiden Instrumenten schon enthaltenen Leitern noch diejenigen hinzu, deren Widerstandsverhältniss bestimmt werden soll, so hat man eine vollständige Uebersicht aller zu einer Widerstandsvergleichung nothwendigen Hülfsmittel. Nach dieser Uebersicht sollen nun 1) der bei den folgenden Versuchen gebrauchte Elektromotor, 2) das Galvanometer, 3) die Leiter und deren Combinationen besonders betrachtet werden.

2.

Der Elektromotor.

Bei der Wahl des Elektromotors kommt es hauptsächlich auf die Entscheidung darüber an, ob man sich fortdauernder oder momentaner Ströme bedienen will. Im ersteren Falle leuchten die Vorzüge der sogenannten constanten Säulen, wie sie von Daniell, Grove und Bunsen angegeben worden sind, zum Zweck solcher Messungen von selbst ein. Im zweiten Falle dagegen bedient man sich zur Stromerregung mit weit grösserem Vortheile der Induction beharrlicher Magnete, weil es bei der Anwendung momentaner Ströme weder auf die Intensität dieser Ströme, noch auf die Dauer derselben allein, sondern auf den Werth des Products beider ankommt, welches man den Integralwerth der Stromintensität nennen kann. Dieser Integralwerth kann aber nur auf dem Wege der Induction durch beharrliche Magnete in immer gleicher Grösse dargestellt werden.

Bei den folgenden Versuchen ist den momentanen Strömen und folglich der magnetischen Induction der Vorzug gegeben worden aus

folgenden zwei Gründen. Erstens gewährt bei feinen Messungen die Anwendung metallischer Leiter, z. B. die Anwendung von lauter Kupferdrähten, ohne dass ein feuchter Leiter, wie Wasser, Säure oder eine Salzlösung, in die Kette eingeschaltet zu werden braucht, eine weit grössere Sicherheit. Es ist bekannt, dass die Polarisationserscheinungen an den in einen feuchten Leiter eingetauchten metallischen Oberflächen die Messungen stören. Solche Störungen vermeidet man durch Anwendung geschlossener Drahtketten, in denen man Ströme induciert, indem man sie gegen beharrliche Magnete bewegt. Jede Wiederholung einer solchen Bewegung bringt einen Strom von dem nämlichen Integralwerthe hervor, so kurz auch die Dauer desselben sei. Zweitens würde bei Anwendung fortdauernder Ströme, wie sie mit constanten Säulen erhalten werden, die Temperatur der Leiter, deren Widerstandsverhältniss bestimmt werden soll, steigen und dieses Steigen in den verschiedenen Leitern verschieden sein. Mit der Temperatur wächst aber der Widerstand der Leiter und diese Veränderlichkeit des Widerstandes würde die Bestimmung des Widerstandsverhältnisses unsicher machen, was durch die Anwendung momentaner Ströme, welche von so kurzer Dauer sind, dass gar keine merkliche Temperaturänderung eintreten kann, vermieden wird.

Die zweckmässige Einrichtung und der Gebrauch magnetischer Inductoren zu Messungen im Allgemeinen ist bei einer andern Gelegenheit schon erörtert worden. Siehe darüber «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838.» S. 86. Die besondere Einrichtung, welche dem bei den folgenden Versuchen gebrauchten Inductor gegeben worden war, findet man am Ende dieser Abhandlung in Beilage *A* genauer beschrieben und daselbst in Fig. 1 abgebildet.

3.

Das Galvanometer.

Zur Messung der Intensität eines fortdauernden Stromes kann man sich sowohl der sogenannten Sinusboussole als auch der Tangentenboussole bedienen; um aber die Intensität eines inducierten momentanen Stromes, d. h. die Stärke eines sogenannten Inductionsstosses, zu messen, kann man sich nur der Tangentenboussole bedienen, weil der Gebrauch der Sinusboussole ein Beharren der Nadel in ihrer ab-

gelenkten Lage voraussetzt, was bei einem Inductionsstosse nicht der Fall ist; denn die Nadel wird durch einen Inductionsstoss, welchen sie in ihrer Ruhelage erhält, bloss in Schwingung gesetzt und erhält dadurch keine bleibende Ablenkung. Am genauesten und bequemsten lassen sich die Elongationen der durch Inductionsstösse erregten Nadelschwingungen an einem mit Multiplicator versehenen Magnetometer beobachten, wozu Gauss die Anleitung in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837» gegeben hat. Nur ist zu beachten, dass zu den vorliegenden Messungen ein grosser Multiplicator mit grossem Leitungswiderstande, womit gewöhnlich die grösseren Magnetometer versehen sind, von Nachtheil sein würde. Zu den folgenden Versuchen wurde daher ein Magnetometer von sehr kleinen Dimensionen, dessen Nadel nur 100 Millimeter lang war, gebraucht, welches mit einem kleinen Multiplicator von mässigem Widerstande versehen war.

Die Ausführung der Beobachtungen, zumal wenn sie oft und schnell hinter einander wiederholt werden sollen, wird sehr erleichtert, wenn das Magnetometer ausser mit dem Multiplicator auch mit einem starken Dämpfer versehen wird, welcher die in Schwingung versetzte Nadel nach einer kleinen Zahl von Schwingungen zur Ruhe zurückführt. Da die Wirksamkeit dieses Dämpfers hauptsächlich auf der magnetischen Kraft der schwingenden Nadel beruht, so muss man dazu das Magnetometer mit einer sehr stark magnetisierten Nadel versehen. Zugleich ist es aber nöthig, dass die Schwingungsdauer der Nadel nicht unter 10 bis 12 Secunden betrage, wenn die Beobachtungen mit Genauigkeit ausgeführt werden sollen. Diesen Zweck kann man auch bei einer starken Magnetisierung der Nadel dadurch erreichen, dass man der Nadel eine verhältnissmässig zu ihrer geringen Länge grosse Dicke giebt, z. B. von 15 Millimeter bei 100 Millimeter Länge. Die genauere Beschreibung des hier gebrauchten Galvanometers findet man am Ende der Abhandlung in Beilage *B*, wo auch in Fig. 2. 3. 4. eine Abbildung gegeben ist.

4.

Combinationen der vier Leiter.

Die vier Leiter sind der Inductordraht, der Multiplicatordraht, der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der

Draht der Copie. Von diesen vier Leitern sind die beiden ersten zu allen Versuchen nothwendig und bilden die Kette entweder allein oder zusammen mit dem einen oder mit den beiden anderen Drähten, wobei folgende Combinationen stattfinden können.

1) Die Enden des Inductor- und Multiplicatordrahtes werden unmittelbar mit einander verbunden, und diese beiden Drähte bilden allein die Kette.

2) Die vorige Kette wird an einer Stelle gelöst und daselbst der Draht des Original-Widerstandsmaasses eingeschaltet.

3) Statt des Drahtes des Original-Widerstandsmaasses wird der Draht der Copie eingeschaltet.

4) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden an einander gesetzt und in die Kette hinter einander eingeschaltet.

5) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden neben einander gesetzt und, am Anfang und am Ende mit einander verbunden, in die Kette eingeschaltet.

6) Die Enden des Inductor- und Multiplicatordrahtes werden mit einander unmittelbar verbunden, bilden aber nicht wie unter (1) die Kette allein, sondern zwischen ihre beiden Verbindungsstellen wird der Draht des Original-Widerstandsmaasses eingeschaltet, so dass der vom Inductordrahte zugeleitete Strom zwischen diesem letzteren und dem Multiplicatordrahte getheilt wird.

7) Statt des Drahtes des Original-Widerstandsmaasses wird der Draht der Copie zwischen den beiden Verbindungsstellen des Inductors und Multiplicators eingeschaltet.

8) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden an einander gesetzt und zwischen den beiden Verbindungsstellen des Inductors und Multiplicators eingeschaltet.

9) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden neben einander gesetzt und, am Anfang und am Ende mit einander verbunden, zwischen den beiden Verbindungsstellen des Inductors und Multiplicators eingeschaltet.

Von diesen 9 verschiedenen Combinationen sind nur die 4 letzten bei den folgenden Versuchen benutzt worden, weil bei den 5 ersten die Wirkung zu stark war, um die Elongation der Nadel mit derselben Scale zu messen. Die Berechnung der Beobachtungen wird jedoch nachher zeigen, dass schon 3 von jenen Combinationen zur Bestimmung

des Widerstandsverhältnisses des Originals und der Copie genügen und die vierte bloss zur Controle der Genauigkeit der Messung dient.

5.

Beobachtungsmethoden.

Die Anwendung der beschriebenen Instrumente zu den Beobachtungen lässt sich nach verschiedenen Methoden machen, die sich theils durch ihre Genauigkeit, theils durch ihre Bequemlichkeit, theils durch die Regeln, nach welchen die Beobachtungen zu berechnen sind, von einander unterscheiden. Statt der einfachen Beobachtung der Elongation der Nadel, nachdem sie von der Ruhe ab durch einen Inductionsstoss in Bewegung gebracht worden ist, lässt sich mit grossem Vortheil ein System von Elongationsbeobachtungen ausführen, während der Nadel in vorgeschriebenen Augenblicken wiederholte Inductionsstösse ertheilt werden. Für diese Wiederholungen lässt sich allgemein die Regel aufstellen, dass alle Inductionsstösse nur in solchen Augenblicken stattfinden dürfen, wo die schwingende Nadel die Lage passiert, in welcher sie ruhend beharren würde. Es ist dies nämlich die nothwendige Bedingung, wenn die Berechnung der Beobachtungen auf einfache Regeln gebracht werden soll.

Zum Zwecke aller feineren galvanischen Messungen, sowohl in Beziehung auf fortdauernde, als auch auf momentane Ströme, ist es von Wichtigkeit, von den verschiedenen Methoden der Anordnung der Beobachtungen und Versuche und von deren Berechnung eine klare Uebersicht zu erhalten und insbesondere, wenn das Galvanometer wie in unserm Falle mit einem Dämpfer versehen ist, die Regeln kennen zu lernen, nach denen die Beobachtungen berechnet werden müssen, wenn der Einfluss der Dämpfung berücksichtigt werden soll. Um jedoch hier nicht bei einer Zusammenstellung der verschiedenen Beobachtungsmethoden und der ihnen entsprechenden Berechnungsarten zu verweilen, soll dieselbe am Ende der Abhandlung in der Beilage *C* gegeben werden, wo insbesondere der Unterschied der hier gebrauchten M u l t i p l i c a t i o n s m e t h o d e und Z u r ü c k w e r f u n g s m e t h o d e näher erörtert werden wird, die beide zulässig sind, wenn momentane Ströme angewendet werden. Die ersten hier anzuführenden Beobachtungsreihen sind nach der Multiplicationsmethode ausgeführt worden.

6.

Beobachtungen.

Die Nadel im Galvanometer war Anfangs in Ruhe und ihr Stand wurde an der Scale beobachtet. Der erste positive Inductionsstoss ertheilte darauf der Nadel eine positive Geschwindigkeit, und es wurde die grösste Elongation oder der höchste Stand an der Scale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Der zweite negative Inductionsstoss wurde in dem Augenblicke gegeben, wo die zurückschwingende Nadel den Ruhestand passierte, und es wurde der niedrigste Stand an der Scale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Der dritte wieder positive Inductionsstoss wurde in dem Augenblicke gegeben, wo die wieder vorwärts schwingende Nadel den Ruhestand passierte, und es wurde nun wieder der höchste Stand an der Scale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Auf diese Weise wurden die Beobachtungen in der Regel bis zum 12ten Inductionsstosse fortgesetzt und zuletzt, als die Nadel wieder zur Ruhe gekommen, ihr Stand an der Scale nochmals bemerkt. Dergleichen Beobachtungsreihen wurden nun bei den verschiedenen Combinationen der Drähte mehrmals hinter einander gemacht. Diese verschiedenen Reihen sollen nun mit *A*, *B*, *C*, *D* bezeichnet werden, so dass *A* sich auf die 6te, *B* auf die 7te, *C* auf die 9te und *D* auf die 8te der oben angeführten Combinationen der Leiter bezieht. Folgende Tafel giebt die Uebersicht der nach diesen Reihen geordneten Beobachtungen.

	D.	*C.*	*B.*	*A.*	*B.*	*A.*	*B.*	*C.*	*D.*
Stand	494,8	492,9	493,2	493,7	493,7	493,0	494,3	494,1	494,3
1.	821,8	587,8	672,7	676,3	673,2	675,3	673,1	588,8	821,2
2.	88,3	376,1	271,8	268,8	272,2	268,1	273,1	377,8	88,1
3.	918,0	614,6	723,3	726,7	724,1	726,6	724,4	614,7	916,2
4.	64,5	370,5	260,4	257,0	260,9	257,5	261,9	372,7	64,5
5.	922,9	616,3	725,7	731,1	726,7	729,5	726,7	616,9	923,2
6.	64,0	369,8	259,5	256,1	259,9	257,5	261,7	371,9	62,9
7.	923,3	616,4	726,0	730,7	726,3	730,2	727,2	617,2	922,7
8.	63,4	369,8	259,6	256,2	259,9	257,3	261,6	371,6	62,6
9.	922,5	616,6	726,2	730,8	726,5	730,5	727,2	617,8	923,7
10.	62,9	370,2	259,2	255,7	260,0	257,5	261,9	371,5	61,7
11.	922,9	616,5	724,2	731,1	725,9	730,9	726,9	617,7	923,3
12.	61,9	370,2	262,7	255,7	260,3	257,2	261,7	371,6	62,9
Stand	492,7	493,2	493,6	493,7	492,9	494,2	494,1	494,3	493,7

Die Beobachtungen sind in dieser Tafel nach der Reihenfolge geordnet, wie sie unmittelbar nach einander in einem Zeitraume gemacht worden sind, welcher keine ganze Stunde betrug. Die Wiederholungen der nämlichen Beobachtungsreihen sind so symmetrisch gestellt, dass die kleineren, von der Zeit abhängigen Einflüsse (z. B. der Einfluss der Variation der erdmagnetischen Directionskraft) durch Combination derselben fast ganz eliminiert werden können.

Aus obiger Tafel der unmittelbaren Ablesungen ergiebt sich die folgende Tafel, wenn man 1) von jeder an der Scale abgelesenen Zahl den Mittelwerth des zu Anfang und am Ende der Reihe beobachteten Ruhestandes abzieht; 2) von allen correspondierenden Beobachtungen der mit *A*, oder der mit *B*, oder der mit *C*, oder der mit *D* bezeichneten Reihen den Mittelwerth sucht, und 3) diese Mittelwerthe der an der Scale beobachteten Ablenkungen, welche nach der Theorie des Magnetometers den Tangenten der doppelten Ablenkungswinkel proportional sind, so reduciert, dass sie den Ablenkungswinkeln selbst proportional werden. Dabei ist zu bemerken, dass der horizontale Abstand des Spiegels von der Scale 2150 Scalentheile betrug, wonach, wenn x den beobachteten Werth bezeichnet, der reducierte Werth erhalten wird, wenn man den beobachteten um $\frac{x^3}{13867500}$ verkleinert.

Nr.	*D.*	*C.*	*B.*	*A.*
1.	+ 325,05	+ 94,64	+ 178,96	+ 181,72
2.	— 400,87	— 116,53	— 220,49	— 224,38
3.	+ 417,74	+ 120,92	+ 229,42	+ 232,09
4.	— 423,70	— 121,87	— 231,67	— 235,45
5.	+ 423,45	+ 122,87	+ 231,82	+ 235,69
6.	— 424,22	— 122,62	— 232,36	— 235,89
7.	+ 423,40	+ 123,07	+ 231,96	+ 235,84
8.	— 425,13	— 122,77	— 232,36	— 235,94
9.	+ 423,50	+ 122,47	+ 232,09	+ 236,04
10.	— 425,81	— 122,62	— 232,36	— 236,09
11.	+ 423,50	+ 123,37	+ 231,13	+ 236,39
12.	— 425,72	— 122,57	— 231,17	— 236,24

Man sieht in dieser Tafel, dass die beobachteten Elongationen der Magnetnadel im Galvanometer zwar Anfangs schnell wachsen, sich aber bald einem Grenzwerthe nähern, in Folge des mit der Schwingungsweite

der Nadel wachsenden Einflusses des Dämpfers, mit welchem das Galvanometer versehen war. Um alle einzelnen Beobachtungen auf diesen Grenzwerth zu reducieren, musste das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbögen bestimmt werden, wozu besondere Versuche unmittelbar vor und nach obiger Beobachtungsreihe gemacht worden waren. Das logarithmische Decrement hatte sich aus diesen Versuchen im Mittel ergeben

$$= 0{,}63395,$$

oder es verhalten sich zwei auf einander folgende Elongationen der Nadel wie $1 : 0{,}2323.$

Da die Abweichungen von diesem Mittelwerthe für die einzelnen Reihen nicht gross sind, so genügt es, diesen Mittelwerth statt der wahren Werthe hier in Rechnung zu bringen. Hiernach wird nun die erste Beobachtung auf den Grenzwerth reduciert, indem man sie nach dem Verhältnisse von $0{,}7677 : 1,$

und die n^{te} Beobachtung, indem man sie nach dem Verhältnisse von

$$(1 - 0{,}2323^n) : 1$$

vergrössert. Folgende Tafel giebt die Uebersicht dieser reducierten Werthe und die für *A*, *B*, *C*, *D* daraus gezogenen Mittel.

	D.	*C.*	*B.*	*A.*
1.	+ 423,41	+ 123,28	+ 233,11	+ 236,71
2.	— 423,73	— 123,18	— 233,07	— 237,18
3.	+ 423,05	+ 122,46	+ 232,33	+ 235,04
4.	— 424,93	— 122,22	— 232,34	— 236,13
5.	+ 423,73	+ 122,95	+ 231,98	+ 235,85
6.	— 424,29	— 122,64	— 232,40	— 235,93
7.	+ 423,42	+ 123,07	+ 231,97	+ 235,85
8.	— 425,13	— 122,77	— 232,36	— 235,94
9.	+ 423,50	+ 122,47	+ 232,09	+ 236,04
10.	— 425,81	— 122,62	— 232,36	— 236,09
11.	+ 423,50	+ 123,37	+ 231,13	+ 236,39
12.	— 425,72	— 122,57	— 231,17	— 236,24
Mittel	± 424,19	± 122,80	± 232,19	± 236,13

Dieselbe Versuchsreihe ist auf gleiche Weise 3 Mal, an 3 auf einander folgenden Tagen, gemacht worden, und die folgende Tafel giebt die Uebersicht der aus allen 3 Versuchsreihen gefundenen Werthe von *A*, *B*, *C*, *D*.

	D.	*C.*	*B.*	*A.*
I.	424,19	122,80	232,19	236,13
II.	424,80	123,27	232,25	235,93
III.	423,00	122,59	231,38	235,53
Mittel	424,00	122,89	231,94	235,86

7.

Berechnung der Beobachtungen.

Durch die eben beschriebenen Beobachtungen sind die 4 mit A, B, C, D bezeichneten Werthe genau bestimmt worden, und es fragt sich nun ferner, wie aus diesen 4 Werthen das gesuchte Widerstandsverhältniss des Original-Widerstandsmaasses a zu der Copie b abgeleitet werden könne? Der Einfachheit wegen werde zunächst angenommen, dass der von der Kette selbst herrührende Theil der Dämpfung gegen den von der Kette unabhängigen Theil so klein sei, dass er vernachlässigt werden, folglich die Dämpfung für alle Beobachtungen A, B, C, D gleich angenommen werden dürfe. Für diesen Fall überzeugt man sich leicht, dass die reducierte Elongationsbeobachtung der Geschwindigkeit proportional ist, welche der Nadel des Galvanometers in dem Augenblicke, wo sie den Ruhestand passiert, durch den von einem Inductionsstosse herrührenden Strom im Multiplicator des Galvanometers ertheilt wird, und dass jene Geschwindigkeit selbst dem Integralwerthe dieses Stroms proportional ist. Hiernach können die beobachteten Elongationen als Maasse dieser Ströme benutzt werden.

Der durch den Multiplicator des Galvanometers gehende und gemessene Strom war aber bei obigen Versuchen nicht der ganze Strom, welcher durch einen Inductionsstoss im Inductor hervorgebracht wurde, sondern nur ein Bruchtheil desselben, welcher nach dem Gesetze der Stromtheilung ausgedrückt wird durch das Verhältniss des Widerstandes des eingeschalteten Drahtes zur Summe der Widerstände des eingeschalteten Drahtes und des Multiplicatordrahtes. Bezeichnet m den Widerstand des Multiplicatordrahtes, a den Widerstand des Grundmaasses und b den Widerstand der Copie, so ist der Widerstand der eingeschalteten Drähte

für die Beobachtung $A. = a$

„ „ „ $B. = b$

„ „ „ $C. = \frac{ab}{a+b}$

„ „ „ $D. = a+b$

und folglich die entsprechenden Bruchtheile

für $A. = \frac{a}{a+m}$

„ $B. = \frac{b}{b+m}$

„ $C. = \frac{ab}{ab+am+bm}$

„ $D. = \frac{a+b}{a+b+m}$

Der ganze Strom wird aber, nach dem Ohmschen Gesetze, durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler K für alle Versuche gleich ist und von der einem Inductionsstosse entsprechenden elektromotorischen Kraft abhängt, während der Nenner durch den Widerstand der Kette, durch welche der Strom geht, gegeben ist. Bezeichnet man den Widerstand des Inductordrahtes mit r, so ergiebt sich der Widerstand der ganzen Kette

für die Beobachtung $A. = r + \frac{am}{a+m}$

„ „ „ $B. = r + \frac{bm}{b+m}$

„ „ „ $C. = r + \frac{abm}{ab+am+bm}$

„ „ „ $D. = r + \frac{(a+b)m}{a+b+m}$

Man erhält hiernach folgende Gleichungen für die mit dem Galvanometer beobachteten Stromintensitäten, welche mit A, B, C, D bezeichnet werden sollen:

$$A = \frac{a}{a+m} \cdot \frac{K}{r+\frac{am}{a+m}} = \frac{aK}{am+ar+mr}$$

$$B = \frac{b}{b+m} \cdot \frac{K}{r+\frac{bm}{b+m}} = \frac{bK}{bm+br+mr}$$

$$C = \frac{ab}{ab+am+bm} \cdot \frac{K}{r+\frac{abm}{ab+am+bm}} = \frac{abK}{ab(m+r)+(a+b)mr}$$

$$D = \frac{a+b}{a+b+m} \cdot \frac{K}{r+\frac{(a+b)m}{a+b+m}} = \frac{(a+b)K}{(a+b)(m+r)+mr}$$

Setzt man hierin Kürze halber

$$\frac{1}{mr} \cdot K = \alpha, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{r} = \beta$$

so ergiebt sich:

$$A\left(\beta+\frac{1}{a}\right)=B\left(\beta+\frac{1}{b}\right)=C\left(\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=D\left(\beta+\frac{1}{a+b}\right)=\alpha$$

und hieraus:

$$\frac{\frac{1}{b}B-\frac{1}{a}A}{A-B}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)C-\frac{1}{a}A}{A-C}=\frac{\frac{1}{a+b}D-\frac{1}{a}A}{A-D}=\beta$$

woraus zur Bestimmung des gesuchten Widerstandsverhältnisses der Copie zum Grundmaasse $b:a$ folgende zwei Gleichungen erhalten werden:

$$(a-b)\,AB-aAC+bBC=0$$

$$(aa-bb)\,AB+bbAD-aaBD=0$$

oder:

$$\frac{b}{a}=\frac{AB-AC}{AB-BC}$$

$$\frac{bb}{aa}=\frac{AB-BD}{AB-AD}$$

Zwischen den 4 Beobachtungen A, B, C, D findet also, den Ohmschen Gesetzen gemäss, folgende Relation statt:

$$\frac{A^3}{B^3}=\left(\frac{A-C}{B-C}\right)^2\cdot\frac{A-D}{B-D}$$

welche sich ergiebt, wenn man a und b aus den vorhergehenden Gleichungen eliminiert.

Nach der gegebenen Entwickelung gelten die hier aufgestellten Formeln zunächst nur für diejenigen Fälle, wo die Beobachtungen A, B, C, D die inducierten und durch den Multiplicator gehenden Ströme nach gleichem Maasse ausgedrückt geben, d. i. wo die Dämpfung der Galvanometernadel für die verschiedenen Beobachtungen nicht merklich verschieden ist. Diese Formeln bedürfen aber noch einer besondern Prüfung, um sie auch auf die übrigen Fälle anzuwenden, in welchen die Dämpfung variiert, weil dann nämlich die beobachteten Elongationen A, B, C, D, wie man leicht einsieht, zwar ebenfalls der Stromstärke proportional, ausserdem aber der Stärke der Dämpfung umgekehrt proportional sind.

Die Dämpfung besteht nun aus einem für alle Beobachtungen constanten Theile, welcher von dem unveränderlichen ringförmigen Dämpfer, mit welchem das Galvanometer versehen ist, herrührt und $=1$ gesetzt werden möge, und aus einem variabelen, von der Schliessung des Multiplicators abhängigen Theile, welcher dem Widerstande der vom Multiplicator ausgehenden und zu ihm zurückkehrenden Kette umgekehrt proportional ist. Der Widerstand dieser Kette ist aber:

$$\text{für } A. = m + \frac{ar}{a+r}$$
$$\text{,, } B. = m + \frac{br}{b+r}$$
$$\text{,, } C. = m + \frac{abr}{ab+ar+br}$$
$$\text{,, } D. = m + \frac{(a+b)\,r}{a+b+r}$$

es kann folglich der variabele Theil der Dämpfung dargestellt werden, wenn man $\frac{1}{m}+\frac{1}{r}=\beta$ setzt und γ einen constanten Factor bezeichnet,

$$\text{für } A. \text{ durch } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}}{\beta+\frac{1}{a}}$$
$$\text{,, } B. \text{ ,, } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{b}}$$
$$\text{,, } C. \text{ ,, } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$
$$\text{,, } D. \text{ ,, } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}}{\beta+\frac{1}{a+b}}$$

Für die Fälle nun, wo dieser variabele Theil der Dämpfung gegen den constanten $= 1$ nicht vernachlässigt werden darf, müssen in den oben entwickelten Formeln statt A, B, C, D ihre Producte in die zugehörigen Werthe der Dämpfung gesetzt werden, d. h.

$$\text{statt } A \text{ ist zu setzen } A\left(1+\gamma\cdot\frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}}{\beta+\frac{1}{a}}\right)$$
$$\text{,, } B \text{ ,, ,, ,, } B\left(1+\gamma\cdot\frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{b}}\right)$$
$$\text{,, } C \text{ ,, ,, ,, } C\left(1+\gamma\cdot\frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$$
$$\text{,, } D \text{ ,, ,, ,, } D\left(1+\gamma\cdot\frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}}{\beta+\frac{1}{a+b}}\right).$$

Durch diese Substitution erhält man aber:

$$A\left[\beta+\frac{1}{a}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\right]=B\left[\beta+\frac{1}{b}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}\right)\right]=C\left[\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]$$
$$=D\left[\beta+\frac{1}{a+b}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}\right)\right]=\alpha$$

und hieraus:

$$\frac{A\,(\beta+\frac{1}{a})-B\,(\beta+\frac{1}{b})}{B\,(\frac{1}{r}+\frac{1}{b})-A\,(\frac{1}{r}+\frac{1}{a})}=\frac{A\,(\beta+\frac{1}{a})-C\,(\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}{C\,(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})-A\,(\frac{1}{r}+\frac{1}{a})}$$

$$=\frac{A\,(\beta+\frac{1}{a})-D\,(\beta+\frac{1}{a+b})}{D\,(\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b})-A\,(\frac{1}{r}+\frac{1}{a})}=\gamma$$

woraus

$$AB\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+AC\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{b}-BC\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{a}=0$$

$$AB\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+AD\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a}\right)-BD\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b}\right)=0$$

folgt, oder, indem der gemeinschaftliche Factor $(\beta-\frac{1}{r})$ herausfällt, die nämlichen Gleichungen wie früher erhalten werden, nämlich:

$$\frac{b}{a}=\frac{AB-AC}{AB-BC}$$

$$\frac{bb}{aa}=\frac{AB-BD}{AB-AD}$$

Wendet man endlich die gefundenen Regeln auf die Werthe von A, B, C, D an, welche sich aus den oben beschriebenen Versuchen ergeben haben, nämlich:

$$A=235{,}86$$
$$B=231{,}94$$
$$C=122{,}89$$
$$D=124{,}00,$$

so ergiebt sich zuvörderst:

$$\frac{A^2}{B^2}=1{,}05156$$

$$\left(\frac{A-C}{B-C}\right)^2\cdot\frac{A-D}{B-D}=1{,}05128.$$

Die nahe Uebereinstimmung dieser beiden Werthe, welche nach obigen Regeln gleich sein sollten, kann als Bestätigung der Ohmschen Gesetze dienen, aus denen jene Regeln abgeleitet sind.

Ferner ergiebt sich daraus das Widerstandsverhältniss der Copie *b* zum Grundmaasse *a*, und zwar aus den beobachteten Werthen *A*, *B*, *C*:

$$\frac{b}{a} = \frac{AB - AC}{AB - BC} = 0{,}981616,$$

aus den beobachteten Werthen *A*, *B*, *D*:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{AB - BD}{AB - AD}} = 0{,}981485;$$

im Mittel also ist der Widerstand der Copie, in Theilen des Widerstandes des gegebenen Grundmaasses ausgedrückt,

$$= 0{,}98155.$$

Auf die nämliche Weise, wie hier das Widerstandsverhältniss der Copie zu dem Grundmaasse bestimmt worden ist, kann nun auch das Widerstandsverhältniss anderer Leiter zum Grundmaasse gefunden und dadurch können die Widerstände aller dieser Leiter nach dem gegebenen Grundmaasse gemessen werden.

Die Anordnung der Beobachtungen war in dem hier gegebenen Beispiele nach der Multiplications-Methode getroffen worden. Es ist aber schon erwähnt worden, dass diese Anordnung noch auf eine andere Weise, nämlich nach der Zurückwerfungsmethode, gemacht werden kann, und es besitzt sogar diese letztere Anordnungsweise einige Vorzüge vor der ersteren. Es verdient daher diese zweite Methode näher erörtert zu werden, was in der Beilage *C*. am Ende dieser Abhandlung geschehen soll, wo auch ein Messungsbeispiel nach dieser Methode beigefügt werden wird.

II.

ZURÜCKFÜHRUNG DER WIDERSTANDSMESSUNGEN AUF ABSOLUTES MAASS.

8.

Nachdem im ersten Abschnitte gezeigt worden ist, wie der Widerstand eines Leiters mit der erforderlichen Schärfe nach einem gegebenen Grundmaasse bestimmt werden kann, soll nun im zweiten Abschnitte die Zurückführung dieser Messungen auf absolutes Maass gegeben werden.

Man könnte glauben, dass sich eine solche Zurückführung auf die einfachste Weise dadurch bewerkstelligen lasse, dass man auf die räumlichen Dimensionen (Länge und Querschnitt) der Leiter zurückgehe und sich dabei an dasjenige Metall halte, was zu den Leitern am geeignetsten ist und am häufigsten dazu gebraucht wird, an das Kupfer. In der That würde man auf diese Weise zu Widerstandsbestimmungen der Leiter gelangen, welche dem Namen nach als absolute bezeichnet werden könnten, die aber in der That dem wahren Zwecke, die Zahl der willkührlich anzunehmenden Grundmaasse zu vermindern, nicht entsprechen würden. Es würde dadurch nur an die Stelle eines Grundmaasses für absoluten Widerstand ein Grundmaass für specifischen Widerstand (nämlich der des Kupfers) gesetzt werden. Für den angeführten Zweck ist es aber gleichgültig, ob man ein Maass des absoluten Widerstandes zum Grunde legt und das Maass des specifischen Widerstandes daraus ableitet, oder ob man umgekehrt ein Maass des specifischen Widerstands zum Grunde legt und daraus das Maass des absoluten Widerstandes ableitet. Absolute Widerstandsmessungen sind daher nur dann von wesentlicher Bedeutung, wenn sie so ausgeführt werden, dass gar keine neuen, sondern nur vorhandene, zu anderen Zwecken schon gebrauchte und unentbehrliche Maasse, wie z. B. die des Raumes und der Zeit, zum Grunde liegen.

Hiernach kann nun leicht Dasjenige beurtheilt werden, was Jacobi in der oben angeführten Stelle S. 199 f. bei Gelegenheit seines Vorschlags in Betreff eines festen Widerstandsmaasses gesagt hat: es könne, um die Leitungswiderstände, welche die Physiker messen, durch eine gemeinschaftliche Einheit auszudrücken, keine absolute Bestimmung stattfinden, weil es scheine, dass bei den Widerständen auch der chemisch reinsten Métalle Unterschiede stattfänden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen allein nicht erklärt werden könnten, und dass also, wenn der eine Physiker seine Widerstandsmesser und Multiplicatoren auf Kupferdraht von 1 Meter Länge und 1 Millimeter Dicke bezöge, die andern Physiker immer noch nicht die Ueberzeugung hätten, ob sein Kupferdraht und der ihrige einen gleichen Widerstandscoefficienten (d. i. ob das Kupfer dieser Drähte gleichen specifischen Widerstand) besitze. Man sieht, dass Jacobi hier nur eine solche absolute Bestimmung im Auge hat, bei welcher das Maass des absoluten Widerstandes aus einem für den specifischen Widerstand angenommenen Grundmaasse abgeleitet wird, die er mit Recht verwirft; die Frage aber, ob überhaupt ein neues Grundmaass nöthig sei, oder ob Widerstandsbestimmungen möglich seien, ohne irgend eines von jenen beiden Grundmaassen anzunehmen, hat Jacobi gar nicht berührt. Diese Frage ist es aber gerade, deren Beantwortung uns vorzugsweise beschäftigen wird. Wenn sich übrigens aus dieser Antwort ergeben wird, dass in der That zum Zweck der Widerstandsmessungen gar kein neues Grundmaass nöthig ist, so folgt doch daraus noch keineswegs, dass die Feststellung eines solchen Grundmaasses, wie Jacobi vorgeschlagen und wie es im ersten Theile dieser Abhandlung zur Anwendung gebracht worden ist, ganz überflüssig sei. Es wird vielmehr gezeigt werden, dass die Annahme des Jacobi'schen Vorschlags auch dann noch aus praktischen Gründen höchst wünschenswerth bleibt, weil eine absolute Widerstandsbestimmung sich direct nur in seltenen Fällen unter besonders günstigen Verhältnissen genau ausführen lässt, durch Annahme des Jacobi'schen Vorschlags aber eine Brücke gebaut wird, auf welcher man dazu gelangt, mit Hülfe einer einzigen wirklich ausgeführten absoluten Widerstandsbestimmung alle andern Widerstandsmessungen auf absolutes Maass zurückzuführen. Dass nun eine absolute Widerstandsbestimmung auf ganz andere Weise möglich sei, als diejenige, von welcher Jacobi spricht, ganz unabhängig von dem

specifischen Widerstande oder von dem Widerstandscoefficienten irgend eines Körpers, wie des Kupfers, nämlich durch eine eigenthümliche Combination magnetoelektrischer und elektromagnetischer Beobachtungen, ist schon von Gauss ausgesprochen worden, bald nachdem Faraday's Entdeckung der Magnetoelektricität bekannt geworden war.

Das Wesentliche dieser Methode lässt sich auf folgende Weise kurz in Worten ausdrücken: Betrachtet man die Intensität irgend eines galvanischen Stroms, so leuchtet ein, dass dieselbe im Allgemeinen auf zwei wesentlich verschiedene Arten bestimmt werden kann: erstens aus den Ursachen, von welchen sie abhängt; zweitens aus den Wirkungen, welche sie hervorbringt. Die aus ihren Wirkungen definierte Stromintensität kann nun aber, wie sich leicht zeigen lässt, auf absolutes Maass zurückgeführt werden, und da einleuchtet, dass der Werth einer Stromintensität nach absolutem Maasse der nämliche sein müsse, es möge dieselbe aus ihren Wirkungen oder aus ihren Ursachen definiert werden, so ist das Resultat, welches auf dem letzten Wege erhalten werden muss, durch das auf dem ersten erhaltene schon im Voraus bekannt. Nun weiss man aber, dass die Stromintensität nur von zwei Ursachen abhängt, nämlich von der elektromotorischen Kraft und von dem Widerstande der Kette, und dass von diesen beiden die elektromotorische Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt werden kann. So wie nun, wenn ausser der elektromotorischen Kraft auch der Widerstand nach absolutem Maasse gegeben wäre, der absolute Werth der Stromintensität sich unmittelbar daraus ergeben würde, eben so ergiebt sich umgekehrt, da ausser der elektromotorischen Kraft auch die Stromintensität nach absolutem Maasse gegeben ist, der Werth des Widerstandes nach absolutem Maasse, und man sieht hieraus, dass Widerstandsmessungen ausgeführt werden können, ohne dass irgend ein neues willkührliches Grundmaass dazu gebraucht wird, was zu beweisen war.

Leuchtet nun auch hieraus im Allgemeinen die Möglichkeit eines absoluten Widerstandsmaasses in der angegebenen engern Bedeutung des Wortes ein, so ist es doch noch nöthig, eine genaue Definition dieses Maasses zu geben, wenn eine wirkliche Messung nach diesem Maasse ausgeführt werden soll. Eine solche Definition findet aber eine Schwierigkeit darin, dass sie andere absolute Maasse als bekannt voraussetzt, nämlich das absolute Maass für die elektromotorischen Kräfte

und das absolute Maass für die (aus ihren Wirkungen bestimmten) Stromintensitäten. Es handelt sich demnach bei der Begründung eines absoluten Widerstandsmaasses im Grunde um die Feststellung eines vollständigen Systems absoluter Maasse für die ganze Elektrodynamik. Geht man noch weiter zurück, so findet man, dass auch diese letzteren Maasse wieder andere, ausser dem Kreise der Elektrodynamik, voraussetzen, und dass also die beabsichtigte Begründung des Widerstandsmaasses eine nähere Erörterung der absoluten Maasse mehrerer verschiedenen Grössenarten nöthig macht, welche der Ausführung unserer Messung vorausgeschickt werden muss.

9.

Über die absoluten Maasse mehrerer verschiedenen Grössenarten.

Es ist bekannt, dass es sehr zur Vereinfachung physicalischer Forschungen dient, wenn man für die verschiedenen Grössenarten nicht mehr eigene, von einander unabhängige Grundmaasse einführt, als unumgänglich nöthig sind, und wenn man alle anderen Maasse aus diesen wenigen nothwendigen Grundmaassen ableitet. Aus diesem Grunde werden in der Mechanik bloss für Linien, Zeiträume und Massen Grundmaasse aufgestellt, und die Maasse aller andern in der Mechanik betrachteten Grössenarten werden aus diesen wenigen Grundmaassen abgeleitet und heissen dann absolute Maasse. Zum Beispiel werden keine Grundmaasse für Geschwindigkeit und Dichtigkeit aufgestellt, sondern es werden absolute Maasse dafür gebraucht, welche auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt werden können. Eben so werden die Maasse für die bewegenden und für die absoluten Kräfte, für die Drehungsmomente, Trägheitsmomente, Nutzeffecte u. s. w. nach bekannten Gesetzen auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt. Aus demselben Grunde wird ferner auch für den Magnetismus kein eigenes unabhängiges Grundmaass eingeführt, sondern man hält sich an das absolute Maass, welches Gauss für den Magnetismus aus den drei Grundmaassen der Mechanik in der Abhandlung: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. Göttingae* 1833. abgeleitet hat.

Das Maass für den Stabmagnetismus ist nämlich hiernach der Magnetismus eines solchen Stabs, welcher, — wenn er aus grosser Entfer-

nung R auf einen andern gleich stark magnetischen Stab wirkt, dessen magnetische Axe derjenigen Geraden parallel ist, welche die Mittelpunkte der beiden Magnete verbindet, während seine eigene magnetische Axe dagegen senkrecht ist, — ein Drehungsmoment ausübt, welches sich zum absoluten Maasse des Drehungsmomentes wie $1 : R^3$ verhält.

Das Maass für die Stärke des Erdmagnetismus (für die Stärke der erdmagnetischen Kraft) an irgend einem Orte ist eben danach das nach absolutem Maasse ausgedrückte Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus auf einen an diesem Orte befindlichen Magnetstab ausübt, wenn letzterer das absolute Maass Magnetismus enthält und seine magnetische Axe mit der Richtung des Erdmagnetismus an diesem Orte einen rechten Winkel macht.

10.

Definitionen der absoluten Maasse in der Elektrodynamik.

Die absoluten Maasse der in der Elektrodynamik betrachteten Grössenarten lassen sich nun auf folgende Weise durch Zurückführung auf die magnetischen Maasse kurz und vollständig definieren.

1) Das Maass für die Stromintensitäten.

Das Maass für die Stromintensitäten ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse des Flächenmaasses umläuft, nach den elektromagnetischen Gesetzen die nämlichen Wirkungen in die Ferne ausübt, wie ein Magnetstab, welcher das vorher definierte Maass des Magnetismus enthält.

Diese Definition von dem Maasse für die Stromintensitäten ist dieselbe, welche in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 86 gegeben worden ist.

2) Das Maass für die elektromotorischen Kräfte.

Das Maass für die elektromotorischen Kräfte ist diejenige elektromotorische Kraft, welche von dem vorher definierten Maasse des Erdmagnetismus auf eine geschlossene Kette ausgeübt wird, wenn letztere so gedreht wird, dass die von ihrer Projection auf eine gegen die

Richtung des Erdmagnetismus senkrechte Ebene begrenzte Fläche während des Zeitmaasses um das Flächenmaass zunimmt oder abnimmt.

3) Das Maass für den Widerstand.

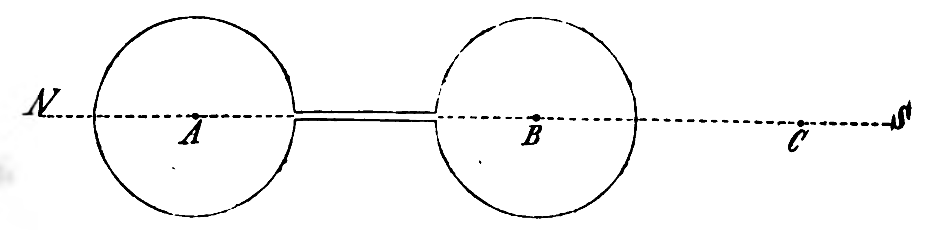
Das Maass für den Widerstand ist der Widerstand einer solchen geschlossenen Kette, in welcher durch das vorher definierte Maass der elektromotorischen Kraft das vorher definierte Maass der Stromintensität hervorgebracht wird.

Bezeichnet man das oben definierte Maass für die Stromintensitäten mit I und irgend eine hiernach gemessene Stromintensität mit iI, worin i eine reine Zahl bezeichnet, und bezeichnet man ferner das oben definierte Maass für die elektromotorischen Kräfte mit E und irgend eine hiernach gemessene elektromotorische Kraft mit eE, worin e eine reine Zahl bezeichnet; so wird wW der Widerstand einer Kette sein, auf welche die elektromotorische Kraft eE wirkt und darin einen Strom von der Intensität iI hervorbringt, wenn W das oben definierte Widerstandsmaass bezeichnet und $w = \frac{e}{i}$ eine reine Zahl ist. Der Widerstand dieser Kette ist also dem Widerstandsmaasse gleich, wenn $e = i$ gefunden wird. Man ersieht hieraus, wie ein Leiter, welcher das vorher definierte Widerstandsmaass besitzt, wirklich dargestellt werden kann.

11.

Schema zur absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters.

Zur Erläuterung, wie die vorher definierten elektrodynamischen Maasse zur Ausführung der absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters in Anwendung gebracht werden können, diene das folgende Beispiel.



Die Gerade NS bezeichne die Richtung des Erdmagnetismus, dessen Stärke an den beiden Orten A und B nach dem vorher definierten Maasse $= T$ sei. Der Werth von T wird bekanntlich nach der von

Gauss in der *«Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata»* gegebenen Anleitung aus magnetometrischen Beobachtungen gefunden. Nun bestehe eine geschlossene Kette aus zwei Kreisen, deren Mittelpunkte A und B seien; die Linie NS liege in der Ebene dieser Kreise. Es gehören aber zu dieser Kette noch ferner zwei neben einander liegende, von einander isolierte Drähte, welche eine doppelte Verbindung zwischen beiden Kreisen herstellen, und es sei endlich jeder Kreis zwischen den beiden Punkten, wo die beiden Drähte mit ihm verbunden sind, durchschnitten, so dass alle Theile zusammen, wie die Figur zeigt, eine in sich zurücklaufende Linie bilden; r bezeichne die der Einfachheit wegen gleich angenommenen Halbmesser beider Kreise. Projiciert man den Kreis A nach der Richtung NS auf eine gegen NS senkrechte Ebene, so ist die von der Projection begrenzte Fläche $= 0$. Die Beugsamkeit der die beiden Kreise verbindenden Drähte möge aber gestatten, den Kreis A zu drehen und gegen NS senkrecht zu stellen, wo dann die von der nämlichen Projection begrenzte Fläche $= \pi rr$ wird. Diese Drehung geschehe in einer kurzen Zeit τ auf solche Weise, dass die von der Kreisprojection begrenzte Fläche in dieser Zeit gleichförmig von 0 bis πrr wachse. Es ergiebt sich dann aus den magnetoelektrischen Gesetzen eine elektromotorische Kraft eE, welche der Erdmagnetismus T auf den kreisförmigen Leiter A während der Zeit τ ausübt, welche durch das vorher definierte Maass E und durch die Zahl

$$e = \frac{\pi rr}{\tau} \cdot T$$

bestimmt ist. Durch diese elektromotorische Kraft wird während der Zeit τ ein durch die ganze geschlossene Kette gehender Strom hervorgebracht, dessen Intensität mit iI bezeichnet werden soll. Dieser Strom geht auch durch den Kreis B und wirkt von diesem Kreise aus auf eine entfernte Magnetnadel in C, deren Drehungsaxe auf NS senkrecht sei und in der Ebene des Kreises B liege. Ist nun I das vorher definierte Maass für die Stromintensitäten, so ergiebt sich aus den elektromagnetischen Gesetzen, dass das von dem durch den Kreis B gehenden Strome auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment dem von einem Magnetstabe ausgeübten Drehungsmomente gleich ist, welcher im Mittelpunkte des Kreises B so aufgestellt würde, dass seine magnetische Axe auf der Kreisebene senkrecht wäre, wenn der nach dem vorher definierten Maasse gemessene Magnetismus M dieses Stabes

$$M = \pi rri$$

ist. Wenn nun ferner der nach gleichem Maasse gemessene Magnetismus der Nadel $C = m$ und $BC = R$ ist, und φ den Winkel bezeichnet, welchen die magnetische Axe der Nadel C mit der Richtung NS des Erdmagnetismus macht; so wird das von dem Magnetstabe M auf die Nadel m ausgeübte Drehungsmoment nach bekannten magnetischen Gesetzen durch

$$\frac{Mm}{R^3} \cos \varphi = \frac{\pi rr}{R^3} \cdot im. \cos \varphi$$

ausgedrückt. Hieraus ergiebt sich, wenn K das Trägheitsmoment der Nadel bezeichnet, die Acceleration der Drehung

$$= \frac{\pi rr}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \cos \varphi$$

und folglich, wenn die Nadel vorher in Ruhe und $\varphi = 0$ war, die Drehungsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ am Ende der kurzen Zeit τ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi rr}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau$$

Aus dieser Geschwindigkeit findet man endlich die grösste Elongation α der dadurch in Schwingung gesetzten Nadel nach bekannten Schwingungsgesetzen durch Multiplication mit der Schwingungsdauer t und durch Division mit der Zahl π, nämlich:

$$\alpha = \frac{rr}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau t$$

Für die Schwingungsdauer t gilt bekanntlich die Gleichung

$$mT = \frac{\pi\pi K}{tt}$$

woraus

$$\frac{mt}{K} = \frac{\pi\pi}{tT}$$

und folglich

$$\alpha = \frac{\pi\pi rr}{R^3} \cdot \frac{i\tau}{tT}$$

oder

$$i = \frac{\alpha R^3}{\pi\pi rr} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T$$

Man könnte nun ferner, indem man beachtet, dass der durch den Kreis B gehende Strom auch den Kreis A durchläuft, auch die Wirkung des Kreisstroms A auf die Nadel berechnen; indessen möge hier der Einfachheit wegen angenommen werden, dass die Entfernung AC so gross sei, dass diese Wirkung gegen die Wirkung des Kreisstroms B verschwinde; es wird dann die Beobachtung der wirklichen Elongationsweite der Nadel unmittelbar den Werth von α geben.

Dann ergiebt sich, dass von der oben angegebenen, nach dem vorher definierten Maasse bestimmten elektromotorischen Kraft eE, für welche

$$e = \frac{\pi r r}{\tau} \cdot T$$

gefunden worden ist, in der ganzen Kette ein Strom hervorgebracht werde, dessen Intensität nach dem vorher definierten Maasse durch iI bestimmt wird, wenn

$$i = \frac{\alpha R^2}{\pi \pi r r} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T$$

Nun wird endlich der Widerstand der ganzen Kette nach dem vorher definierten Maasse durch wW bestimmt, wenn

$$w = \frac{e}{i} = \frac{\pi^2 r^4}{\alpha R^2 t}$$

ist. Die Ausführung der absoluten Widerstandsmessung der ganzen Kette ist hiernach auf die Messung der Grössen

$$r,\ R,\ \alpha,\ t$$

zurückgeführt worden, oder, mit andern Worten, der Widerstand der ganzen Kette kann hiernach in dem vorher definierten Maasse ausgedrückt werden, wenn man aus den Beobachtungen erstens die Zahl α gefunden hat, welche die Elongationsweite der Nadel in Theilen des Halbmessers angiebt, zweitens die Zahl $\frac{r}{R}$, welche den Halbmesser der beiden Kreise in Theilen der Entfernung BC angiebt, drittens die Geschwindigkeit $\frac{r}{t}$, mit welcher der Halbmesser jener Kreise während einer Schwingung der Nadel durchlaufen würde. Hieraus folgt also, dass ein Maass für die Geschwindigkeit das einzige Grössenmaass ist, auf welchem die absolute Widerstandsmessung beruht.

Nach der hiermit gegebenen Übersicht aller zu einer absoluten Widerstandsbestimmung erforderlichen Beobachtungen gehen wir zur Ausführung dieser Beobachtungen selbst über.

12.

Über die Ausführung der Beobachtungen.

Die meisten Beobachtungen, welche der vorhergehenden Darstellung gemäss zur absoluten Widerstandsbestimmung der ganzen Kette gemacht werden müssen, können nun ohne Schwierigkeit mit grosser Schärfe wirklich ausgeführt werden. Denn die zur Bestimmung der Schwingungsdauer der Nadel erforderlichen Beobachtungen gestatten eine Schärfe, die bekanntlich nichts zu wünschen übrig lässt. Eben so verhält es sich mit den Abmessungen der Kreishalbmesser und der Entfernung $BC = R$. Es bleibt daher nur die Beobachtung der Elon-

gationsweite α der schwingenden Nadel übrig. Auch diese kann bekanntlich mit den für das Magnetometer getroffenen Einrichtungen bis auf einige Bogensecunden genau bestimmt werden und würde daher gleichfalls nichts zu wünschen übrig lassen, wenn z. B. die Werthe von α nicht unter 1^0 gross wären. Aber diese Werthe sind, wenn genau nach diesem Schema verfahren wird, allerdings viel kleiner und würden sogar mit den besten Beobachtungsmitteln nicht wahrgenommen werden. Die Hauptaufgabe für die praktische Ausführung der Widerstandsmessung einer Kette nach absolutem Maasse besteht daher darin, solche Modificationen in der beschriebenen Einrichtung zu treffen, durch welche die zu beobachtende Elongation α möglichst vergrössert wird.

Eine solche Modification besteht erstens darin, dass man die Magnetnadel *C* aus der Ferne in den Mittelpunkt des Kreises *B* versetzt, wo die Elongation nach einem aus den Gesetzen des Elektromagnetismus genau zu bestimmenden Verhältnisse vergrössert wird. Nur muss dabei darauf geachtet werden, dass die Länge der Nadel viel kleiner sei, als der Durchmesser des Kreises, damit die eigenthümliche Vertheilungsweise des Magnetismus in der Nadel nicht besonders in Rechnung gebracht zu werden brauche, weil die genauere Erforschung dieser Vertheilungsweise mit Schwierigkeiten verbunden ist.

Eine zweite Modification, durch welche eine Vergrösserung der Elongation α erlangt werden kann, besteht in einer solchen Vervielfältigung der Umwindungen beider Kreise, wodurch sie in Ringe, welche einen bedeutenden Querschnitt besitzen, verwandelt werden. Es muss aber dann der Einfluss aller Umwindungen einzeln in Rechnung gebracht werden, weil sie verschiedene Halbmesser haben und nicht alle in einer Ebene mit der Nadel liegen.

Mit diesen beiden wesentlichen Modificationen gelangt man zu einer solchen Vergrösserung der Elongation, dass auch diese Beobachtung mit Schärfe ausgeführt werden kann, wie die zu beschreibenden Versuche beweisen werden.

Ehe zu der Beschreibung der Versuche selbst übergegangen wird, möge noch eine Bemerkung über eine andere Modification der Einrichtung vorausgeschickt werden, zu welcher man gelangt, wenn man die für den Kreis *B* schon angegebene Vertauschung einer Wirkung in die Ferne mit einer Wirkung auf den Mittelpunkt auch auf den

Kreis *A* in Anwendung bringt. Hiernach würde also die elektromotorische Kraft, welche der Erdmagnetismus aus der Ferne auf den Kreis *A* ausübte, durch die elektromotorische Kraft eines im Mittelpunkte des Kreises *A* aufzustellenden Magnets ersetzt werden. Es ergiebt sich sodann nach den Gesetzen der Magnetoelektricität eine Identität der Wirkung, wenn der Magnet ruhet und der Kreis vorwärts gedreht wird, oder wenn der Kreis ruhet und der Magnet rückwärts gedreht wird. Man kann daher im Mittelpunkte des ruhenden Kreises eine Magnetnadel aufhängen und schwingen lassen und durch diese schwingende Nadel eine elektromotorische Kraft auf den Kreis ausüben, und dabei können der Kreis und die Magnetnadel bei *A* ganz gleiche Stellung erhalten, wie der Kreis und die Magnetnadel bei *B*.

Bei dieser gleichen Gestaltung und gleichen Aufstellung beider Kreise und ihrer beiden Nadeln steht endlich einer völligen Vereinigung gar nichts im Wege, weil nämlich die magnetoelektrische Wirkung der Nadel auf den Kreis und die elektromagnetische Wirkung des Kreises auf die Nadel ohne gegenseitige Störung in derselben Nadel und in demselben Kreise nach dem Principe der Dämpfung coexistieren können. Man braucht dann eine einzige Nadel, welche in Schwingung gesetzt wird und dadurch auf einen in sich geschlossenen Kreis, in dessen Mittelpunkte sie sich befindet, nach magnetoelektrischen Gesetzen eine elektromotorische Kraft ausübt, welche in diesem Kreise einen galvanischen Strom hervorbringt, der auf dieselbe Nadel nach elektromagnetischen Gesetzen zurückwirkt, von welcher er erregt worden war, und der dadurch eine Dämpfung oder Abnahme der Schwingungsbogen der schwingenden Nadel hervorbringt. Nach dieser Vereinfachung genügt die Beobachtung der Schwingungsbogen, durch deren Grösse die Grösse der elektromotorischen Kraft und durch deren Abnahme die Stärke des inducierten Stroms bestimmt werden kann. Die zweite und dritte Versuchsreihe werden Beispiele geben, wie auch nach dieser Methode der Widerstand einer Kette nach absolutem Maasse gemessen werden kann.

Wir gehen nun zu der Beschreibung der nach den aus einander gesetzten Methoden ausgeführten Versuche über und werden zuerst die nach der ersten Methode gemachten Versuche zusammenstellen.

13.

Erste Methode.

Zur Ausführung der Versuche nach der ersten Methode wurden folgende Instrumente eingerichtet, nämlich: 1) der Erdinductor oder ein Drahtring, in welchem durch Drehung von dem Erdmagnetismus ein galvanischer Strom erregt wurde; 2) ein Multiplicator, dessen Drahtenden mit denen des Erdinductors verbunden waren; 3) ein kleines Magnetometer, dessen Nadel im Mittelpunkte des Multiplicators aufgehangen wurde. Ueber diese drei Instrumente ist Folgendes zu bemerken.

1) Der Erdinductor.

Der zum Erdinductor verwendete Kupferdraht hatte mit Einschluss der Wolle, mit welcher er übersponnen war, ein Gewicht von

16,533 Grammen,

wovon fast 500 Gramme auf die Wolle kamen. Dieser Draht wurde auf ein Holzgestell aufgewunden, welches nahe die Gestalt eines regulären Sechsecks hatte. Alle Drahtwindungen zusammen bildeten einen Ring mit rectangulärem Querschnitt, dessen eine auf die Ringebene senkrechte Seite 64 Millimeter, die andere etwa 16 Millimeter lang war. Die Länge eines um das Holzgestell, ehe der Draht aufgewunden war, gelegten Bandes ergab den Umfang = 3067 Millimeter; die Länge eines um den aufgewundenen Draht gelegten Bandes ergab den Umfang = 3170 Millimeter. Der Draht bildete 7 Lagen über einander, jede mit 22 bis 23 Umwindungen, die 7te oder oberste Lage war nicht voll und hatte bloss 10 Umwindungen, was zusammen

145 Umwindungen

gab. Die Länge der beiden überstehenden Drahtenden betrug zusammen genommen 550 Millimeter. Hieraus ergab sich, mit Berücksichtigung der geringen Abweichung der Form von einem regulären Sechseck, die Summe der Flächen, welche von den Projectionen dieser 145 Umwindungen auf die Ringebene begrenzt wurden, zu

104,924,000 Quadratmillimeter.

Nach der Aufwindung des Drahtes wurden an zwei gegenüberstehenden Ecken des Sechsecks zwei starke Holzbacken, welche den Kupferring umschlossen; am Holzgestelle befestigt, jede derselben war mit

einem starken, runden, nach aussen gekehrten Zapfen versehen, um welche der Ring gedrehet werden konnte, wenn er mit diesen Zapfen in die Lager eines grossen, aus Balken sehr fest zusammengefügten Holzgestelles eingelegt wurde. Die von diesen Zapfen gebildete, der Ringebene parallele Drehungsaxe war vertical. Der eine dieser beiden Zapfen war hohl und durch denselben wurden die beiden Drahtenden durchgeführt und am Ende befestigt. Diese beiden am drehbaren Zapfen befestigten Drahtenden wurden mit 2 Spiralfedern von Messing verbunden, welche sich an dem festen Holzgestelle endigten, wo die Verbindungsdrähte eingeklemmt waren, welche den Inductor mit dem Multiplicator verbanden. Auf diese Weise war jede lockere Verbindung vermieden, welche eine Unbestimmtheit des Widerstandes der Kette verursachen konnte, und es war zugleich eine Drehung des Inductors im Halbkreis, vorwärts oder rückwärts, gestattet, während die übrigen Theile der Kette unbewegt blieben. Am andern Zapfen war eine lange Kurbel für die Drehung angebracht, welche am Ende jeder Drehung durch einen festen, am Holzgestell angebrachten Zahn arretiert wurde. Die Stellung dieser Sperrzähne wurde so reguliert, dass die Drehung des Inductors genau zwei rechte Winkel betrug, und dass die verticale Ringebene am Anfang und am Ende jeder Drehung genau senkrecht gegen den magnetischen Meridian war.

2) Der Multiplicator.

Der zum Multiplicator verwendete Kupferdraht hatte mit Einschluss der Wolle, mit welcher er übersponnen war, ein Gewicht von

157,430 Grammen,

wovon 4540 Gramme auf die Wolle kamen. Dieser Draht wurde auf eine hölzerne Rolle aufgewunden, welche äusserlich von einer Cylinderfläche, deren Halbmesser

303,51 Millimeter

betrug, begrenzt wurde. Der darauf gewundene Draht lag zwischen zwei parallelen hölzernen Schutzwänden, welche 202,05 Millimeter von einander abstanden. Der mittlere Halbmesser einer die äusserste Lage von Drahtwindungen begrenzenden Fläche war 374,41 Millimeter, wonach der rectanguläre Querschnitt des von allen Umwindungen gebildeten Ringes 202,05 Millimeter lang und 70,9 Millimeter breit war. Der Draht bildete 28 Lagen über einander, jede von 66 bis 68

Umwindungen. Die 28ste oder oberste Lage war nicht voll und hatte bloss 44 Umwindungen, was zusammen

1854 Umwindungen

gab. An der letzten Umwindung fehlten 155 Millimeter. Die Länge der beiden überstehenden Enden betrug zusammen

1340 Millimeter.

Dieser Multiplicator wurde so aufgestellt, dass seine Ebene mit dem magnetischen Meridian zusammenfiel.

3) Das kleine Magnetometer.

Die Nadel des kleinen Magnetometers war ein gehärteter und magnetisirter Stahlcylinder, 60 Millimeter lang und 6,2 Millimeter dick, in ihrer Mitte mit einem messingenen Bügel versehen, an dem sie aufgehangen wurde, und der einen runden Planspiegel von 30 Millimeter Durchmesser trug, dessen Normale mit der magnetischen Axe einen rechten Winkel bildete. Bei der angegebenen Länge der Nadel, welche noch nicht den 10ten Theil des Durchmessers des Multiplicators betrug, kommt der Einfluss der eigenthümlichen Vertheilung des Magnetismus nicht mehr in Betracht und braucht daher nicht in Rechnung gezogen zu werden. Die Nadel war an beiden Enden durch zwei, 31 Millimeter lange Messingstifte verlängert, welche zwei Messingkugeln von 11,7 Millimeter Durchmesser trugen. Diese Gewichte dienten zur Vergrösserung des Trägheitsmomentes der Nadel, wodurch die Schwingungsdauer eine für die Beobachtung bequeme Grösse erhielt. Diese Nadel wurde an vier zu einem Faden vereinigten Coconfäden aufgehangen, welche an der inneren Wand des Multiplicators so befestigt wurden, dass die Mitte der Nadel im Mittelpunkte des Multiplicators zu liegen kam. Der von dem Multiplicator umschlossene Raum, in dessen Mitte die Magnetnadel schwebte, wurde endlich durch zwei von beiden Seiten angebrachte Holzdeckel in ein geschlossenes Gehäuse verwandelt. In dem einen dieser Deckel war eine kleine Oeffnung vor dem Spiegel der Nadel, welche mit einem planparallelen Glase verschlossen wurde. In der Verticalebene der Spiegelnormale wurde in etwa 4 Meter Entfernung das Ablesungsfernrohr des Magnetometers aufgestellt und senkrecht gegen die Spiegelnormale eine Scale darauf befestigt, deren Horizontalabstand vom Spiegel

4087,5 Millimeter

betrug und deren Bild durch das auf den Spiegel gerichtete Fernrohr beobachtet werden konnte.

14.

Beobachtungen.

Mit diesen Instrumenten wurden nun folgende Beobachtungen gemacht. Es wurde der Inductor so gestellt, dass seine Ebene mit dem magnetischen Meridiane zusammenfiel, und die Magnetnadel zur Ruhe gebracht. Darauf wurde der Inductor plötzlich um 90° gedreht. Dadurch wurde die Nadel in Schwingung gesetzt und es wurde mit dem Fernrohr der Stand der Nadel bei ihrer grössten positiven Elongation, welche sie nach einer halben Schwingungsdauer erreichte, an der Scale beobachtet. Nach Verlauf von $1\frac{1}{2}$ Schwingungsdauer gelangte die Nadel zu ihrer grössten negativen Elongation, welche ebenfalls an der Scale beobachtet wurde. Hierauf wurde in dem Augenblicke, wo die wieder vorwärts schwingende Nadel ihren ursprünglichen Ruhestand passierte, d. i. 2 Schwingungsdauern nach Beginn der Versuche, der Inductor rückwärts um 180° gedreht. Die schwingende Nadel wurde dadurch mitten in ihrer Bewegung arretiert und rückwärts geworfen, worauf nun wieder zuerst ihre grösste negative und sodann ihre grösste positive Elongation an der Scale beobachtet wurde. Nach Verlauf von 4 Schwingungsdauern, in dem Augenblicke, wo die Nadel von ihrer letzten Elongation zurückkehrend ihren ursprünglichen Ruhestand passierte, wurde der Inductor wieder um 180° vorwärts bewegt, worauf die nämlichen Elongationsbeobachtungen gemacht wurden, wie das erste Mal, und auf diese Weise wurden die Versuche fortgesetzt, bis eine hinreichende Beobachtungsreihe erhalten wurde. Die folgende Tafel umfasst 4 solche Beobachtungsreihen. Für jede Reihe sind in der ersten Columne die an der Scale beobachteten Elongationen der Reihe nach unter einander gestellt. In der zweiten Columne sind die Mittelwerthe aus je zwei auf einander folgenden positiven oder negativen Elongationen beigefügt worden. In der dritten Columne endlich sind die Unterschiede der grössten positiven und negativen Elongationen oder die Grösse der ganzen Schwingungsbogen und unter jeder Reihe deren Mittelwerth angegeben.

Erste Reihe.			Zweite Reihe.			Dritte Reihe.			Vierte Reihe.		
467,1			467,1			463,0			462,0		
540,7	543,70		540,5	543,65		536,7	539,65		534,7	538,20	
546,7		80,10	546,8		79,65	542,6		80,40	541,7		80,00
461,4	463,60		461,3	464,00		456,6	459,25		455,3	458,20	
465,8		79,75	466,7		79,55	461,9		80,35	461,1		79,75
540,6	543,35		540,8	543,55		537,6	539,60		535,1	537,95	
546,1		79,25	546,3		79,90	541,6		79,55	540,8		79,50
462,3	464,10		461,8	463,65		458,3	460,05		456,0	458,45	
465,9		79,45	465,5		80,00	461,8		79,70	460,9		79,50
541,4	543,55		542,1	543,65		537,7	539,75		535,3	537,95	
545,7		79,75	545,2		79,70	541,8		79,95	540,6		80,05
462,3	463,80		462,8	463,95		457,9	459,80		456,0	457,90	
465,3		79,70	465,1		79,85	461,7		79,85	459,8		79,85
542,0	543,50		542,3	543,80		537,6	539,65		536,1	537,75	
545,0		79,45	545,3		80,10	541,7		79,70	539,4		79,55
462,8	464,05		462,7	463,70		458,2	459,95		456,8	458,20	
465,3		79,45	464,7		79,80	461,7		80,10	459,6		79,65
542,0	543,50		542,3	543,50		537,6	540,05		536,0	537,85	
545,0		79,65	544,7		79,75	542,5		80,05	539,7		79,70
462,9	463,85		462,8	463,75		457,3	460,00		456,5	458,15	
464,8		79,85	464,7		79,60	462,7		79,50	459,8		79,60
542,7	543,70		541,9	543,35		536,6	539,50		535,8	537,75	
544,7		79,45	544,8		79,75	542,4		79,75	539,7		79,55
463,4	464,25		462,3	463,60		457,2	459,75		456,4	458,20	
465,1		79,70	464,9		79,85	462,3			460,0		79,55
542,6	543,95		541,3	543,45					535,7	537,75	
545,3		79,75	545,6						539,8		
462,8	464,20										
465,6											
Mittel 79,64			Mittel 79,79			Mittel 79,90			Mittel 79,69		

Der Mittelwerth für den ganzen Schwingungsbogen aus allen Beobachtungen ist folglich 79,755 Scalentheile, wofür die Abmessung

79,4 Millimeter

gab. Dieses Resultat ist aber noch um $\frac{1}{2}$ Millimeter zu vergrössern, wenn es von dem Einflusse unabhängig gemacht werden soll, welchen die Dauer der Drehung des Inductors darauf hatte: man erhält dann

79,9 Millimeter.*)

*) Die Drehung des Inductors liess sich bei seiner Grösse nicht so schnell bewerkstelligen, dass ihre Dauer gegen die Schwingungsdauer der Nadel zu vernachlässigen wäre. Sie wurde daher mit möglichster Gleichförmigkeit immer in 2 Secunden ausgeführt. Die Intensität des inducirten Stroms lässt sich hiernach für jeden Augenblick der Drehung bestimmen und wird durch $i \sin \frac{\pi}{2} \theta$ dargestellt, wenn i die Intensität in der Mitte der Drehung bezeichnet und die Zeit θ von Anfang der Drehung an gerechnet wird. Dieser veränderlichen, 2 Secunden lang dauernden Induction kann, mit fast gleicher Wirkung, eine gleichförmige Induction substituiert werden,

Zur Vervollständigung der Messung wurde die Schwingungsdauer der Nadel beobachtet und aus 300 Schwingungsdauern die Dauer einer Schwingung = 10,2818 Secunden
gefunden.

Ferner wurde das Verhältniss der magnetischen Directionskraft zu der des Fadens gefunden wie

1770 : 1.

Da endlich in dem Saale, in welchem diese Instrumente aufgestellt waren, und in den angrenzenden Zimmern andere Magnete sich befanden, welche nicht hatten entfernt werden können, so liess sich nicht annehmen, dass die Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus, welcher in dem Inductor den Strom erregte, der Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus, welcher auf die Nadel im Mittelpunkte des Multiplicators wirkte, ganz gleich wäre. Daher wurden beide mit einander dadurch verglichen, dass die Schwingungsdauer einer und derselben Nadel an beiden Orten unmittelbar nach einander beobachtet wurde, und es ergab sich diese Schwingungsdauer

im Mittelpunkte des Dämpfers = 2,9095 Secunden,
,, ,, Inductors = 2,9126 ,, ,,

Umgekehrt wie die Quadrate dieser Schwingungsdauern verhält sich die Stärke des Erdmagnetismus an diesen beiden Orten, d. i. wie

100000 : 99787.

---

welche $\frac{4}{\pi}$ Secunden lang einen Strom von der Intensität i erzeugt. Dieser Strom beginnt $\frac{2}{\pi}$ Secunde früher auf die Nadel zu wirken, als die Nadel zum magnetischen Meridiane gelangt und dort umkehrt, und darauf verfliessen nochmals $\frac{2}{\pi}$ Secunde, ehe der Strom aufhört. Bezeichnet α die grösste Elongation der Nadel und t ihre Schwingungsdauer, so wird die Ablenkung der Nadel in dem Augenblicke, wo der Strom beginnt oder wo er aufhört, nahe durch $\frac{\alpha}{t}$ ausgedrückt und die mittlere Ablenkung für die ganze Dauer der Induction durch $\frac{\alpha}{3t}$. Die einer solchen Ablenkung entsprechende Beschleunigung der Nadel durch ihre Directionskraft ist $= \frac{\alpha}{3t} \cdot \frac{\pi\pi}{tt}$, und die während der Induction dadurch hervorgebrachte Geschwindigkeit ist $= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi\pi\alpha}{3t^3}$. Die Hälfte davon müsste zur Geschwindigkeit $\frac{\pi}{t}\alpha$, welche der Nadel, ihrer Elongation α nach, beim Durchgang durch den Meridian zukommt, hinzugefügt werden, um diejenige Geschwindigkeit zu erhalten, welche die Nadel im Augenblicke nach der Umkehrung besitzen würde, wenn die Induction momentan geschähe. Wie sich nun die Geschwindigkeiten $\frac{\pi}{t}\alpha : \left(1 + \frac{2}{3tt}\right)\frac{\pi}{t}\alpha$ verhalten, ebenso verhält sich die beobachtete Elongation der Nadel α zu derjenigen Elongation, welche bei momentaner Induction stattgefunden haben würde. Letztere ergiebt sich hiernach $= \left(1 + \frac{2}{3tt}\right)\alpha$. Da nun der ganze Schwingungsbogen $2\alpha = 79{,}4$ Millimeter und $t = 10{,}2818$ war, so folgt hieraus der oben angeführte Werth $= 79{,}9$ Millimeter.

Dies sind alle Versuche, welche nach der ersten Methode nöthig waren, um den Widerstand der ganzen Kette, welche aus dem Drahte des Inductors, des Dämpfers und aus den beiden Verbindungsdrähten bestand, nach absolutem Maasse zu bestimmen. Ehe zur Berechnung der Grösse des Widerstands der Kette aus diesen Versuchen übergegangen wird, sollen auch die nach der zweiten Methode gemachten Versuche zusammengestellt und vorausgeschickt werden.

15.

Zweite Methode.

A.

Die zweite Methode gewährt die Vereinfachung, dass von den bei der ersten gebrauchten Instrumenten der Erdinductor ganz entbehrlich gemacht wird. Bei den folgenden Versuchen bildete daher der Draht des oben beschriebenen Multiplicators die ganze Kette, indem seine Enden unmittelbar mit einander verbunden wurden. Die Aufstellung des Multiplicators, welcher dadurch in einen Dämpfer verwandelt worden war, blieb unverändert. Dagegen wurde die Nadel im Magnetometer mit einer grösseren und stärkeren vertauscht, durch deren Schwingungen eine grössere elektromotorische Kraft auf die geschlossene Kette ausgeübt werden konnte. Diese Nadel bestand aus 9 parallelopipedischen Magnetstäben, jeder 90 Millimeter lang und 9 Millimeter breit und dick, welche mit parallel gerichteten Axen und durch 5 Millimeter weite Zwischenräume von einander geschieden, zu einem festen System verbunden und zur Beobachtung der Schwingungen mit einem Spiegel versehen waren.

Mit diesen vereinfachten Instrumenten wurden nun folgende Versuche gemacht. Es wurde damit begonnen, dass die Drahtenden des Dämpfers von einander getrennt wurden. Alsdann wurde die Nadel in Schwingung gesetzt und nach der von Gauss in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837» gegebenen Anleitung die Schwingungsdauer der Nadel und die Abnahme ihrer Schwingungsbogen oder deren logarithmisches Decrement bestimmt. Darauf wurden die Drahtenden der Kette verbunden oder der Dämpfer geschlossen und die nämlichen Beob-

achtungen wiederholt. Sodann wurde der Dämpfer wieder geöffnet und auf diese Weise mehrmals abgewechselt. Die Resultate dieser Versuche sind in der folgenden Tafel zusammengestellt worden, wo in der ersten Columne unter A das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei geschlossenem Dämpfer, in der zweiten Columne das nämliche bei offenem Dämpfer, in der dritten Columne unter t die zugehörige Schwingungsdauer angegeben ist. Unter den Columnen sind die Mittelwerthe aus den wiederholten Bestimmungen beigefügt.

A.	*B.*	*t.*
0,028645	0,000460	9,1128
0,027955	0,000360	9,1148
0,028565	0,000380	9,1107
0,028388	0,000400	9,1128

Zur Vervollständigung der Messung wurden endlich noch folgende Versuche gemacht, um den Magnetismus der Nadel zu bestimmen und auch von dessen Vertheilung, so weit es nöthig schien, Kenntniss zu erlangen. Es wurde nämlich möglichst nahe an der Stelle, wo die schwingende Nadel sich befunden hatte, eine kleine Boussole aufgestellt und die Ablenkung v_1 derselben beobachtet, wenn jene Nadel ihr genähert wurde. Eben so wurde die Ablenkung v_2 beobachtet, nachdem die Nadel um ihren Mittelpunkt um 180° gedreht worden war. Endlich wurden die correspondierenden Ablenkungen v_3 und v_4 beobachtet, als die Nadel parallel mit sich selbst in gleiche Entfernung auf die entgegengesetzte Seite von der Boussole versetzt wurde, und daraus der Werth von

$$v = \tfrac{1}{4}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4)$$

berechnet. Diese Versuche wurden nun gemacht bei verschiedenen Entfernungen von der Boussole und bei verschiedener Richtung der Geraden, welche durch die Mitte der Nadel und der Boussole ging, nämlich in den Entfernungen von 400, 500 und 600 Millimetern, als jene Gerade senkrecht auf dem magnetischen Meridiane war, und in der Entfernung von 400^{mm}, als sie dem magnetischen Meridiane parallel

war. Die magnetische Axe der ablenkenden Nadel war stets senkrecht gegen den magnetischen Meridian. In der folgenden Tafel sind die Resultate dieser Versuche zusammengestellt. Nr. 1, 2, 3 beziehen sich auf die Fälle, wo die Richtung der Geraden von der Mitte der Nadel zur Mitte der Boussole auf dem magnetischen Meridiane senkrecht war, Nr. 4. auf den Fall, wo diese Gerade dem magnetischen Meridiane parallel war. In der zweiten Columne unter *R* ist die Entfernung der Mittelpunkte beider Nadeln, in der dritten Columne der für diese Entfernung gefundene Werth von *v* angegeben.

Nr.	*R*	*v*
1.	400mm.	32° 37′ 52″5
2.	500	18 1 52,5
3.	600	19 37 7,5
4.	400	17 24 45,0

Hierbei ist zu bemerken, dass diese Versuchsreihe einige Zeit später gemacht wurde als die obigen Beobachtungen der im Dämpfer schwingenden Nadel, und dass daher nicht angenommen werden konnte, dass das Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus in dieser Zeit ganz unverändert geblieben wäre. Deshalb war schon in den Zwischenzeiten zwischen den einzelnen Sätzen der obigen Schwingungsbeobachtungen einer von diesen Ablenkungsversuchen gemacht worden, welcher dazu benutzt werden konnte, das aus der letzten vollständigen Reihe von Ablenkungsbeobachtungen sich ergebende Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus auf diejenige Zeit zu reducieren, wo obige Schwingungsbeobachtungen gemacht wurden. Aus der Vergleichung der correspondierenden Ablenkungen ergab sich nämlich das Verhältniss:

$$10293 : 10000,$$

woraus hervorgeht, dass der Nadelmagnetismus in der Zwischenzeit merklich abgenommen hatte. Das Verhältniss der magnetischen Directionskraft zu der des Fadens bei den Schwingungsbeobachtungen war:

$$68 : 1.$$

Dies sind alle Versuche, welche nach der zweiten Methode nöthig waren, um den Widerstand der Kette oder des Drahtes, welcher den Dämpfer bildete, nach absolutem Maasse zu bestimmen.

B.

Aus den unter (A.) zusammengestellten Versuchen geht hervor, dass eine Nadel, deren Länge fast nur den 7ten Theil des Durchmessers des Dämpfers betrug und die sehr kleine Schwingungen machte, dennoch eine elektromotorische Kraft auf den Dämpfer ausübte, welche hinreichte, einen Strom zu erregen, dessen Rückwirkung auf die Nadel nicht bloss wahrgenommen, sondern genau gemessen werden konnte. Sollen diese Versuche nun einer Berechnung des Widerstands der Kette nach absolutem Maasse zum Grunde gelegt werden, so entsteht einige Complication dadurch, dass auch bei den mässigen Dimensionen der Nadel im Vergleiche zum Durchmesser des Dämpfers, die Vertheilungsweise des Magnetismus in der ersteren nicht ganz ausser Acht gelassen werden darf. Diese Complication wird ganz vermieden, wenn man eine kleinere Nadel im Dämpfer aufhängt, wenn die kleinere Nadel gleich viel Magnetismus, wie die grössere, besitzt.

In dem physicalischen Institute zu Leipzig befand sich ein natürlicher Magnet von geringer Grösse und, im Verhältniss zu dieser, von grosser Stärke, welcher nebst Fassung 40 Gramme wog und 24 Millimeter lang war. Wegen dieser Kleinheit und Stärke war er zur Magnetometernadel für diese Versuche sehr geeignet, und der Durchmesser des Dämpfers hätte, ohne eine genauere Erforschung der Vertheilungsweise des Magnetismus nöthig zu machen, beträchtlich verkleinert werden können. Die zugemessene beschränkte Zeit, in welcher die grosse Drahtmasse des Dämpfers zu diesen Versuchen disponibel war, gestattete aber keine Umgestaltung des Dämpfers und es wurde daher jener natürliche Magnet als Nadel in den unveränderten Dämpfer aufgehangen und eine zweite Versuchsreihe damit ausgeführt, die hier gleichfalls zusammengestellt werden soll, weil sie einen interessanten Beweis von der Feinheit giebt, welche die Beobachtungen über die Abnahme der Schwingungsbogen mit dem Dämpfer gewähren, um die Wirkungen sehr schwacher elektromotorischer Kräfte noch zu erkennen und selbst mit ziemlicher Genauigkeit zu messen. Dieser natürliche Magnet wurde zu diesem Zwecke mit Fassung versehen zur Befestigung des Spiegels und zur Aufhängung an einem Faden in der Mitte des Dämpfers. Im Uebrigen blieben die Instrumente unverändert und die Versuche wurden damit ganz auf dieselbe Weise, wie die vor-

hergehenden, ausgeführt. Die folgende Tafel giebt die Uebersicht der damit gewonnenen Resultate, nämlich unter *A* das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei geschlossenem Dämpfer, unter *B* das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei offenem Dämpfer, unter *t* die zugehörige Schwingungsdauer.

A.	*B.*	*t.*
0,00601	0,00254	3,955
0,00613	0,00267	3,954
0,00615	0,00267	3,953
0,00605	0,00266	3,949
0,006085	0,002635	3,9527

Zur Vervollständigung dieser Versuche wurde der Magnetismus des kleinen Magnets durch besondere Versuche auf ähnliche Weise bestimmt, wie in der vorhergehenden Reihe; da aber bei diesem kleinen Magnet bloss das Moment desselben zu bestimmen nöthig war, so wurden diese Versuche auf zwei verschiedene Abstände von dem Mittelpunkte der kleinen Hülfsboussole beschränkt, in der Richtung senkrecht auf den magnetischen Meridian östlich und westlich von der Boussole. Die folgende Tafel giebt eine Uebersicht der dadurch erlangten Resultate, unter *R* den Abstand der Mitte des natürlichen Magnets von der Mitte der Boussole, unter *v* die Ablenkung der Boussole auf dieselbe Weise, wie in der vorigen Reihe, berechnet.

R	*v*
$180^{mm},08$	$20° \; 42' \; 0''$
240,18	9 4 52

Die Resultate dieser Beobachtungen gelten für eine Temperatur von 20° R. des Kupferdrahts, welches im Mittel die Temperatur während der Beobachtungen in diesem und im vorigen Artikel gewesen ist.

Durch diese Versuche sind die Data zur Bestimmung des Widerstands der Kette nach absolutem Maasse vollständig gegeben.

16.

Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den vorhergehenden Beobachtungen.

Wenn die Verhältnisse, unter welchen die vorhergehenden Beobachtungen ausgeführt worden sind, denjenigen Verhältnissen genau entsprächen, welche in dem Art. 11 gegebenen Schema zur absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters angenommen worden waren, so würden die Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den mitgetheilten Beobachtungs-Resultaten in der am Schlusse jenes Schema's gefundenen Formel

$$w = \frac{\pi^2 r^4}{\alpha R^2 t}$$

enthalten sein; denn es würde alsdann der Werth der Zahl α, welche die Elongationsweite der von der Ruhe ab in Schwingung gesetzten Nadel in Theilen des Halbmessers angiebt, ferner der Werth der Zahl $\frac{r}{R}$, welche das Verhältniss der Halbmesser der kreisförmigen Leiter A und B zu der Entfernung BC angiebt, und endlich die Geschwindigkeit $\frac{r}{t}$, mit welcher der Halbmesser der kreisförmigen Leiter während einer Schwingung der Nadel durchlaufen würde, unmittelbar durch die Beobachtungs-Resultate gegeben sein. Weil nun aber die vorhergehenden Beobachtungen, nach der gegebenen Beschreibung, nicht genau unter den im erwähnten Schema angenommenen Verhältnissen ausgeführt worden sind, so bedürfen jene einfachen Regeln einiger Abänderungen, um Anwendung auf die vorliegenden Beobachtungen zu finden.

Einige dieser Abänderungen ergeben sich leicht, wenn man in der für die Gleichung $w = \frac{\pi^2 r^4}{\alpha R^2 t}$ gegebenen Ableitung die Halbmesser der beiden kreisförmigen Leiter ungleich annimmt und sie durch r' und r'' unterscheidet, wenn man ferner die Zahl ihrer Umwindungen m und n in Rechnung bringt, wenn man ausserdem die Elasticität des Fadens, an welchem die Nadel aufgehangen wurde, berücksichtigt, aus welcher sich eine Directionskraft für die Nadel ergiebt, die sich zu ihrer magnetischen Directionskraft verhält wie $\theta : 1$, und wenn man endlich die ungleiche Stärke des Erdmagnetismus an den beiden Orten A und B beachtet, deren Verhältniss durch $\frac{T'}{T''}$ dargestellt werde. Man findet dann, dass in obiger Formel das Product $r'r''$ für das Quadrat rr zu setzen und der ganze Werth für w noch mit $\frac{mn}{(1+\theta)} \cdot \frac{T'}{T''}$ zu multiplicieren ist, folglich

$$w = \frac{mn}{(1+\theta)} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{\pi^2 r'r'r''r''}{\alpha R^2 t}.$$

Ausserdem kommen nun für die nach der ersten Methode ausgeführten Beobachtungen noch folgende wesentliche Modificationen in Betracht, nämlich erstens, dass die Nadel aus der Entfernung $BC = R$ in den Mittelpunkt des Kreises B selbst versetzt wurde, wodurch die beobachtete Elongationsweite in dem Verhältniss von

$$r'^3 : 2R^3$$

vergrössert wird. Hierbei lässt sich zugleich der Umstand mit berücksichtigen, dass der Kreis A statt um einen Quadranten jedes Mal um zwei Quadranten gedreht wurde, wodurch die beobachtete Elongationsweite ebenfalls vergrössert wurde und zwar in dem Verhältniss von

$$1 : 2.$$

Bezeichnet also α gegenwärtig diese vergrösserte Elongationsweite, so ist demgemäss

$$w = \frac{mn}{1+\theta} \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi^2 r' r'}{\alpha r'' t}$$

zu setzen. Zweitens kommt die Vervielfältigung der Umwindungen beider Kreise, wodurch sie in Ringe, welche einen bedeutenden Querschnitt besitzen, verwandelt werden, in Betracht. Für den Ring A genügt es, mit Rücksicht darauf, dass er keine genaue Kreisform hatte, statt $m\pi r' r'$ die Summe der Flächen zu setzen, welche von den Projectionen aller seiner Umwindungen auf die Ringebene begrenzt werden, folglich, wenn diese Summe mit S bezeichnet wird,

$$w = \frac{n}{1+\theta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi\pi S}{\alpha r'' t}.$$

Für den Ring B dagegen ist der äussere Halbmesser a'', der innere Halbmesser a', die Höhe des Ringes $2b'$ und ausserdem in Beziehung auf die Vertheilung des Magnetismus M der Nadel, wenn

$$M = 2e'\mu$$

gesetzt wird, wo $\pm\mu$ die Menge des nördlichen oder südlichen magnetischen Fluidums bezeichnet, welche dem bekannten Gaussischen Theoreme von der idealen Vertheilung des Magnetismus gemäss an der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht werden kann, die Länge e' in Rechnung zu bringen, was dadurch geschieht, dass statt $\frac{1}{r'}$ folgender Ausdruck gesetzt wird:

$$\frac{1}{a''-a'}\left\{\log \frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{e'e'}{b'b'}\right\}.$$

Die hier angeführten Abänderungen der Art. 11 gefundenen Formel, welche nothwendig sind, wenn der Widerstand der Kette aus den Art. 14 beschriebenen Versuchen berechnet werden soll, sind so zahlreich, dass ich es vorziehe, statt auf eine nähere Erörterung und Begründung derselben einzugehen, die beiden Gleichungen, welche im folgenden Art. 17 zur Berechnung des Widerstands aus den Art. 14 beschriebenen Versuchen gebraucht werden, nämlich:

$$w = \frac{n}{1+\theta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi\pi S}{\alpha r'' t}$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{2} \left(\frac{a''^2}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^2}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \frac{c'c'}{b'b'} \right\}$$

unmittelbar aus den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Grundgesetzen abzuleiten. Man findet diese Ableitung in Beilage *D.* am Ende der Abhandlung.

Ferner werden im 18. Artikel zur Berechnung des Widerstands aus den Art. 15 beschriebenen Versuchen folgende Gleichungen gebraucht werden:

$$w = \frac{nn\pi\pi}{1+\theta} \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \operatorname{tang} v_0 \cdot \frac{r''}{t}$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{2} \left(\frac{a''^2}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^2}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \frac{c'c'}{b'b'} \right\},$$

worin λ den natürlichen Logarithmus des beobachteten Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbogen der Magnetometernadel in Folge der Dämpfung bei geschlossener Kette bezeichnet und $\operatorname{tang} v_0$ statt $\frac{2M}{T''r''^2}$ geschrieben worden ist. Auch diese letzteren Gleichungen sind in der Beilage *D.* unmittelbar aus den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Grundgesetzen abgeleitet worden.

Hiernach können wir nun zur Berechnung des Widerstands selbst aus den Art. 14 und 15 beschriebenen Versuchen übergehen.

17.

Berechnung des Widerstands aus der ersten Versuchsreihe.

Bei der Versuchsreihe Art. 14, welche nach der ersten Methode ausgeführt war, bestand die Kette aus dem Drahte des Inductors und

des Multiplicators und aus den beiden Verbindungsdrähten, und der zu berechnende Widerstand ist die Summe der Widerstände dieser vier Drähte.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Art. 14 beschriebenen Versuche waren erstens die Grösse des mit dem Magnetometer gemessenen Schwingungsbogens, nämlich:

79,9 Millimeter

für einen Halbmesser von 8175 Millimeter Länge (= dem doppelten Horizontalabstande des Spiegels von der Scale). Hieraus ergiebt sich:

$$\alpha = \frac{79{,}9}{8175}.$$

Siehe darüber Beilage *C.*, wo die hier gebrauchte Zurückwerfungsmethode näher erörtert ist.

Zweitens die Grösse der Schwingungsdauer der Magnetometernadel

$$t = 10{,}2818 \text{ Secunden.}$$

Drittens der von der Elasticität des Aufhängungsfadens herrührende Theil der Directionskraft der Nadel, in Theilen ihrer magnetischen Directionskraft ausgedrückt,

$$\theta = \frac{1}{1770}.$$

Viertens das Verhältniss der Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus am Orte des Inductors T' zu der am Orte des Multiplicators T''

$$\frac{T'}{T''} = 0{,}99787.$$

Zu diesen unmittelbaren Ergebnissen der Beobachtungen sind ferner die Resultate der Abmessungen des Inductors und Multiplicators hinzuzufügen. Für den Inductor genügt das Resultat, dass die Summe der Flächen, welche von den Projectionen seiner 145 Umwindungen auf die Ringebene begrenzt wurden,

$$S = 104924000 \text{ Quadratmillimeter}$$

betrug.

Für den Multiplicator müssen folgende Resultate seiner Abmessung beigefügt werden:

innerer Halbmesser	$a' = 303{,}51$	Millimeter,
äusserer Halbmesser	$a'' = 374{,}41$	„
Breite	$2b' = 202{,}05$	„
Zahl der Umwindungen	$n = 1854.$	

Aus diesen Werthen von a', a'', b' ergiebt sich

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^2}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^2}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{e'e'}{b'b'} \right\}$$

$$\frac{1}{r''} = 0{,}0028352 + 0{,}000000015875 \,.\, e'e'$$

wo bei der Kleinheit der Nadel für e' einen approximativen Werth, von etwa 20 Millimetern, anzunehmen genügt, also $\frac{1}{r''} = 0{,}00284155$. Hieraus ergiebt sich dann

$$w = \frac{n}{1+\theta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi\pi S}{ar''t}$$

$$= \frac{1770}{1771} \cdot 1854 \cdot 0{,}99787 \cdot \frac{4\pi\pi \,.\, 104924000}{79{,}9 \,.\, 10{,}2818} 8175 \,.\, 0{,}00284155$$

oder

$$w = 2166 \,.\, 10^8 .$$

Durch das definierte Widerstandsmaass W und durch diese Zahl w ist also der Widerstand der Kette, welche aus dem Inductor- und dem Multiplicatordrahte nebst den beiden Verbindungsdrähten bestand, vollständig bestimmt, wobei nur zu bemerken ist, dass dieser absoluten Maassbestimmung das Millimeter als Raummaass und die Secunde als Zeitmaass zum Grunde liegt, was durch folgende Bezeichnung ausgedrückt wird:

$$2166 \cdot 10^8 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}} .$$

Verhält sich ein anderes Raummaass zum Millimeter, wie $1 : r$, ein anderes Zeitmaass zur Secunde, wie $1 : t$, so ist derselbe Widerstand, wenn diese neuen Maasse zum Grunde gelegt werden:

$$2166 \cdot 10^8 \cdot \frac{r}{t}$$

z. B. wenn die Meile als Raummaass zum Grunde gelegt wird, die sich zum Millimeter verhält, wie $1 : 0{,}000000135$:

$$29241 \, \frac{\text{Meile}}{\text{Secunde}} .$$

18.

Berechnung des Widerstands aus der zweiten Versuchsreihe.

Bei der zweiten Versuchsreihe, welche nach der zweiten Methode ausgeführt war, bestand die Kette bloss aus dem Drahte des Dämpfers, d. i. aus demjenigen Drahte, welcher in der vorhergehenden Versuchsreihe den Multiplicator bildete.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Versuche waren:

Erstens die Grösse des logarithmischen Decrements der Abnahme der Schwingungsbogen, welches nach Abzug des vom elektromagnetischen Einflusse unabhängigen Theiles, nach gemeinen Logarithmen,

$$= 0{,}027988$$

gefunden worden ist; folglich, nach natürlichen Logarithmen,

$$\lambda = 0{,}064445\,.$$

Zweitens die Grösse der Schwingungsdauer der Magnetometernadel

$$t' = 9{,}1128$$

wobei noch zu bemerken war, dass die magnetische Directionskraft ungefähr um ihren 68ten Theil durch die Elasticität des Fadens vermehrt war, also

$$\theta = \tfrac{1}{68}\,.$$

Drittens die Grösse des Nadelmagnetismus im Verhältniss zum Erdmagnetismus war aus den in folgender Tafel enthaltenen Ergebnissen der Ablenkungsversuche zu entnehmen:

Nr.	*R.*	*v.*
1.	400mm	32″ 37′ 52″ 5
2.	500	18 1 52, 5
3.	600	10 37 7, 5
4.	400	17 24 45

Die drei ersten Nummern beziehen sich auf die Versuche, bei welchen der Mittelpunkt der Magnetometernadel und ihre magnetische Axe mit demjenigen Perpendikel auf den magnetischen Meridian zusammenfiel, welches durch den Mittelpunkt der Hülfsboussole gelegt wurde; die vierte Nummer auf einen Versuch, wobei die Magnetometernadel zwar ebenfalls mit ihrer Axe senkrecht gegen den magnetischen Meridian lag, aber ihr Mittelpunkt in der durch den Mittelpunkt der Hülfsboussole dem magnetischen Meridiane parallel gelegten Geraden sich befand. Auch war ermittelt worden, dass das hieraus hervorgehende Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus in dem Verhältniss

$$10000 : 10293$$

vergrössert werden muss, wenn es für die Zeit gelten soll, wo die Abnahme der Schwingungsbogen und die Schwingungsdauer der Magnetometernadel beobachtet worden waren.

Die Ableitung der Werthe von e' und v_0 in den zur Berechnung des Widerstands aufgestellten Formeln:

$$w = \frac{nn\pi\pi}{1+\theta} \operatorname{tang} v_0 \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t}$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \tfrac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{e'e'}{b'b'} \right\}$$

aus den eben angeführten Datis ist nun folgende. Man denkt sich die nach der S. 238 schon erwähnten idealen Vertheilungsweise an der Oberfläche der Nadel verbreiteten magnetischen Fluida jedes in seinem Mittelpunkte (Schwerpunkte) concentriert, d. i. in zwei Punkten, welche in der Entfernung e' von der Mitte der Nadel in einer mit der Richtung der magnetischen Axe parallelen Linie liegen und deren Abstand $= 2e'$ ist. Die Lage des Mittelpunkts der Nadel und ihrer magnetischen Axe gegen den Mittelpunkt der abgelenkten Boussole und gegen den magnetischen Meridian ist in obiger Tafel für jeden Versuch genau bestimmt. Hat nun f' für die Boussole gleiche Bedeutung wie e' für die Magnetometernadel, so leuchtet ein, dass für jede gegebene Ablenkung der Boussole v die Lage der 4 Punkte, in denen die magnetischen Fluida beider Nadeln concentriert gedacht werden, gegen einander und gegen den magnetischen Meridian durch e' und f' vollständig bestimmt werden, und dass sich dann, mit Hülfe des Gesetzes, nach welchem zwei Elemente des magnetischen Fluidums auf einander wirken, aus dem Verhältnisse des Magnetismus der Magnetometernadel M zum Erdmagnetismus T, das Verhältniss des Drehungsmoments, welches die Magnetometernadel, zu dem, welches der Erdmagnetismus auf die Boussole ausübt, bestimmen lasse. Diejenige Ablenkung v, für welche diese beiden Drehungsmomente sich entgegengesetzt gleich ergeben, ist die beobachtete, die dadurch in Abhängigkeit von e', f' und $\frac{M}{T}$ kommt. Die Gleichung, welche die Abhängigkeit dieser Grössen ausdrückt, ergiebt sich daraus für den Fall, wo die Gerade R, welche die Mittelpunkte beider Nadeln verbindet, auf den magnetischen Meridian senkrecht ist:

$$\frac{T}{M} \operatorname{tang} v = \frac{2}{R^3} + \frac{4e'e' - 6\,(1 - 5 \sin v^2)\, f'f'}{R^5} + \ldots$$

für den Fall, wo R dem magnetischen Meridiane parallel ist,

$$\frac{T}{M} \operatorname{tang} v = \frac{1}{R^3} - \frac{3}{2} \frac{e'e' - (4 - 15 \sin v^2) f'f'}{R^5} + \ldots$$

Die Annahme von der Concentration der magnetischen Fluida ist nun aber nur dann zulässig, wenn diejenigen Glieder, welche mit R^7 oder mit höheren Potenzen dividiert sind, vernachlässigt werden dürfen. Da nun für jeden Versuch in obiger Tafel die Werthe von R und v gegeben sind, so giebt jeder Versuch eine Gleichung zwischen $e', f', \frac{M}{T}$, und folglich geben die 4 in obiger Tafel enthaltenen Versuche 4 Gleichungen zwischen diesen 3 Grössen, von denen drei zur Bestimmung dieser Grössen dienen und die vierte zur Controle, dass die Werthe von R wirklich so gross sind, dass die Glieder der höheren Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Die Werthe obiger 3 Grössen, welche mit den Beobachtungen am besten harmonieren, sind:

$$e' = 33{,}715$$
$$f' = 14{,}856$$
$$\frac{M}{T} = 20143000.$$

Der letztere Werth von $\frac{M}{T}$ gilt für die Zeit, wo die Ablenkungsversuche gemacht wurden, und muss nach S. 242 mit 1,0293 multipliciert werden, wenn er für die Zeit gelten soll, wo die Schwingungsdauer und die Abnahme der Schwingungsbogen beobachtet worden sind; für letztere Zeit ergiebt sich also

$$\frac{2M}{T} = 41466000$$

Substituiert man ferner den gefundenen Werth von e' in der Gleichung

$$\frac{1}{r''} = 0{,}0028352 + 0{,}0000000015875\, e'e',$$

welche auch für die zweite Versuchsreihe gilt, weil die Abmessungen des Dämpfers hier die nämlichen sind, wie die Abmessungen des Multiplicators in der ersten Versuchsreihe, so erhält man

$$\frac{1}{r''} = 0{,}0028532$$

oder

$$r'' = 350{,}48$$

und mit diesem Werthe

$$\frac{2M}{Tr''^3} = \text{tang}\, v_0 = 0{,}96314.$$

Ausserdem ist, wie in der ersten Versuchsreihe,

$$n = 1854.$$

Hieraus ergiebt sich dann

$$w = \frac{nn\pi\pi}{1+\theta} \text{tang}\, v_0 \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t}$$
$$= \frac{68}{69} \cdot 1854^2\pi\pi \,.\, 0{,}96314 \cdot \frac{\pi\pi + 0{,}064445^2}{0{,}064445} \cdot \frac{850{,}48}{9{,}1128}$$

oder $$w = 1898 \cdot 10^8 .$$
Durch das definierte Widerstandsmaass W und durch diese Zahl w ist also der Widerstand der Kette, welche bloss aus dem Dämpferdraht bestand, vollständig bestimmt.

19.

Berechnung des Widerstands aus der dritten Versuchsreihe.

Auch bei der dritten Versuchsreihe bestand die Kette, deren Widerstand bestimmt werden sollte, bloss aus dem Drahte des Dämpfers, und die Versuche waren nach der zweiten Methode ausgeführt worden. Der wesentliche Unterschied von der zweiten Versuchsreihe bestand daher bloss darin, dass der zur Magnetometernadel gebrauchte natürliche Magnet viel kleinere Dimensionen hatte, wodurch einerseits zwar die Rechnung vereinfacht wurde, weil bei so kleinen Dimensionen, im Vergleich zum Durchmesser des Dämpfers, die Art der Vertheilung des freien Magnetismus nicht in Betracht kommt; andererseits verlor aber dadurch die Messung an Präcision, weil der Magnetismus, so stark er auch im Verhältniss zur Grösse des Magnets war, doch fast nur den 19[ten] Theil von dem Magnetismus der grösseren Nadel betrug, wodurch die Dämpfung so geschwächt wurde, dass die Beobachtungen keine so feine Bestimmung des logarithmischen Decrements der Abnahme der Schwingungsbogen gestatteten.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Versuche waren: **Erstens** die Grösse des logarithmischen Decrements für die Abnahme der Schwingungsbogen, welches, nach Abzug des vom elektromagnetischen Einflusse unabhängigen Theils, nach gemeinen Logarithmen

$$= 0{,}00345$$

gefunden worden ist, folglich, nach natürlichen Logarithmen,

$$\lambda = 0{,}007944 .$$

Zweitens, die Schwingungsdauer der Nadel

$$t = 3{,}9527$$

Die Elasticität des Aufhängefadens konnte vernachlässigt werden, da sie die Directionskraft noch nicht um $\frac{1}{2000}$ vergrösserte.

Drittens, die Grösse des Nadelmagnetismus im Verhältnisse zum Erdmagnetismus war aus den in folgender Tafel zusammengestellten Ablenkungsversuchen zu entnehmen.

R.	v.
180,mm08	20° 42′ 0
240, 18	9 4 52

Die Linie R, welche die Mittelpunkte der ablenkenden und abgelenkten Nadel verband, war dabei senkrecht auf den magnetischen Meridian.

Hieraus folgt nach der in der „*Intensitas vis magneticae terrestris etc.*" von Gauss gegebenen Regel:

$$\text{tang } 20^0\ 42' = \frac{2M}{T} \cdot 180{,}08^{-3} + a\,.\,180{,}08^{-5}$$

$$\text{tang } 9^0\ 4'\ 52'' = \frac{2M}{T} \cdot 240{,}18^{-3} + a\,.\,240{,}18^{-5}$$

also

$$\frac{2M}{T} = 2224660.$$

Es ist jedoch hierbei zu bemerken, dass bei dem geringen Grade von Genauigkeit, welchen diese mit so kleinen Magneten gemachten Ablenkungsversuche besitzen, die Elimination des zweiten, von der 5ten Potenz der Entfernung abhängigen Gliedes sehr unsicher ist, so dass ein ebenso genaues oder vielleicht noch genaueres Resultat gewonnen wird, wenn man dieses zweite Glied gar nicht berücksichtigt. Alsdann findet man

$$\text{tang } 20^0\ 42' = \frac{2M}{T} \cdot 180{,}08^{-3}$$

$$\text{tang } 9^0\ 4'\ 52'' = \frac{2M}{T} \cdot 240{,}18^{-3}$$

und hieraus die beiden Werthe für $\frac{2M}{T}$:

2206600
2214500

oder den Mittelwerth

2210550.

Bei dem Zweifel darüber, ob der ersten oder der zweiten Berechnung im vorliegenden Falle der Vorzug gebühre, und da die auf beide Weise erhaltenen Resultate ohnedem wenig verschieden sind, so soll aus den Resultaten beider Berechungen das Mittel genommen werden, nämlich:

$$\frac{2M}{T} = 2217600\,.$$

Weil nun ausserdem für den Dämpfer wieder dieselben Abmessungen wie in der vorhergehenden Versuchsreihe gelten, dabei aber das von e' abhängige Glied im Werthe von $\frac{1}{r}$ wegen der Kleinheit der Nadel

unmerklich ist, so ergiebt sich

$$\frac{1}{r''} = 0{,}0028352$$

$$r'' = 352{,}71$$

folglich

$$\frac{2M}{Tr''^3} = \text{tang}\, v_0 = 0{,}05054.$$

Ausserdem ist, wie in der vorhergehenden Reihe,

$$n = 1854.$$

Hieraus ergiebt sich dann, wenn θ seiner Kleinheit wegen vernachlässigt wird,

$$w = nn\pi\pi \,.\, \text{tang}\, v_0 \,.\, \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \,.\, \frac{r''}{l}$$

$$= 1854^2.\pi\pi \,.\, 0{,}05054 \,.\, \frac{\pi\pi + 0{,}007944^2}{0{,}007944} \,.\, \frac{352{,}71}{3{,}9527}$$

oder

$$w = 1900 \,.\, 10^8.$$

Der Unterschied dieses Werthes von dem aus der zweiten Versuchsreihe abgeleiteten ist kleiner, als der, welchen die unvermeidlichen Beobachtungsfehler der letzten Reihe verursachen können.

20.

Vergleichung des Widerstands der Kette in der ersten Versuchsreihe mit dem Widerstande der Kette in der zweiten und dritten Reihe.

Es sind in obigen Versuchsreihen die Widerstände zweier Ketten nach absolutem Maasse gemessen worden, von denen die erstere zusammengesetzt war 1) aus einem Drahte *A*, welcher zum Multiplicator diente, 2) aus einem Drahte *B*, welcher zum Erdinductor diente, 3) aus zwei kurzen, dicken Verbindungsdrähten *C*. Die letztere Kette bestand dagegen bloss aus dem Drahte *A*, welcher zum Dämpfer gebraucht wurde. Die Vergleichung des Widerstands beider Ketten beruht hauptsächlich auf der Vergleichung des Widerstands *A* mit dem Widerstande *B*, da der Widerstand *C* so gering ist, dass sein Einfluss nach Proportion seiner Länge und seines Querschnittes leicht als Correction in Rechnung gebracht werden konnte.

Da die unmittelbare Vergleichung der Widerstände *A* und *B* bei ihrer grossen Verschiedenheit zu einem weniger sicheren Resultate geführt haben würde, wurden 3 Hülfsdrähte *a*, *b*, *c* zugezogen, durch

welche es möglich wurde, das Verhältniss von $A:B$ bloss auf solche Messungen zu gründen, durch welche unmittelbar nur einander nahe gleiche Widerstände verglichen wurden.

Diese Widerstandsvergleichungen wurden sämmtlich nach der in der Beilage C beschriebenen und durch ein Beispiel erläuterten Methode ausgeführt, und es genügt daher, in der folgenden Tafel die Resultate zusammenzustellen, ohne in das Detail der Beobachtungen einzugehen. In der ersten Columne sind die nach der angegebenen Methode gemachten Widerstandsvergleichungen durch Nummern unterschieden. Die zweite Columne unter X gibt die Bezeichnung des gesuchten Widerstandsverhältnisses, die dritte Columne unter q den gefundenen Zahlenwerth. In den beiden letzten Columnen sind endlich die Logarithmen von q und $q+1$ beigefügt worden.

Nr.	X.	q	Log q	Log $(q+1)$
1.	$\frac{B}{c}$	1,04354	0,01851	0,31038
2.	$\frac{b}{B+c}$	1,03498		0,30856
3.	$\frac{a}{B+b+c}$	1,00752		0,30266
4.	$\frac{A}{B+a+b+c}$	0,91529	9,96156	
	$\frac{A}{B}$	7,3224	9,94305	0,92160

Nun ist

$$\log\left(\frac{A}{B}\right)=\log\left(\frac{A}{B+a+b+c}\right)-\log\frac{B}{c}+\log\left(\frac{B}{c}+1\right)\left(\frac{b}{B+c}+1\right)\left(\frac{a}{B+b+c}+1\right)$$

das heisst, der Unterschied der beiden Logarithmen in der vierten Columne (welcher darunter angegeben ist) ist der Summe der drei Logarithmen in der letzten Columne (die gleichfalls darunter angegeben ist) hinzuzufügen, um den Logarithmus des gesuchten Verhältnisses $\frac{A}{B}$ zu erhalten, welches hiernach berechnet unter der dritten Columne bemerkt ist.

Für C reicht es hin, zu bemerken, dass der Querschnitt 3 Mal grösser, die Länge 30 Mal kleiner war, als bei B; folglich, da beide Drähte von Kupfer waren, das Widerstandsverhältniss

$$\frac{B}{C}=90$$

woraus endlich zur Vergleichung des Widerstandes der in der ersten Versuchsreihe gebrauchten Kette $A + B + C$ mit dem Widerstande der Kette A in den beiden andern Versuchsreihen folgt:

$$\frac{A + B + C}{A} = 1 + \frac{1 + 90}{7,3224 \,.\, 90} = 1,138.$$

Nun ist $A + B + C$ aus der ersten Versuchsreihe nach absolutem Maasse bestimmt worden:

$$A + B + C = 2166 \,.\, 10^8 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}} \,.$$

Dividiert man diesen Werth mit obigen Quotienten, so erhält man den Werth von A aus der ersten Versuchsreihe abgeleitet:

$$A = 1903 \,.\, 10^8 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}} \,.$$

21.

Uebersicht der verschiedenen Maassbestimmungen für den Widerstand des Multiplicator- oder Dämpferdrahtes A.

I. Aus der ersten Versuchsreihe:

$$A = 1903 \,.\, 10^8 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}} \,.$$

II. Aus der zweiten Versuchsreihe:

$$A = 1898 \,.\, 10^8 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}} \,.$$

III. Aus der dritten Versuchsreihe:

$$A = 1900 \,.\, 10^8 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}} \,.$$

Von diesen drei Maassbestimmungen für denselben Widerstand ist der dritten, wie schon bemerkt worden ist, ein geringeres Gewicht beizulegen, als den beiden ersten. Da sie aber mit den beiden andern sehr nahe übereinstimmt, so ist kein Grund, sie auszuschliessen, und es ergiebt sich aus allen folgender Mittelwerth:

$$A = 19003 \,.\, 10^7 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}} \,.$$

Die Uebereinstimmung, welche sich hiernach zwischen den beiden nach ganz verschiedenen Methoden erhaltenen Maassbestimmungen für den Widerstand des Drahtes A ergiebt, nämlich zwischen der aus der ersten und der aus den beiden letzten Versuchsreihen, hat darum noch besonderes Interesse, weil sie beweist, dass die 1854 Umwindungen, welche dieser Draht im Multiplicator oder Dämpfer bildete, durch die Wolle, womit sie umsponnen waren, hinreichend isolirt wurden. Denn

hätte durch die Wolle hindurch eine Leitung von einer Umwindung zur andern stattgefunden, so würde dadurch in der ersten Versuchsreihe die Wirkung des Multiplicators auf die Magnetometernadel geschwächt worden sein und die Rechnung würde einen zu grossen Widerstand gegeben haben, wie wenn der durch den ganzen Draht gehende Strom durch einen grösseren Widerstand geschwächt worden wäre. Auf das aus der zweiten Versuchsreihe berechnete Resultat würde dagegen die Leitung durch die Wolle hindurch von einer Windung zur andern gar keinen Einfluss gehabt haben; denn es ist bekannt, dass die Dämpfungskraft eines Dämpfers dadurch nicht geändert wird, dass seine Drahtwindungen in leitende Verbindung mit einander gesetzt werden. Wenigstens kann dadurch auf keine Weise die Dämpfungskraft vermindert werden; eine Vergrösserung derselben würde aber, wenn sie irgend merklich gewesen wäre, bewirkt haben, dass die Rechnung den Widerstand zu klein ergeben hätte.

22.

Etalons zu Widerstandsmessungen nach absolutem Maasse.

Hätte der Draht A, dessen Widerstand durch obige Maassbestimmungen nach absolutem Maasse bekannt war, als Widerstands-Etalon aufbewahrt werden können; so würde er selbst dazu haben dienen können, alle Widerstandsmessungen auf absolutes Maass zu reducieren, ohne dass eine Wiederholung der Originalmessung nöthig gewesen wäre, so lange man auf die Unveränderlichkeit des Etalons bauen durfte. Jener Draht war aber nicht zu diesem Zwecke bestimmt, und es war seine Benutzung zu der vorliegenden Untersuchung nur für kurze Zeit verstattet. Sollte daher der Nutzen, welchen die gewonnenen Resultate auf die Dauer für künftige Maassbestimmungen des Widerstands haben konnten, nicht verloren gehen, so mussten Copien vom Drahte A gemacht werden, deren gleicher Widerstand verbürgt war, oder Etalons, deren Widerstand mit dem Widerstande A genau verglichen war. Es können nun zunächst zu solchen Etalons die oben angeführten drei Kupferdrähte a, b, c dienen, welche als Hülfsdrähte zur Vergleichung der Widerstände A und B gebraucht worden sind, und deren Widerstandsverhältniss zu A aus den obigen Beobachtungen abgeleitet werden kann. Denn nach den obigen Beobachtungen war

$$\log \frac{B}{c} = 0{,}01851$$
$$\log \frac{b}{B+c} = 0{,}01493$$
$$\log \frac{a}{B+b+c} = 0{,}00325.$$

Fügt man nach Obigem noch hinzu:

$$\log \frac{A}{B} = 0{,}86465$$
$$\log A = 11{,}27882$$

so ergeben sich hieraus die Widerstände der drei Kupferdrähte a, b, c nach absolutem Maasse, nämlich:

$$a = 10420 \, . \, 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$$
$$b = 5260 \, . \, 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$$
$$c = 2487 \, . \, 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

Diese so bestimmten drei Widerstands-Etalons sind mit der angegebenen Bezeichnung und dem beigefügten Widerstandswerthe in der Instrumentensammlung des physikalischen Instituts der Universität Leipzig niedergelegt worden.

Da nun aber mit dem von Jacobi aufgestellten Widerstands-Etalon schon viele Widerstandsmessungen gemacht und Copien desselben verbreitet worden sind, so erschien es für praktische Anwendungen am bequemsten, den Werth dieses Etalons nach absolutem Maasse zu bestimmen, was sich leicht durch eine Vergleichung des Widerstands dieses Etalons mit dem Widerstande des oben mit c bezeichneten Kupferdrahtes erreichen liess. Auch diese Vergleichung wurde nicht unmittelbar ausgeführt, sondern durch einen vierten Kupferdraht d vermittelt.

Es ist S. 214 der Widerstand einer Copie des Jacobi'schen Etalons J mit dem Widerstande des Originals verglichen worden. Die Vergleichung derselben Copie mit einer anderen findet man in Beilage C. Es ergiebt sich daraus der Widerstand

der ersten	=	0,9815 . J
der zweiten	=	0,9839 . J
in Summa	=	1,9654 . J

Die Vergleichung dieses Widerstands mit dem des Drahtes d, nach der Beilage C beschriebenen Methode, ergab für d:

$$d = 1{,}1295 \, . \, 1{,}9654 \, . \, J = 2{,}220 \, . \, J$$

Die Vergleichung dieses letzteren Widerstands nebst dem der beiden Copien mit dem des Drahtes c ergab aber für c

$$c = 0{,}993 \;.\; (2{,}220 + 1{,}9654) \;.\; J = 4{,}156 \;.\; J$$

folglich, da c nach absolutem Maasse $2487 \;.\; 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$ ist,

$$J = 598 \;.\; 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}} = 807 \frac{\text{Meile}}{\text{Secunde}} \;.$$

Herr Inspector Leyser in Leipzig hat eine Anzahl Copien des Jacobi'schen Etalons dargestellt, deren Widerstand nach genauer, von Herrn Dr. Quintus Icilius ausgeführter Prüfung sowohl in Theilen des Jacobi'schen als des absoluten Maasses angegeben ist.

23.

Ueber Neumanns Inductions-Constante und Kirchhoffs Bestimmung derselben.

In Poggendorffs Annalen 1849. Bd. 76. S. 412 ff. ist soeben eine Abhandlung des Hrn. Dr. G. Kirchhoff in Berlin erschienen: „Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducierter elektrischer Ströme abhängt".

Herr Kirchhoff sagt: „Die mathematischen Gesetze der inducierten elektrischen Ströme sind von Neumann und Weber aufgestellt worden; in dem Ausdrucke, den beide für die Intensität eines inducierten Stromes gefunden haben, kommt ausser Grössen, die in jedem gegebenen Falle gemessen werden müssen, eine Constante vor, die ein für alle Mal durch Versuche ermittelt werden muss, und die Neumann durch ε bezeichnet. Diese zu bestimmen habe ich unternommen."

Diese von Kirchhoff bestimmte Constante ε steht nun in einer einfachen Relation zu dem von ihm gebrauchten Widerstandsmaasse und zu dem oben definierten absoluten Widerstandsmaasse, welche auf folgende Weise ausgesprochen werden kann.

Nach den oben festgesetzten Maassen für Stromintensitäten, elektromotorische Kräfte und für Widerstände hat man für die Stromintensität i, welche durch die elektromotorische Kraft e in einen geschlossenen Leiter, dessen Widerstand w ist, hervorgebracht wird, folgende Gleichung:

$$i = \frac{e}{w},$$

Führt man nun andere Maasse ein, die sich zu jenen absoluten verhalten wie:

$$a : 1$$
$$b : 1$$
$$c : 1$$

und bezeichnet mit i', e', w' obige drei nach den neuen Maassen ausgedrückte Grössen, so erhält man

$$ai' = i,\ be' = e,\ cw' = w$$

folglich

$$ai' = \frac{be'}{cw'}.$$

Eine genauere Prüfung und Vergleichung derjenigen Maasse, welche dem Neumann'schen Ausdrucke für die Intensität eines inducierten Stroms und Kirchhoffs Rechnung zum Grunde liegen, mit obigen Maassen ergiebt, wenn Millimeter und Secunde als Raum- und Zeitmaass der Geschwindigkeitsmessung zum Grunde gelegt werden,

$$a = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ und } b = \sqrt{2}$$

und man hat also hiernach

$$i' = \frac{2e'}{cw'}$$

wofür man auch schreiben kann

$$i' = \frac{\frac{2}{c}e'}{w'}.$$

Der constante Coefficient $\frac{2}{c}$, mit welchem in diesem Ausdrucke des inducierten Stroms die elektromotorische Kraft e' multipliciert ist, ist nun die von Neumann und Kirchhoff mit ε bezeichnete Constante. Zugleich ersieht man aus der gegebenen Darstellung, dass $c = \frac{2}{\varepsilon}$ die Zahl ist, welche angiebt, um wie viel Mal das gewählte Grundmaass des Widerstandes grösser ist, als das Art. 10 definierte absolute Widerstandsmaass. Wählt man z. B. ein solches Grundmaass, für welches die Inductions-Constante $\varepsilon = 1$ ist, so verhält sich dieses Grundmaass zu dem Art. 10 definierten wie 2 : 1. Nun findet Kirchhoff aus seinen Beobachtungen: „Es ist die Constante $\varepsilon = 1$, wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 1000 Fuss in der Secunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahts von einer Quadratlinie Querschnitt und 0,434 Zoll Länge annimmt." Diesen Angaben liegt das preussische Längenmaass zum Grunde. In Metermaass übersetzt heisst dies: Es ist die Constante $\varepsilon = 1$, wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 313853 Millimeter in der

Secunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahtes von 4,75 Quadratmillimeter Querschnitt und 11,35 Millimeter Länge annimmt.

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass $\varepsilon = 1$ bleibt, so lange als das hier angegebene Verhältniss der beiden Maasse, des Geschwindigkeitsmaasses und des Widerstandsmasses, unverändert bleibt. Es ist daher die Constante $\varepsilon = 1$, auch wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahtes von 4,75 . 313853 Quadratmillimeter Querschnitt und 11,35 Millimeter Länge wählt.

Da nun dann für $\varepsilon = 1$, $c = 2$ ist, so ergiebt sich, dass dieses Maass des Widerstands 2 Mal grösser ist, als das Art. 10 definierte absolute Maass des Widerstands.

Aus Kirchhoffs Beobachtungen ergiebt sich also nach der angegebenen Reduction das Art. 10 definierte Maass des absoluten Widerstands gleich dem Widerstande eines Kupferdrahtes von 4,75 . 313853 Quadratmillimeter Querschnitt und 5,675 Millimeter Länge, oder von 262752 Quadratmillimeter Querschnitt bei 1 Millimeter Länge.

Aus den in dieser Abhandlung mitgetheilten Beobachtungen hat sich dagegen nach Art. 22 ergeben, dass der Jacobi'sche Kupferdraht bei $0,3335^2 . \pi$ Quadratmillimeter Querschnitt und 7619,75 Millimeter Länge einen $598 . 10^7$ Mal grösseren Widerstand besass, als das Artikel 10 definierte absolute Widerstandsmaass, und dass folglich von diesem Kupfer der Widerstand eines Kupferdrahtes von $0,3335^2 . 598 . 10^7 . \pi$ Quadratmillimeter Querschnitt und 7619,75 Millimeter Länge oder der Widerstand eines Kupferdrahtes von 274250 Quadratmillimeter Querschnitt bei 1 Millimeter Länge dem Widerstandsmaasse gleich sei.

Die Uebereinstimmung dieser beiden auf ganz verschiedenen Wegen erhaltenen Angaben kann nicht grösser erwartet werden, wenn man beachtet, dass die Drähte von Jacobi und von Kirchhoff von verschiedenem Kupfer gemacht waren, und dass in der Leitungsfähigkeit oder in dem Widerstandscoefficienten des Kupfers oft noch weit grössere Differenzen vorkommen. Setzt man die Differenz der beiden Angaben bloss auf Rechnung der Verschiedenheit des Kupfers, so ergiebt sich, dass das von Jacobi gebrauchte Kupfer eine etwas geringere Lei-

tungsfähigkeit oder einen etwas grösseren Widerstandscoefficienten besass, als das von Kirchhoff gebrauchte. Auch ich habe den Widerstandscoefficienten des von mir gebrauchten Kupfers kleiner, als den des von Jacobi gebrauchten gefunden, und der Unterschied war sogar noch beträchtlich grösser, als bei dem von Kirchhoff gebrauchten Kupfer. Eine unmittelbare Vergleichung des Widerstands des Kirchhoff'schen Drahtes mit dem Jacobi'schen Grundmaasse würde daher von besonderem Interesse sein zur genauern Vergleichung der Resultate beider Messungen.

III.

BEISPIELE DER ANWENDUNG DES ABSOLUTEN WIDERSTANDSMAASSES.

24.

Anwendung des Widerstandsmaasses zur Messung galvanischer Ströme bei technischer Benutzung derselben.

Für die technischen Anwendungen des Galvanismus, z. B. zu chemischen Zwecken und zur Galvanoplastik, fehlt es oft an einfachen und allgemein verständlichen Vorschriften. Jeder Techniker ist daher genöthigt, durch eigene Versuche die Verhältnisse zu erproben, welche günstige Resultate geben. Der dadurch verursachte Zeit- und Kostenaufwand erschwert diese Anwendungen des Galvanismus besonders bei grösseren Unternehmungen. Solche Vorschriften fehlen aber nicht sowohl darum, weil noch keine genügenden Erfahrungen gemacht wären, als vielmehr weil die Resultate der gemachten Erfahrungen sich nicht einfach und bestimmt aussprechen lassen; denn blosse Beschreibungen des Verfahrens genügen dazu nicht. Nur durch galvanische Maassbestimmungen ist es möglich, die Resultate der gemachten Erfahrungen mit wenigen Worten und Zahlen allgemein verständlich darzulegen und bestimmte und genaue Vorschriften zum künftigen Gebrauche zu geben, und ebenso nothwendig sind die galvanischen Maassbestimmungen in der Anwendung, um sich der Erfüllung der vorgeschriebenen Regeln zu versichern.

Es handelt sich dabei um die Wirksamkeit des galvanischen Stroms, die aber nach Verschiedenheit der Umstände sehr verschieden zu bemessen ist. Oft ist es die blosse Stromintensität, um welche es sich handelt, z. B. bei galvanoplastischen Niederschlägen. Oft ist aber die Stromintensität nur der eine Factor der fraglichen Wirksamkeit, deren anderer Factor die Länge des Leiters ist, welcher diesen Strom führt, z. B. wenn der Leiter um einen Eisenstab geht, welcher in einen Elektromagnet verwandelt werden soll. Endlich kommt auch der Fall vor, dass von dieser Länge des Leiters, durch welchen der Strom geführt wird, jeder Theil mit einem besonderen Werthe für die fragliche Wirksamkeit in Betracht zu ziehen ist, z. B. bei einem Multiplicator, dessen verschiedene Windungen eine verschieden günstige Lage gegen die Magnetnadel haben.

Der einfachste und für die technische Anwendung wichtigste Fall ist der erste, wo die fragliche Wirksamkeit bloss von der Stromintensität abhängt. Die Errichtung galvanischer Werkstätten und die mannigfaltigen darin auszuführenden Arbeiten würden sehr erleichtert und gefördert werden, wenn die für jeden Zweck günstigste Stromintensität genau ermittelt und bequeme Mittel an die Hand gegeben würden, zur Prüfung, ob bei der Ausführung diese Stromintensität stattfinde.

Was die Erforschung und genaue Bestimmung der günstigsten Stromintensitäten betrifft, so bietet das von Faraday zu diesem Zwecke angegebene Voltameter, wo die durch die Zersetzung des Wassers in einer bestimmten Zeit erzeugte Menge Gas diese Intensität anzeigt, ein sehr einfaches Mittel dazu dar, dessen Gebrauch daher nicht genug empfohlen werden kann. Nur ist dasselbe bei schwachen Strömen, wo die Wasserzersetzung sehr langsam geschieht, nicht anwendbar. Ausserdem würde das Voltameter in der gewöhnlichen Praxis, wenn es zur Prüfung der vorschriftsmässigen Stromintensität fortwährend gebraucht werden sollte, nicht immer bequem sein, weil die Zeit als ein wesentliches Element dabei gemessen werden muss. Endlich muss das Voltameter fortwährend in der Kette eingeschaltet bleiben, weil die Stromintensität bei Wegnahme desselben nicht mehr die gemessene bleibt, sondern viel stärker wird. Die mit der Einschaltung verbundene Schwächung des Stroms kann aber in manchen Fällen sehr unvortheilhaft sein. In allen Fällen, wo aus den angeführten Gründen der Ge-

brauch des Voltameters nicht praktisch ist, kann dessen Stelle durch eine Tangenten-Boussole ersetzt werden, die in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 85 f. beschrieben und deren Gebrauch zu Intensitätsmessungen daselbst durch Beispiele erläutert worden ist. Es sind dort auch die Angaben der Tangenten-Boussole auf Angaben des Voltameters zurückgeführt und beide unter einander vergleichbar gemacht worden. Jede Einheit der nach dieser Vorschrift mit der Tangenten-Boussole gemessenen Stromintensität zersetzt in 1 Secunde 0,009376 oder in 1 Min. 46⅔ Sec. 1 Milligramm Wasser im Voltameter, (etwa 1 Gran in ½ Stunde). Zum Gebrauche der Tangenten-Boussole ist keine Uhr nöthig und die Einschaltung oder Ausschliessung des Instruments aus der Kette hat auf die Stromintensität keinen merklichen Einfluss.

Ein drittes praktisches Hülfsmittel zur Bestimmung der Stromintensität bietet endlich die Widerstandsmessung dar. Die Stromintensität hängt von zweierlei ab, von der elektromotorischen Kraft und von dem Widerstande der Kette, wovon bei technischem Gebrauche in der Regel nur die Veränderlichkeit des letzteren in Betracht kommt. Denn in der Regel wird bei technischen Anstalten immer die nämliche Gattung von Bechern gebraucht, deren elektromotorische Kraft mit einer für praktische Zwecke genügenden Schärfe ein für alle Mal bestimmt sein kann. Der von diesen Bechern ausgehende Strom wird dagegen bald durch mehr, bald durch weniger Gefässe und durch verschiedene Flüssigkeiten geleitet, wodurch der Widerstand sich sehr ändert.

Setzt man die Kenntniss der elektromotorischen Kraft E voraus, und kommt es also nur noch auf die Messung des Widerstands an, so kann jedes beliebige Galvanometer zur Bestimmung der Stromintensität gebraucht werden, wenn man sich dabei eines nach absolutem Maasse bekannten Widerstandsetalons w bedient. Denn bezeichnet a die Angabe des Galvanometers, wenn dieser Etalon von der Kette ausgeschlossen ist, und b, wenn derselbe eingeschaltet wird, so ist dadurch der Widerstand der Kette nach absolutem Maasse W bestimmt, nämlich:

$$W = \frac{bw}{a-b}$$

und die Stromintensität ergiebt sich dann einfach:

$$\frac{E}{W} = \frac{a-b}{bw} \cdot E.$$

25.

Anwendung des Widerstandsmaasses zur Messung elektromotorischer Kräfte nach absolutem Maasse.

Die letzte Bemerkung im vorigen Artikel führt zu einer weiteren Anwendung, welche man von einem nach absolutem Maasse bekannten Widerstandsetalon machen kann. Denn aus dem Gesagten folgt, dass, wenn man sich statt eines beliebigen Galvanometers einer Tangenten-Boussole oder Voltameters, oder irgend eines andern Instrumentes, bedient, mit welchem man die Stromintensität nach absolutem Maasse bestimmen kann, auf dem angegebenen Wege die elektromotorische Kraft E selbst nach absolutem Maasse gefunden werde, wenn sie noch unbekannt ist. Denn bezeichnet man die nach absolutem Maasse gemessene Stromintensität mit α, wenn der Widerstandsetalon aus der Kette ausgeschlossen ist, mit β, wenn er eingeschaltet wird, so ergiebt sich eben so, wie vorher, der Widerstand W der Kette nach absolutem Maasse:

$$W = \frac{\beta w}{\alpha - \beta}$$

und daraus die elektromotorische Kraft E nach absolutem Maasse:

$$E = \alpha W = \frac{\alpha\beta w}{\alpha - \beta} .$$

Man ersieht daraus zum Beispiel, wie die elektromotorischen Kräfte galvanischer Becher auf diese Weise nach demselben absoluten Maasse bestimmt werden können, wie die elektromotorischen Kräfte, welche der Erdmagnetismus auf geschlossene Ketten, während sie bewegt werden, ausübt. Es ist aber wichtig, elektromotorische Kräfte, welche aus so verschiedenen Quellen entspringen, wie die hydroelektrischen und magnetoelektrischen Kräfte, nach gleichem Maasse zu messen, weil dadurch der Weg zur comparativen Erforschung dieser Quellen selbst gebahnt wird. Es ist das bei Anwendung eines Leiters von bekanntem absoluten Widerstande leicht und einfach, ohne einen solchen Leiter aber mit grossen Schwierigkeiten verbunden, wie zum Beispiel, wenn die Vergleichung auf folgende Weise geschehen sollte.

Der galvanische Becher, dessen elektromotorische Kraft, ohne einen Leiter von bekanntem absoluten Widerstande anzuwenden, mit einer magnetoelektrischen Kraft verglichen werden soll, sei durch einen Lei-

ter von beliebiger Länge und Gestalt geschlossen und sammt demselben drehbar. Bei der Drehung entsteht dann ein zweiter Strom in der Kette, nämlich ausser dem Strome, welcher von der elektromotorischen Kraft des Bechers selbst entspringt, noch ein anderer Strom, welcher von der elektromotorischen Kraft des Erdmagnetismus herrührt. Man hat es in seiner Gewalt, durch die Richtung der Drehung zu bewirken, dass die Richtung beider Ströme in der Kette entgegengesetzt sei. Durch die Geschwindigkeit der Drehung kann man andererseits die Intensität beider Ströme wenigstens für einen kleinen Zeitraum gleich machen, wo sich dann beide Ströme für diesen Zeitraum annulliren. Sind aber die Intensitäten beider Ströme gleich, so folgt daraus für diesen Fall die Gleichheit der elektromotorischen Kräfte, d. h. die Gleichheit der elektromotorischen Kraft des Bechers mit der elektromotorischen Kraft des Erdmagnetismus. Die letztere ist durch den bekannten Werth des Erdmagnetismus und durch die Form und Drehung der geschlossenen Kette nach absolutem Maasse unmittelbar gegeben; folglich wird dadurch zugleich auch die elektromotorische Kraft des Bechers nach demselben Maasse gefunden. Es leuchtet aber von selbst ein, dass die Vergleichung dieser Kräfte auf die oben angegebene Weise mit Hülfe des absoluten Widerstandsmaasses viel einfacher und leichter erhalten wird.

IV.

ÜBER DIE PRINCIPIEN VERSCHIEDENER ABSOLUTER MAASS-SYSTEME IN DER ELEKTRODYNAMIK.

26.

Selbstständige Begründung der absoluten Maasse in der Elektrodynamik, ohne auf die magnetischen Maasse Bezug zu nehmen.

Wie für die Grösse der Geschwindigkeiten kein eigenes Grundmaass aufgestellt zu werden braucht, wenn solche Maasse für Raum und Zeit schon gegeben sind, eben so braucht, wie wir gesehen haben, für die Grösse der galvanischen Widerstände kein eigenes Grundmaass aufgestellt zu werden, wenn schon Maasse für die Grösse der

elektromotorischen Kräfte und der Stromintensitäten gegeben sind. Aber auch für die beiden letzteren Grössenarten brauchen keine eigenen Grundmaasse angenommen zu werden, sondern es können auch dafür absolute Maasse gegeben werden, welche nach den Art. 10 gegebenen Definitionen durch Vermittelung der magnetischen Maasse auf die drei Grundmaasse der Mechanik zurückgeführt worden sind.

Für die meisten elektrodynamischen Messungen ist es nun zwar genügend und bequem, die Maasse für die elektrodynamischen Grössen auf die festgestellten magnetischen Maasse so zu reducieren, wie es Art. 10 geschehen ist. Die Abhängigkeit, in welcher hierdurch die elektrodynamischen Maasse von den magnetischen gebracht werden, ist aber in der Sache selbst keineswegs begründet, wie aus der Unabhängigkeit der elektrodynamischen Grundgesetze von den magnetischen von selbst einleuchtet. Die elektrodynamischen Maasse lassen sich vielmehr noch auf andere Weise begründen, wodurch sie von der Begründung der magnetischen Maasse ganz unabhängig werden. Es ist dazu bloss nöthig, statt von den Grundgesetzen des Elektromagnetismus und der Magneto-Elektricität auszugehen, wie es Art. 10 geschehen ist, auf die Grundgesetze der Elektrodynamik und Volta-Induction zurückzugehen.

Das Grundgesetz der Elektrodynamik giebt folgende Formel für die Grösse der Abstossungskraft zweier Stromelemente α, α' mit den Stromintensitäten i, i' aus der Entfernung r, welche mit den beiden Stromrichtungen die Winkel θ, θ' macht, während der Winkel der beiden Stromrichtungen $= \varepsilon$ ist, nämlich:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, ii' \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).$$

Das Grundgesetz der Volta-Induction, wie es Art. 30 der ersten Abhandlung über «Elektrodynamische Maassbestimmungen» angegeben worden ist, giebt folgende Formel für die von einem Stromelemente α mit der Stromintensität i auf ein anderes Element α' aus der Entfernung r ausgeübte elektromotorische Kraft, wenn r mit der Stromrichtung und mit der Richtung, nach welcher α' mit der Geschwindigkeit v verschoben wird, die Winkel θ und θ' macht, die beiden letzteren Richtungen gegen einander den Winkel ε:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, vi\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right) - \frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cdot\frac{di}{dt}$$

Diese nach der Richtung r wirkende Kraft ist nach der Richtung von α' zu zerlegen, weil die gegen α' senkrechte Componente aufgehoben wird. Bezeichnet η den Winkel, welchen α' mit r macht, so ist obige Formel also mit cos η zu multiplicieren.

Auf diese Grundgesetze lässt sich nun **erstens** ein absolutes Maass der **Stromintensität**, unabhängig von den magnetischen Maassen, auf folgende Weise begründen:

> Das Maass der Stromintensität ist diejenige Stromintensität, welche ein Strom besitzt, der — indem er eine dem Flächenmaasse gleiche Ebene umläuft und auf einen gleichen Strom, der eine eben solche Ebene umläuft, aus einer grossen Entfernung R wirkt, und bei rechtwinkeliger Lage beider Ebenen, bei welcher die verlängerte erste Ebene die zweite halbirt — auf den letzteren Strom ein Drehungsmoment ausübt, welches sich zur Einheit des Drehungsmoments wie $1 : 2R^3$ verhält.

Dieses neue **absolute** Maass der Stromintensität lässt sich noch einfacher definieren, wenn dabei gestattet wird, statt auf die Wechselwirkung geschlossener Ströme auf die Wechselwirkung einzelner Stromelemente zurückzugehen, welche sich nicht unmittelbar beobachten lässt, weil solche Stromelemente nur als Theile geschlossener Ströme vorkommen, nämlich:

> Das Maass der Stromintensität ist diejenige Stromintensität, welche ein Stromelement besitzt, wenn es auf ein gleiches, paralleles und auf der Verbindungslinie senkrechtes Stromelement aus einer dem Längenmaasse gleichen Entfernung eine Anziehungskraft ausübt, welche sich zum Kraftmaasse verhält, wie das Quadrat der Länge jener Stromelemente zum Flächenmaasse.

Dieses zweite **absolute** Maass der Stromintensität ist dem ersten, von den magnetischen Maassen abhängigen, nicht gleich, sondern verhält sich dazu wie $1 : \sqrt{2}$.*)

---

*) Die Ableitung der oben aufgestellten Definitionen aus dem Grundgesetze der Elektrodynamik ist folgende. **Erste Definition.** Es ist schon Art. 9 der früheren Abhandlung «**Elektrodynamische Maassbestimmungen**» Leipzig, 1846. an-

Zweitens, das Maass der elektromotorischen Kraft wird auf folgende Weise auf das angeführte Grundgesetz der Volta-Induction, unabhängig von den magnetischen Maassen, begründet.

---

gegeben worden, wie aus dem Grundgesetze der Elektrodynamik folgender Ausdruck des von einem Planstrome auf einen andern in der Ferne ausgeübten Drehungsmoments hergeleitet werde, nämlich:

$$\frac{1}{2}\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3}\sin\vartheta\,.\,\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

wo i, i' die Stromintensitäten, λ, λ' die umströmten Ebenen, r den Abstand ihrer Mittelpunkte, ψ den Winkel der Normale des ersten Planstroms mit r, ϑ den Winkel bezeichnet, welchen die Normale des zweiten Planstroms mit der Directionskraft einschliesst. Die Directionskraft aber ist in der durch die Normale des ersten Planstroms A und durch den Mittelpunkt des zweiten Planstroms C gelegten Ebene enthalten und ist in dem bei C rechtwinkeligen Dreiecke ACB, dessen Hypotenuse AB die Normale des Planstroms A ist, derjenigen Linie CD parallel, welche die Dreieckseite AB in D so schneidet, dass $AD : DB = 1 : 2$. — Unter den in der ersten Definition bezeichneten Verhältnissen ist nun $i = i'$, $\lambda = \lambda' = 1$, $\vartheta = \psi = \frac{\pi}{2}$, $r = R$, wonach das Drehungsmoment den Werth

$$\frac{ii}{2R^3}$$

erhält, welcher zur Einheit des Drehungsmoments sich verhält wie $1 : 2R^3$, wenn $i = 1$ ist.

Zweite Definition. In dem durch das Grundgesetz der Elektrodynamik unmittelbar gegebenen Ausdrucke der Anziehungskraft zweier Stromelemente

$$\frac{\alpha\alpha'}{rr}\,ii'(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')$$

ist für die in der Definition bezeichneten Verhältnisse $i = i'$, $\alpha = \alpha'$, $\theta = \theta' = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = 0$, $r = 1$, wodurch die Anziehungskraft den Werth

$$\alpha\alpha ii$$

erhält, welcher sich zum Kraftmaasse verhält, wie $\alpha\alpha : 1$, wenn $i = 1$ ist.

Es ist noch übrig, nachzuweisen, dass das zweite hier aufgestellte absolute Maass der Stromintensität zu dem ersten, von dem magnetischen Maasse abhängigen, sich verhalte, wie $1 : \sqrt{2}$. — Es ist schon in Art. 9 a. a. O., bekannten Gesetzen gemäss, der Ausdruck des von einem Magnet m auf einen andern m' in der Ferne r ausgeübten Drehungsmoments angegeben worden, nämlich:

$$\frac{mm'}{r^3}\sin\vartheta\,.\,\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

wo ψ und ϑ die angeführte Bedeutung haben, wenn man darin die Normalen der beiden Planströme mit den Axen der beiden Magnete vertauscht. Bezeichnet man nun, zur Unterscheidung der beiden Maasse der Stromintensität, mit K das erste, von den magnetischen Maassen abhängige, mit J das zweite, so seien kK und $k'K$ zwei bestimmte, nach dem erstern Maasse ausgedrückte, Stromintensitäten, und iJ und $i'J$ seien die nämlichen Stromintensitäten, nach dem zweiten Maasse ausgedrückt, folglich:

$$iJ = kK \text{ und } i'J = k'K.$$

Dem Grundgesetze des Elektromagnetismus gemäss bleibt dann obiges Drehungs-



Das Maass der elektromotorischen Kraft ist diejenige elektromotorische Kraft, welche ein Strom, der eine dem Flächenmaasse gleiche Ebene umläuft, auf einen eine gleiche, auf jene senkrechte und von ihr halbierte, Ebene begrenzenden Leiter aus der grossen Entfernung R ausübt, wenn seine Intensität zu dem aufgestellten absoluten Maasse sich verhält, wie $2R^3 : 1$, während der Leiter mit der Einheit der Drehungsgeschwindigkeit um die Durchschnittslinie beider Ebenen gedreht wird.

Wird es gestattet, auf die elektromotorische Kraft einzelner Stromelemente zurückzugehen, so lässt sich diese Definition einfacher auf folgende Weise fassen:

Das Maass der elektromotorischen Kraft ist diejenige elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement auf ein gleich langes, darauf senkrechtes, der Verbindungslinie paralleles Leiterelement aus einer dem Längenmaasse gleichen Entfernung ausübt, wenn seine Intensität zu dem aufgestellten absoluten Maasse sich verhält, wie das Flächenmaass zum Quadrat der Länge jener Elemente, während das Leiter-Element mit der Einheit der Geschwindigkeit der Stromrichtung entgegengesetzt parallel verschoben wird. *)

---

moment unverändert, wenn man für den Magnet m den Strom kK setzt, welcher eine Ebene $\lambda = \frac{m}{k}$ umläuft. Setzt man auf gleiche Weise für den Magnet m' den Strom $k'K$, welcher eine Ebene $\lambda' = \frac{m'}{k'}$ umläuft, so erhält man das von dem ersten Planstrome auf den zweiten ausgeübte Drehungsmoment,

$$-\frac{kk'\lambda\lambda'}{r^3} \sin \delta \, . \, \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)}$$

Für dieses Drehungsmoment ist oben aber folgender Werth gefunden worden:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3} \sin \delta \, . \, \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)}.$$

woraus $\frac{1}{2} ii' = kk'$ folgt, d. i., wenn $k = k'$, $i = i'$,

$$i = k\sqrt{2}.$$

Hiernach ergiebt sich aus der Gleichung $iJ = kK$

$$J : K = 1 : \sqrt{2}.$$

*) Um die erste dieser beiden neuen Definitionen eines absoluten Maasses der elektromotorischen Kraft aus dem allgemeinen Gesetze der Volta-Induction abzuleiten, beachte man zunächst, dass der inducierende Strom i in dieser Definition constant genommen ist, also $\frac{di}{dt} = 0$, wodurch der allgemeine Ausdruck der nach der Richtung r wirksamen elektromotorischen Kraft auf folgenden reduciert wird:

$$-\frac{aa'}{rr} v i (\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \theta \cos \theta').$$

Wie nun aber aus dem ähnlichen Ausdrucke der Abstossungskraft zweier Stromelemente

$$-\frac{aa'}{rr} ii' (\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \theta \cos \theta')$$

Dieses zweite **absolute** Maass der elektromotorischen Kraft ist dem ersten, von den magnetischen Maassen abhängigen, nicht gleich, sondern verhält sich dazu, wie $\sqrt{2} : 1$.

---

sich die Richtung und die Grösse der Kraft ergeben hat, welche ein Strom i, welcher die Ebene λ umläuft, auf das Stromelement α' ausübt, nämlich erstens die Richtung als senkrecht gegen die durch die Stromrichtung i' und die Directionskraft gelegte Ebene (die Directionskraft ist in der durch die Normale des inducierenden Planstroms A und durch den Mittelpunkt des inducierten Elements C gelegten Ebene enthalten, und ist in dem bei C rechtwinkeligen Dreiecke ACB, dessen Hypotenuse AB die Normale des Planstroms A ist, derjenigen Linie CD parallel, welche die Dreieckseite AB in D so schneidet, dass $AD : DB = 1 : 2$); zweitens die Grösse der Kraft

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda\alpha'}{r^3} ii' \sin \vartheta \,.\, \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)}$$

wo ψ den Winkel der Normale des Planstroms mit r, ϑ den Winkel bezeichnet, welchen die Stromrichtung in α' mit der Directionskraft macht —; auf ähnliche Weise ergiebt sich auch aus dem vorhergehenden Ausdrucke der elektromotorischen Kraft, welche ein Stromelement auf ein Leiter-Element nach Richtung der sie verbindenden Geraden ausübt, die Richtung und die Grösse der elektromotorischen Kraft, welche der ganze, die Ebene λ umlaufende, Strom i auf das Leiter-Element α' ausübt, nämlich erstens die Richtung senkrecht gegen die durch die Bahn, in welcher α' verschoben wird, und durch die Richtung der Directionskraft gelegte Ebene, zweitens die Grösse

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda\alpha'}{r^3} vi \sin \vartheta \,.\, \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)}$$

wo ψ den Winkel der Normale des Planstroms mit r, ϑ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung, nach welcher α' verschoben wird, mit der Directionskraft macht. (S. Art. 9 a. a. O. S. 264 in der Note, wobei zu bemerken ist, dass dort ε die nämliche Bedeutung hat, wie hier ϑ, dass aber in der Formel für die Kraft, welche ein Planstrom auf das bewegte Element eines Leiters ausübt, der von der Richtung der Bewegung dieses Elements abhängige Factor $\sin \varepsilon$ aus Versehen weggelassen worden ist.)

Gehört nun ferner auch das Leiter-Element α' der Begrenzung einer Ebene λ' an, deren Normale der Richtung, nach welcher die Leiter-Elemente (in Folge einer Drehung des Leiters um eine seine Ebene halbierende Axe) verschoben werden, parallel ist und also mit der Directionskraft den Winkel ϑ macht: so zerlege man jedes Element α' der Begrenzungslinie in zwei Elemente ds und $d\sigma$, das eine parallel der Linie, in welcher eine auf die Directionskraft CD normale Ebene die Ebene des Leiters schneidet, das andere senkrecht auf dieser Schneidungslinie. Die ersteren Elemente kann man paarweise von gleicher Länge $ds = ds'$ ordnen und durch Perpendikel x auf jener Schneidungslinie verbinden. Bezeichnet man mit a, b, c die Abstände der Elemente ds und ds' und des Durchschnittspunkts des Perpendikels x mit der Drehungsaxe von jener Schneidungslinie, und ferner mit γ die Drehungsgeschwindigkeit und mit ϑ' den Winkel der die Ebene des Leiters halbierenden Drehungsaxe mit jener Schneidungslinie, so ist, wenn v und v' die Geschwindigkeiten bezeichnen, mit welcher die Elemente ds und ds' verschoben werden,

Drittens leuchtet von selbst ein, dass nun auch die Begründung des dritten elektrodynamischen Maasses, nämlich des Widerstandes, unabhängig von den magnetischen Maassen gemacht wird,

---

$$a - b = x$$
$$(a - c)\,\gamma \cos \delta' = v$$
$$(b - c)\,\gamma \cos \delta' = v'.$$

Beachtet man ferner, dass die oben angegebene Richtung der elektromotorischen Kraft mit dem einen Elemente ds direct parallel, mit dem andern ds' entgegengesetzt parallel ist, und dass die Länge $ds = ds'$, so erhält man die nach der Richtung beider Elemente zerlegten elektromotorischen Kräfte:

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3} \sin \delta \,.\, \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)} \,.\, \gamma \cos \delta' \,.\, (a - c)\, ds$$

$$- \tfrac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3} \sin \delta \,.\, \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)} \,.\, \gamma \cos \delta' \,.\, (b - c)\, ds$$

folglich ihre Summe:

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3} \cdot \gamma \cos \delta' \sin \delta \,.\, \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)} \,.\, x\, ds.$$

Hieraus folgt endlich die Summe aller auf die mit obiger Schneidungslinie parallelen Elemente des geschlossenen Leiters ausgeübten elektromotorischen Kräfte nach der Richtung des Leiters zerlegt:

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3} \cdot \gamma \cos \delta' \sin \delta \,.\, \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)} \,.\, \int x ds,$$

das heisst, da das Integral $\int x ds$ die Grösse der begrenzten Ebene λ' bezeichnet,

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{\lambda\lambda'}{r^3}\, i \gamma \cos \delta' \sin \delta \,.\, \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)}\,.$$

Betrachtet man auf ähnliche Weise die auf alle gegen obige Schneidungslinie senkrechten Elemente $d\sigma$ wirkenden, nach deren Richtung zerlegten elektromotorischen Kräfte, so findet man ihre Summe $= 0$; folglich ist die obige Formel der Ausdruck der ganzen elektromotorischen Kraft, welche der Planstrom auf den geschlossenen Leiter ausübt.

Wendet man nun diesen Ausdruck auf die in der ersten Definition bezeichneten Verhältnisse an, wo nämlich $i = i'$, $\lambda = 1$, $r = R$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, $\varepsilon = \psi = \frac{\pi}{2}$ ist, so ergiebt sich der Werth der elektromotorischen Kraft

$$\frac{i}{2R^3},$$

d. i. $= 1$, wenn $i = 2R^3$ ist.

Zweite Definition. Der oben angeführte allgemeine Ausdruck der elektromotorischen Kraft eines Stromelements auf ein Leiterelement:

$$- \frac{\alpha\alpha'}{rr}\, vi\, (\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \theta \cos \theta') \cos \eta - \tfrac{1}{2}\,\frac{\alpha\alpha'}{r} \cos \theta \cos \eta \,.\, \frac{di}{dt}$$

reduciert sich in der Anwendung auf die in der zweiten Definition des absoluten Maasses der elektromotorischen Kraft bezeichneten Verhältnisse, wo $\alpha = \alpha'$, $\varepsilon = \eta = 0$, $\theta = \theta' = \frac{\pi}{2}$, $r = 1$, $v = -1$, $\frac{di}{dt} = 0$, auf den Werth:

$$\alpha\alpha i,$$

d. i. auf die Einheit, wenn die Intensität des inducierenden Stroms i zum festgesetzten Maasse der Intensität sich verhält, wie $1 : \alpha\alpha$.

Das Verhältniss endlich dieses zweiten hier aufgestellten absoluten Maasses der elektromotorischen Kraft zu dem ersten, von den magnetischen Maassen abhän-



wenn in der Art. 10 gegebenen Definition die von den magnetischen Maassen abhängigen absoluten Maasse der Stromintensität und der elektromotorischen Kraft mit den neuen, davon unabhängigen Maassen vertauscht werden, wobei übrigens die Definition ganz unverändert bleibt. Es ergiebt sich dann aus den angegebenen Verhältnissen dieser neuen Maasse zu den alten, dass das neue absolute Maass des Widerstands zu dem Art. 10 definierten sich verhält, wie 2 : 1.

---

gigen, ergiebt sich, wie folgt. Setzt man in dem in voriger Note angeführten Ausdruck des Drehungsmoments, welches ein Magnet m auf einen andern m' in der Ferne r ausübt, nämlich:

$$\frac{mm'}{r^3} \sin\delta \,.\, \sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

für den Magnet m' einen Strom $k'K$, welcher die Ebene $\lambda' = \frac{m'}{k'}$ umläuft, so erhält man das auf diesen Strom vom Magnet m ausgeübte Drehungsmoment

$$\frac{m\lambda'}{r^3} k' \sin\delta \,.\, \sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

und hieraus nach den bekannten Relationen, welche zwischen den elektromagnetischen und den magnetoelektrischen Gesetzen stattfinden, und die man am Ende dieser Abhandlung in Beilage D. näher erörtert findet, die elektromotorische Kraft, welche der Magnet m auf den geschlossenen Stromleiter ausübt, indem derselbe mit der Einheit der Geschwindigkeit in der jenem Drehungsmomente entgegengesetzten Richtung gedreht wird, wenn $k' = 1$ gesetzt wird, nämlich:

$$\frac{m\lambda'}{r^3} \sin\delta \,.\, \sqrt{(1+3\cos\psi^2)}.$$

Setzt man hierin endlich auch für den Magnet m einen Strom kK, welcher die Ebene $\lambda = \frac{m}{k}$ durchläuft, so erhält man die elektromotorische Kraft, welche dieser Strom auf jenen geschlossenen Stromleiter ausübt, bei der beschriebenen Drehung desselben,

$$\frac{\lambda\lambda'}{r^3} k \sin\delta \,.\, \sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

nach dem ersten Maasse ausgedrückt, die nach dem zweiten Maasse ausgedrückt

$$\tfrac{1}{2}\frac{\lambda\lambda'}{r^3} i\gamma \cos\delta' \sin\delta \,.\, \sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

war, d. i.

$$\tfrac{1}{2}\frac{\lambda\lambda'}{r^3} i \sin\delta \,.\, \sqrt{(1+3\cos\psi^2)},$$

wenn man beachtet, dass $\gamma = 1$ und $\cos\delta' = 1$ ist.

Bezeichnet man nun, zur Unterscheidung beider Maasse, mit E das erste, mit E' das zweite, und bezeichnet dieselbe elektromotorische Kraft nach beiden Maassen mit eE und $e'E'$: so ergiebt sich, wenn man beachtet, dass $i = k\sqrt{2}$ war,

$$e = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{\lambda\lambda'}{r^3} i \sin\delta \,.\, \sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

$$e' = \tfrac{1}{2} \;\cdot\; \frac{\lambda\lambda'}{r^3} i \sin\delta \,.\, \sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

folglich, da $eE = e'E'$ ist:

$$E' : E = e : e' = \sqrt{2} : 1.$$

27.

Ueber das Verhältniss der absoluten Maasse in der Elektrodynamik zu denen in der Mechanik.

Eine elektromotorische Kraft ist jede Kraft, welche die beiden elektrischen Fluida an einem Orte nach entgegengesetzten Richtungen zu bewegen sucht. Solche Kräfte sind nun aber alle nach dem Grundgesetze der Elektrostatik bestimmten Kräfte; denn alle diese Kräfte sind Anziehungs- und Abstossungskräfte, und zwar ist die nämliche Kraft, welche für das eine elektrische Fluidum eine Anziehungskraft ist, für das andere nothwendig eine Abstossungskraft. Da nun alle Arten von elektromotorischen Kräften unter einander vergleichbar sind und daher alle nach demjenigen Maasse ausgedrückt werden können, nach welchem irgend eine derselben gemessen worden ist, so leuchtet ein, dass alle Arten von elektromotorischen Kräften nach dem in der Elektrostatik für elektrische Kräfte festgesetzten Maasse müssen ausgedrückt werden können, und dass man daher für die elektromotorischen Kräfte keines anderen Maasses als für die elektrostatischen Kräfte bedarf. In der Elektrostatik werden aber die elektrischen Kräfte auch nicht nach einem besonderen Maasse, sondern nach gleichem Masse, wie alle Kräfte in der Mechanik, gemessen, indem diejenige Kraft zum Maasse genommen wird, welche der ponderabelen Masseneinheit, wenn sie darauf wirkt, die Einheit der Beschleunigung ertheilt. Die auf ein elektrisches Theilchen ausgeübte elektrische Kraft ist hiernach $= 1$, wenn der ponderabelen Masseneinheit, an welcher das elektrische Theilchen haftet, die Einheit der Beschleunigung dadurch ertheilt wird. Man sieht hieraus, dass die Feststellung eines eigenen Maasses für die elektromotorischen Kräfte gar nicht nöthig ist, sondern dass dafür das für alle Kräfte in der Mechanik festgestellte Maass genügt.

Eine ähnliche Betrachtung findet Anwendung auf die Intensität elektrischer Ströme, wenn man in der Mechanik diejenige Stromstärke oder Stromintensität zum Maasse nimmt, bei welcher die Masseneinheit irgend einer Flüssigkeit während des Zeitmaasses durch den Querschnitt des Strombettes geführt wird. Da nun die Masseneinheit der elektrischen Flüssigkeiten in der Elektrostatik schon bestimmt ist, näm-

lich als diejenige Masse, welche auf eine ihr gleiche Masse in der Entfernung R eine Kraft ausübt, die sich zum Kraftmaasse verhält, wie $1 : RR$; so leuchtet ein, dass man keines besonderen Maasses für die Intensität elektrischer Ströme bedarf.

Soll nun hiernach der Gebrauch aller besonderen Maasse für die elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten ganz beseitigt werden, so muss eine Regel gefunden werden, nach welcher die nach den bisherigen besonderen Maassen ausgeführten Messungen zu reducieren sind, um sie von diesen besonderen Maassen unabhängig darzustellen.

Um diese Regel zu finden, genügt es nicht, auf die Grundgesetze der Elektrostatik, Elektrodynamik und Induction, sondern es ist nothwendig, auf das allgemeine Grundgesetz der Elektricitätslehre, welches die Elektrostatik, Elektrodynamik und Induction zugleich umfasst und verbindet, zurückzugehen, welches in der früheren Abhandlung »Elektrodynamische Maassbestimmungen« Leipzig, 1846. aufgestellt worden ist. Nach diesem letztern Gesetze wird diese Kraft, welche die elektrische Masse e auf die elektrische Masse e' in der Entfernung r, bei der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ und der relativen Beschleunigung $\frac{ddr}{dt^2}$ ausübt, durch

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc}\,\frac{ddr}{dt^2}\right)$$

dargestellt, wo $\frac{1}{cc}$ der nämliche constante Factor ist, welcher in jener Abhandlung mit $\frac{aa}{16}$ bezeichnet wurde.

Für einen constanten Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$, ist $\frac{ddr}{dt^2} = 0$, folglich die Kraft

$$= \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}\right),$$

woraus sich ergiebt, dass c denjenigen constanten Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ bedeutet, bei welchem zwei elektrische Massen gar keine Wirkung auf einander ausüben.

Nun ist ferner in der angeführten Abhandlung Art. 21 nachgewiesen worden, dass diejenige Zahl i, welche zu dem im vorhergehenden Artikel definierten Maasse J gefügt, irgend eine Stromintensität bestimmt,

$$i = aeu = \frac{4}{c}\cdot eu$$

ist, wo eu die Menge Elektricität bezeichnet, welche bei dieser Stromintensität während des Zeitmaasses durch den Querschnitt des Leiters

geht. Wird nun dieselbe Stromintensität nach dem in der Mechanik festgesetzten allgemeinen Strommaasse K durch

$$kK = iJ$$

ausgedrückt, so ist

$$k = eu = \frac{c}{4} i .$$

Es ergiebt sich hieraus die Regel, nach welcher die nach dem im vorigen Artikel definierten besonderen Maasse ausgeführten Messungen zu reducieren sind, um sie von diesem besonderen Maasse unabhängig zu machen, nämlich: man multipliciere die erhaltenen Werthe mit $\frac{c}{4}$. Man erhält dadurch den Werth der elektrischen Stromstärke nach dem allgemeinen Strommaasse in der Mechanik ausgedrückt.

Eben so ergiebt sich aus Art. 24 der angeführten Abhandlung, dass eine elektromotorische Kraft, welche durch eine Zahl e und durch das im vorigen Artikel definierte besondere Maass E bestimmt ist, nach dem allgemeinen Maasse aller Kräfte in der Mechanik F durch die Zahl f bestimmt werde, so dass $fF = eE$ ist, wenn

$$f = \frac{4}{c} e$$

gemacht wird; denn es ist in dem angeführten Art. 24 folgender Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche ein constanter Strom auf einen bewegten Leiter ausübt, nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik gegeben:

$$f = -\frac{\alpha\alpha'}{rr} i (\cos \varepsilon - \tfrac{3}{2} \cos \theta \cos \theta') . au' \cos \varphi .$$

Unter denjenigen Verhältnissen aber, für welche die hierdurch bestimmte elektromotorische Kraft dem im vorigen Artikel definierten besonderen Maasse gleich wird, ist

$$\frac{\alpha\alpha'}{rr} i = 1 , \varepsilon = 0 , \theta = \tfrac{1}{2}\pi , \varphi = \pi , u' = 1$$

folglich ist, für $e = 1$, $f = a = \frac{4}{c}$, oder allgemein

$$f = \frac{4}{c} e .$$

Es ergiebt sich hieraus die Regel, nach welcher die nach dem im vorigen Artikel definierten besonderen Maasse ausgeführten Messungen elektromotorischer Kräfte zu reducieren sind, um sie von diesem besonderen Maasse unabhängig zu machen, nämlich: man multipliciere die erhaltenen Werthe mit $\frac{4}{c}$. Man erhält dadurch den Werth der elektromotorischen Kraft nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik ausgedrückt.



Soll endlich aus diesen allgemeinen Kraft- und Strommaassen der Mechanik, indem sie für die elektromotorischen Kräfte und elektrischen Ströme gebraucht werden, ein absolutes Widerstandsmaass auf die nämliche Weise wie im vorhergehenden Artikel aus den dort definierten besonderen Maassen abgeleitet werden, so nämlich, dass derjenige Widerstand zum Maasse genommen wird, welchen eine Kette besitzen muss, damit das Maass der elektromotorischen Kraft das Strommaass hervorbringe; so ergiebt sich, wenn w nach dem im vorhergehenden Artikel definierten Maasse den nämlichen Widerstand bezeichnet, welchen v nach dem neuen Maasse, folgende Gleichung:

$$v = \frac{16}{cc} w .$$

Die Geschwindigkeit c, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie auf einander gar nicht wirken sollen, ist bis jetzt noch nicht ermittelt worden, und dies ist der Grund, warum die besonderen Maasse, wie die im vorigen Artikel definierten, zur Zeit noch für den praktischen Gebrauch in der Elektrodynamik unentbehrlich sind, weil ohne Kenntniss der Geschwindigkeit c die Reduction der gemessenen Stromintensitäten, elektromotorischen Kräfte und Widerstände auf die bekannten Maasse der Mechanik nicht ausgeführt werden kann.

V.

UEBER DEN ZUSAMMENHANG DER THEORIE DER GALVANISCHEN KETTE MIT DEN ELEKTRISCHEN GRUNDGESETZEN.

28.

Die Theorie der galvanischen Kette bildet an sich einen Theil der Elektrodynamik und es sollten darin die Gesetze der galvanischen Kette in ihrem Zusammenhange mit den elektrischen Grundgesetzen entwickelt werden. Dies ist bisher nicht geschehen; vielmehr ist die Theorie der galvanischen Kette für sich allein betrachtet worden und die Gesetze der galvanischen Kette sind theils unmittelbar aus der Erfahrung entnommen, theils aus Annahmen abgeleitet worden, welche

ganz unabhängig von den elektrischen Grundgesetzen aufgestellt worden sind. Namentlich gilt dies von den Gesetzen der galvanischen Kette, wie sie Ohm gegeben, deren Richtigkeit und praktische Bedeutung übrigens allgemein anerkannt wird. Der Grund, warum bisher eine solche Entwickelung der Theorie der galvanischen Kette aus den elektrischen Grundgesetzen noch nicht gegeben worden ist, dürfte hauptsächlich in den mathematischen Schwierigkeiten liegen, welche eine solche Entwickelung, wenn sie vollständig und streng sein soll, findet. Indessen mögen hier einige specielle Erörterungen Platz finden, welche den Zusammenhang der Theorie der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen betreffen, und welche mit den in dieser Abhandlung betrachteten Gegenständen in näherem Zusammenhange stehen.

Im Laufe dieser Abhandlung ist häufiger auf die Ohm'schen Gesetze der galvanischen Kette verwiesen worden, was nothwendig war, weil alle Widerstandsmessungen wesentlich auf diesen Gesetzen beruhen und selbst die Definition des Widerstands und des Widerstandsmaasses darauf begründet werden musste; denn der Widerstand wird im Grunde nur durch die nach den Ohm'schen Gesetzen für jeden geschlossenen Leiter in dem Verhältnisse der elektromotorischen Kraft zur Stromintensität gegebene Constante definiert.

Die Ohm'schen Gesetze setzen voraus, dass die Intensität des elektrischen Stroms in allen Theilen der geschlossenen Kette gleich sei, wie es bei eingetretener Beharrlichkeit wirklich der Fall sein muss. Durch diese Voraussetzung ist das Gebiet, für welches die Ohm'schen Gesetze gelten, beschränkt und umfasst nicht alle Bewegungen der Elektricität in der Kette; denn es sind davon z. B. alle Bewegungen ausgeschlossen, welche die Elektricität in der Kette machen muss, ehe ein beharrlicher Zustand zu Stande kommt. Auch leuchtet ein, dass diese Gesetze nur in so weit erfahrungsmässig begründet sind, als sie die Abhängigkeit der in allen Theilen der Kette gleich gewordenen Stromintensität von der Summe aller elektromotorischen Kräfte in der Kette und von der Summe der Widerstände aller ihrer Theile betreffen, während ein wirkliches Grundgesetz die Stromintensität an irgend einer Stelle der Kette nur von der auf diese Stelle wirkenden elektromotorischen Kraft und von dem an dieser Stelle vorhandenen Widerstande abhängig machen darf. Nun hat zwar Ohm, um zu einem wirklichen Grundgesetze zu gelangen, die Verschiedenheit der elektrischen Ladung

der verschiedenen Theile der Kette in Betracht gezogen und hat das Gesetz zu begründen gesucht, dass bei gleicher Stromintensität der Unterschied der Ladung an zwei Stellen, zwischen welchen keine elektromotorische Kraft gegeben ist (kein Berührungspunkt verschiedener Metalle), dem Widerstande des zwischen beiden Stellen liegenden Theils der Kette proportional sei, und dass dagegen an einer solchen Stelle, wo eine elektromotorische Kraft gegeben ist (wo z. B. zwei verschiedene Metalle sich berühren), die Ladung von der einen Seite zur andern einen plötzlichen Sprung mache, und dass der Unterschied der Ladung auf beiden Seiten der für diese Stelle gegebenen elektromotorischen Kraft proportional sei; dass endlich bei verschiedener Stromintensität der Unterschied der elektromotorischen Ladung an zwei bestimmten Stellen desselben Leiters der Stromintensität proportional sei. Hierdurch geleitet, hat dann Ohm ein analoges Grundgesetz für die elektrische Strömung in jedem Theile der Kette in ihrer Abhängigkeit von der Vertheilung der elektrischen Ladung aufgestellt, wie Fourier für die Wärmeströmung in jedem Theile eines Wärmeleiters in ihrer Abhängigkeit von der Vertheilung der Temperatur, und hat nachgewiesen, dass die aus dieser Analogie gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen, so weit als deren Resultate verbürgt werden können.

Ohm hat wirklich in der Vertheilung der elektrischen Ladung den wahren Schlüssel gefunden zur Eröffnung des Uebergangs von dem erfahrungsmässig begründeten, die ganze geschlossene Kette umfassenden Gesetze zu dem wahren Grundgesetze, wie es allgemein von jedem Theile der Kette aufgestellt werden muss; was aber die Wirkung dieser elektrischen Vertheilung auf die Bewegung der Elektricität betrifft, die er bloss nach der Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme betrachtet hat, so liegen Annahmen zu Grunde, welche weder nothwendig, noch zulässig erscheinen; denn die Wirkung der freien Elektricität ist durch das allgemeine Grundgesetz der Elektricitätslehre oder, wenn man von den relativen Bewegungen abstrahiert, durch das Grundgesetz der Elektrostatik schon gegeben und kann daraus für jede Vertheilung im Leiter berechnet werden, woraus sich leicht die Unzulässigkeit willkührlicher Annahmen nach blosser Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme nachweisen lässt. Schon was die Vertheilung selbst

betrifft, erscheint es hiernach unzulässig, eine andere Vertheilung der freien Elektricität als an der Oberfläche des Leiters anzunehmen. Ferner leuchtet ein wesentlicher Unterschied auch daraus ein, dass zwischen der Wärmefortpflanzung und der in der Richtung derselben vorhandenen Temperaturabnahme eine so nothwendige Beziehung stattfindet, dass erstere ohne die letztere gar nicht möglich ist. Eine solche Abhängigkeit der elektrischen Strömung von der Vertheilung der freien Elektricität findet in der galvanischen Kette nicht statt, weil die Kräfte, welche die elektrische Strömung hervorbringen, nicht bloss von der nächsten Umgebung, sondern auch aus grösseren Entfernungen wirken und daher ihren Sitz auch ganz ausserhalb des Leiters haben können, was bei einem Wärmeleiter nicht möglich ist.

Man nehme z. B. einen kreisförmigen kupfernen Ring zum Leiter, dessen Querschnitt überall gleich ist, und bewege in der durch seinen Mittelpunkt senkrecht auf seine Ebene gelegten Geraden einen Magnet. Der Magnet übt bekanntlich bei dieser Bewegung auf alle Ringelemente gleiche elektromotorische Kraft aus und es wird dadurch, weil allen Elementen auch gleicher Widerstand zukommt, eine gleiche elektrische Strömung gleichzeitig in allen Elementen hervorgebracht, woraus folgt, dass an keiner Stelle des Ringes eine grössere oder geringere Ansammlung von positiver oder negativer Elektricität entstehen kann. Wir haben hier also den Fall eines Stroms in einer geschlossenen Kette ohne eine Vertheilung freier Elektricität in der Kette. Das Gesetz der Abhängigkeit der Stromintensität von der Vertheilung der freien Elektricität im Leiter findet also in allen denjenigen Fällen keine Anwendung, wo die gegebenen elektromotorischen Kräfte sich über die ganze geschlossene Kette erstrecken und in allen Theilen den Widerständen proportional wirken. Nur bei ungleichmässiger Wirksamkeit der gegebenen elektromotorischen Kräfte in den verschiedenen Theilen der Kette tritt eine Vertheilung freier Elektricität ein, und das Factum, dass ein in allen Theilen der Kette gleichförmiger und beharrlicher Strom zu Stande kommt, beweist dann, dass diese Vertheilung der freien Elektricität im Leiter die Wirkung habe, alle Ungleichheiten in der ursprünglichen Wirkungsweise der elektromotorischen Kräfte auszugleichen. Wird nun aber diese Ausgleichung durch das Factum der Existenz eines beharrlichen Stroms als bewiesen betrachtet, so bleibt noch übrig: erstens nachzuweisen, wie eine solche Vertheilung

nach dem elektrischen Grundgesetze möglich ist und wie sie beschaffen sein müsse, zweitens, wie sie entstehe und erhalten werde.

29.

Nachweisung der Möglichkeit einer Vertheilung der freien Elektricität im Leiter, wodurch die Ungleichheiten der Wirksamkeit gegebener elektromotorischer Kräfte in den verschiedenen Theilen der Kette nach Proportion ihrer Widerstände ausgeglichen werden.

Jedes Theilchen freier (positiver oder negativer) Elektricität, welches sich an der Oberfläche eines Leiters befindet, übt elektromotorische Kräfte auf alle Theile des Leiters aus, welche die gegebenen elektromotorischen Kräfte der Kette an einigen Stellen schwächen, an andern verstärken, und es fragt sich daher, ob eine solche Vertheilung freier Elektricität auf der ganzen Oberfläche des Leiters möglich sei, durch welche die elektromotorische Kraft überall, wo sie zu schwach ist, verstärkt, wo sie zu stark ist, geschwächt, und auf diese Weise eine Ausgleichung der elektromotorischen Kraft in allen Theilen der Kette nach Proportion ihrer Widerstände zu Stande gebracht werde, welche die Bedingung eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms ist. Diese Frage muss, wenn vor der Hand von dem Einflusse der relativen Bewegungen der elektrischen Theilchen gegen einander abstrahiert wird, aus dem Grundgesetze der Elektrostatik entschieden werden, wodurch die von der Elektricität bei jeder beliebigen Vertheilung an der Oberfläche auf alle Punkte im Innern des Leiters ausgeübten Kräfte bestimmt sind.

Poisson hat bekanntlich aus dem Grundgesetze der Elektrostatik folgendes Theorem bewiesen:

> Wenn auf einen Leiter von beliebiger Gestalt von aussen beliebige elektrische Kräfte wirken, so ist an der Oberfläche des Leiters immer eine solche Vertheilung freier Elektricität möglich — aber nur eine einzige — bei welcher die elektrischen Kräfte, welche von dieser vertheilten freien Elektricität herrühren, den von aussen her wirkenden elektrischen Kräften in allen Punkten im Innern des Leiters zugleich das Gleichgewicht halten.

Denkt man sich nun zunächst einen Leiter von cylindrischer Form und in der Richtung seiner Axe in grosser Entfernung eine concentrierte

Masse freien (positiven oder negativen) elektrischen Fluidums, welche auf alle Theile des Cylinders gleiche und seiner Axe parallele Kräfte ausübt; so folgt aus obigem Lehrsatze die Möglichkeit einer solchen Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Cylinders, aus welcher, bei dem Wegfall jener fernen Masse, für alle Theile des Cylinders gleiche und seiner Axe parallele elektromotorische Kräfte resultieren, nämlich diejenigen Kräfte, welche den von der fernen Masse vor ihrem Wegfall ausgeübten Kräften das Gleichgewicht gehalten hatten.

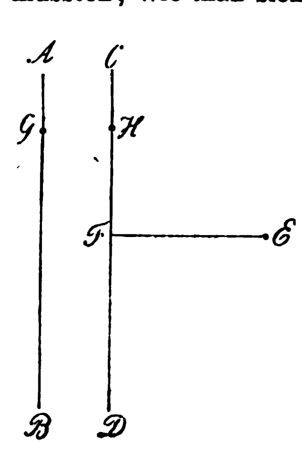
Denkt man sich dagegen einen gebogenen Stab und in der Richtung der Tangente eines seiner Elemente in grosser Entfernung eine concentrierte Masse freien (positiven oder negativen) Fluidums; so folgt eben so die Möglichkeit einer solchen Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche dieses Elements, aus welcher, bei dem Wegfall jener fernen Masse, für alle Theile des Elements gleiche und seiner Tangente parallele elektromotorische Kräfte resultieren, und diese Möglichkeit bleibt auch dann, wenn auf das betrachtete Element die elektrischen Ladungen aller andern Elemente des gebogenen Stabes wirken, wie auch diese Ladungen beschaffen sein mögen, nur dass alsdann die Vertheilungsweise der freien Elektricität an der Oberfläche des betrachteten Elements von der Ladung des übrigen Stabs abhängig ist.

Diese Betrachtung lässt sich nun auf alle Elemente des gebogenen Stabs anwenden, so dass für alle Elemente gleiche und ihren Tangenten parallele elektromotorische Kräfte resultieren. Die Ladungen aller einzelnen Elemente werden dadurch von der Ladung des ganzen Stabs abhängig gemacht, und die Ladung des ganzen Stabs muss endlich wiederum der Summe der Ladungen aller Elemente gleich gesetzt werden.

Eine auf solche Weise gewonnene Bestimmung der Ladung des ganzen gebogenen Stabs wird nun gelten, der Stab möge nur einen kleineren oder einen grösseren Theil von einem Kreise bilden. Die Ladungen in den Berührungsflächen je zweier an einander grenzender Elemente müssen sich neutralisieren, so dass die Vertheilung der freien Elektricität auf die Oberfläche des Stabs beschränkt bleibt, zu der aber wesentlich die Anfangsfläche und Endfläche des Stabs gerechnet werden müssen, welche daher nicht zusammenfallen dürfen.

Die Nothwendigkeit, Anfang und Ende des Stabs geschieden zu erhalten, wenn die an der Oberfläche vertheilte freie Elektricität in

allen Elementen des Stabs gleiche elektromotorische Kräfte nach tangentialer Richtung ausüben soll, folgt daraus, dass die Ladungen am Anfange und am Ende des Stabs, bei gegenseitiger Annäherung, keinem bestimmten Grenzwerthe sich nähern, sondern ins Unendliche wachsen müssten; wie man sich durch folgende Betrachtung überzeugen kann.



Es stelle *AB* die Anfangsfläche, *CD* die Endfläche des Stabs dar; der sehr kleine Abstand beider Flächen von einander heisse δ. Es darf angenommen werden, dass bei einer Verkleinerung von δ die Vertheilung der freien Elektricität auf der ganzen Staboberfläche mit Ausnahme von *AB* und *CD* nahe unverändert bleibt, woraus folgt, dass die für einen Punkt *E* des Stabs resultierende elektromotorische Kraft als unverändert angesehen werden kann, wenn nur die aus den Ladungen der beiden Flächen *AB* und *CD* für *E* resultierende elektromotorische Kraft gleich geblieben ist. *G* und *H* seien zwei gleiche, einander gegenüberliegende Elemente der Flächen *AB* und *CD*. Die Ladung des Elements *G* werde mit $-e$, die Ladung des Elements *H* mit $+e$ bezeichnet. Der Abstand *FH*, senkrecht auf die Richtung der für *E* resultierenden elektromotorischen Kraft, heisse β; der Abstand *FE* heisse α. Alsdann ergiebt sich die von *H* auf *E* nach der tangentialen Richtung *EF* wirkende Kraft aus dem Grundgesetze der Elektrostatik

$$= \frac{+\alpha e}{(\alpha\alpha+\beta\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

die von *G* auf *E* nach der nämlichen Richtung wirkende Kraft

$$= \frac{-(\alpha+\delta)e}{[(\alpha+\delta)^2+\beta\beta]^{\frac{3}{2}}}$$

folglich die Summe beider Kräfte, wenn δ gegen α sehr klein ist,

$$= \frac{2\alpha\alpha-\beta\beta}{(\alpha\alpha+\beta\beta)^{\frac{5}{2}}}\cdot\delta e\,.$$

Hieraus folgt also, dass die für *E* resultierende elektromotorische Kraft bei der Verkleinerung von δ unverändert bleibt, wenn das Product δe gleichen Werth behält. Für verschwindende Werthe von δ müsste also die Ladung e ins Unendliche wachsen, was zu beweisen war.

Zugleich leuchtet daraus ein, dass, wenn die im ganzen Stabe gleiche elektromotorische Kraft wachsen oder abnehmen soll, auch der Werth des Products δe sich proportional ändern müsse.

Bezeichnet endlich K einen zwischen den Flächen AB und CD gelegenen Punkt, so leuchtet ein, dass die Ladungen der Flächen AB und CD auf K eine elektromotorische Kraft nach entgegengesetzter Richtung wie auf E ausüben. Soll daher ein geschlossener Kreis gebildet werden, in welchem überall gleiche elektromotorische Kräfte in gleichem Sinne wirken, was nothwendig ist, wenn ein gleichförmiger und beharrlicher Strom zu Stande kommen soll, so muss K der Sitz einer von der Vertheilung der freien Elektricität an der Staboberfläche unabhängigen elektromotorischen Kraft sein, welches z. B. der Fall ist, wenn Kupfer und Zink im Punkte K einander berühren. Auch lässt sich nachweisen, dass die gegebene elektromotorische Kraft in allen Punkten K der Linie δ, welche die beiden entgegengesetzt geladenen Flächen verbindet, unter sonst gleichen Verhältnissen dem Produkte δe proportional sein müsse, und dass also dieses Produkt als ein Maass der gegebenen elektromotorischen Kraft betrachtet werden dürfe. *)

Aus diesen allgemeinen Betrachtungen lassen sich nun folgende

---

*) Es stellen AB und CD die beiden entgegengesetzt geladenen Flächen dar, deren Abstand $= \delta$ ist. G sei ein Element der Fläche AB, dessen Ladung mit e bezeichnet wird. Der Abstand FG, senkrecht auf die Richtung der für K resultierenden elektromotorischen Kraft, werde mit β, der Abstand FK mit α bezeichnet. Dann ergiebt sich die von G auf K nach der Richtung FK wirkende Kraft aus dem Grundgesetze der Elektrostatik

A C G F K B D

$$= \frac{e\alpha}{(\alpha\alpha + \beta\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

folglich für alle Punkte K von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \delta$

$$= e\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{(\beta\beta + \delta\delta)}}\right).$$

Für alle Flächenelemente, welche in gleicher Entfernung β von F liegen, erhält man hiernach durch Multiplication mit $2\pi\beta$

$$2\pi e\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{(\beta\beta + \delta\delta)}}\right);$$

endlich für alle Flächenelemente von $\beta = 0$ bis $\beta = b$

$$2\pi e\left(\delta + b - \sqrt{(bb + \delta\delta)}\right)$$

oder, weil δ gegen b sehr klein ist,

$$2\pi e\delta .$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich für die von der Fläche CD ausgeübte Kraft, und es ergiebt sich folglich die Summe beider Kräfte $= 4\pi e\delta$, d. h. proportional dem Producte δe.

Resultate ziehen, welche eine Vergleichung mit den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette gestatten.

1. Aus obiger Betrachtung folgt, dass in einem geschlossenen Ringe durch blosse Vertheilung der freien Elektricität an seiner Oberfläche kein Strom möglich ist, sondern dass wenigstens in einem Querschnitte dieses Ringes elektromotorische Kräfte, z. B. durch die Berührung von Kupfer mit Zink, gegeben sein müssen, wenn durch Vermittelung einer gewissen Vertheilung der freien Elektricität an der Ringoberfläche ein gleichförmiger und beharrlicher Strom im ganzen Ringe zu Stande kommen soll.

2. Wenn in einer bestimmten Kette der Strom verdoppelt werden soll, so muss die Menge der freien Elektricität auf der ganzen Oberfläche verdoppelt werden; folglich muss auch eine Verdoppelung des Factors e im Producte δe stattfinden, d. h. eine Verdoppelung der damit proportionalen elektromotorischen Kraft. Einer Verdoppelung der elektromotorischen Kraft entspricht also eine Verdoppelung der Stromintensität in der nämlichen Kette.

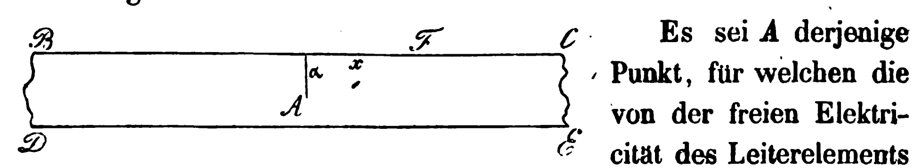
3. Werden alle Dimensionen einer Kette verdoppelt und soll dabei die elektromotorische Kraft in allen Punkten noch eben so gross wie vorher bleiben, so muss die Dicke der elektrischen Schicht an entsprechenden Stellen der Oberfläche unverändert geblieben sein, während die davon bedeckte Stelle der Oberfläche 4 Mal grösser geworden ist. Zugleich ergiebt das proportionale Wachsthum aller Dimensionen, dass auch der Abstand δ in dem Producte δe verdoppelt gedacht werden muss, wonach also, da e unverändert geblieben ist, das Product δe und die damit proportionale elektromotorische Kraft verdoppelt sein muss. Hieraus folgt, dass eine doppelte elektromotorische Kraft erfordert werde, um in einer Kette von doppelter Länge und vierfachem Querschnitte eine eben so starke elektrische Bewegung in allen Punkten hervorzubringen, wie in einer Kette von einfacher Länge und einfachem Querschnitte. Eine solche in allen Punkten gleich starke elektrische Bewegung giebt aber bei vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität. Die doppelte elektromotorische Kraft bringt also in einer Kette von doppelter Länge und von vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität hervor, was nach den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette auch wirklich der Fall ist.

Eine vollständige Entwickelung der Gesetze der galvanischen Kette fordert eine nähere Bestimmung der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche der Kette.

30.

Ueber das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms.

Bei einem linearen Leiter ist es gestattet, für die Vertheilung der freien Elektricität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben in derjenigen Linie, welche die Axe des Leiters bildet, zu setzen. Es leuchtet dies in Beziehung auf alle Theile des Leiters von selbst ein, welche in grösserer Entfernung von demjenigen Punkte liegen, für welchen die von jener freien Elektricität ausgeübte elektromotorische Kraft bestimmt werden soll, und es bleibt daher nur übrig, den Beweis für denjenigen Theil des Leiters zu führen, welcher jenem Punkte zunächst liegt.



Es sei A derjenige Punkt, für welchen die von der freien Elektricität des Leiterelements $BCDE$ ausgeübte elektromotorische Kraft bestimmt werden soll; α bezeichne den unendlich kleinen Halbmesser des Leitungsdrahtes. Die Dicke der Schicht der freien Elektricität in dem Punkte F, dessen geringer Abstand von dem durch A gehenden Querschnitt des Leiters mit x bezeichnet werde, kann dargestellt werden durch

$$a + bx$$

und die elektromotorische Kraft welche die freie Elektricität des Flächenelements $2\pi\alpha dx$ bei F auf den Punkt A ausübt, durch

$$\frac{2\pi\alpha\,(a+bx)\,dx}{\alpha\alpha + xx}$$

woraus die Componente dieser Kraft nach der Richtung der Axe folgt,

$$= \frac{2\pi\alpha\,(a+bx)\,xdx}{(\alpha\alpha + xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$ ist hiernach

$$2\pi\alpha b \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{xxdx}{(\alpha\alpha + xx)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\alpha b \left(\log \frac{\sqrt{(\lambda\lambda + \alpha\alpha)} + \lambda}{\sqrt{(\lambda\lambda + \alpha\alpha)} - \lambda} - \frac{2\lambda}{\sqrt{(\lambda\lambda + \alpha\alpha)}}\right)$$

oder, weil α gegen λ sehr klein ist,

$$= 4\pi\alpha b \, . \log \frac{2\lambda}{e\alpha} = 4\pi\alpha b \left(\log\lambda - \log \frac{e}{2}\alpha\right)$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet.

Wäre nun dieselbe freie Elektricität, statt auf der Oberfläche des Leiters vertheilt, in seiner Axe concentriert, so würde von dem Axenelemente, in welchem die freie Elektricität $2\pi\alpha(a+x)dx$ concentriert wäre, auf A nach der Richtung der Axe eine elektromotorische Kraft wirken, welche dargestellt wird durch

$$\pm \frac{2\pi\alpha\,(a+bx)\,dx}{xx}$$

je nachdem x einen positiven oder negativen Werth hat. Der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = -\frac{e}{2}\alpha$ ist

$$= 2\pi\alpha b\left(\log\lambda - \log\frac{e}{2}\alpha\right) + 2\pi\alpha a\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{e\alpha}\right)$$

zwischen den Grenzen $x = +\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\lambda$

$$= 2\pi\alpha b\left(\log\lambda - \log\frac{e}{2}\alpha\right) - 2\pi\alpha a\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{e\alpha}\right);$$

folglich ist der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$, mit Ausschluss des zwischen den Grenzen $x = -\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\frac{e}{2}\alpha$ fallenden Theils,

$$= 4\pi\alpha b\left(\log\lambda - \log\frac{e}{2}\alpha\right)$$

woraus hervorgeht, dass es gestattet ist, für die Vertheilung der freien Elektricität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben in der Axe des Leiters zu substituieren, wenn man in dem Integralwerthe der elektromotorischen Kraft denjenigen Theil ausschliesst, welcher zwischen den Grenzen $x = -\frac{e}{2}\alpha$ bis $x = +\frac{e}{2}\alpha$ liegt.

Hat z. B. der lineare Leiter die Gestalt eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$ ist, und bezeichnet A den Anfangspunkt eines Bogens $AB = r\varphi$, welcher der Sitz der gegebenen elektromotorischen Kraft der Kette ist; so sei

$$\mathfrak{f}\varphi \, . \, d\varphi$$

die freie Elektricität des Bogenelements $rd\varphi$ am Ende des Bogens $r\varphi$. Der Werth des Potentials dieser elektrischen Masse im Punkte C am Ende des Bogens $AC = r\psi$ ist dann

$$= \frac{\mathfrak{f}\varphi \, . \, d\varphi}{2r \sin\frac{1}{2}(\varphi - \psi)}$$

folglich der Werth des Potentials der elektrischen Masse des ganzen Leiters im Punkte C

$$\frac{1}{2r}\int\frac{f\varphi \,.\, d\varphi}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} = F\psi$$

wo die Integration von $\varphi = \psi + \frac{e}{2}\frac{a}{r}$ bis $\varphi = 2\pi + \psi - \frac{e}{2}\frac{a}{r}$ zu erstrecken ist. Hieraus ergiebt sich die auf den Punkt C ausgeübte elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten des Potentials in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$= -\frac{d \,.\, F\psi}{r d\psi} \,.$$

Soll nun diese elektromotorische Kraft in allen Theilen des Leiters gleich sein, d. h. soll $-\frac{d\,.\,F\psi}{r d\psi}$ einen constanten Werth c haben, so erhält man

$$F\psi = c\psi + \text{const.}$$

oder, bei symmetrischer Vertheilung der freien positiven und negativen Elektricität im Leiter, wo $F\pi = c\pi + \text{const.} = 0$ ist,

$$F\psi = c(\psi - \pi) \,.$$

Sollte nun auch die Auffindung der allgemeinen Form der Function $f\varphi$ Schwierigkeiten finden, so ist es doch nicht schwer, die von Ohm darüber aufgestellte Hypothese einer Prüfung zu unterwerfen und zu entscheiden, ob und in wie weit dieselbe zulässig sei.

Die Ohm'sche Hypothese besteht wesentlich darin, dass der Werth $f\varphi$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ proportional mit φ wachse und dass also für den Fall der symmetrischen Vertheilung der positiven und negativen Elektricität im Leiter, wo $f(0) = -f(2\pi)$ ist,

$$f\varphi = a(\varphi - \pi) \,.$$

Dies vorausgesetzt, lässt sich der Werth des Potentials der freien Elektriticität des ganzen Leiters in demjenigen Punkte, für welchen $\varphi = \psi$ ist, folgendermassen bestimmen.

A sei der Anfangspunkt des Bogens $r\varphi$; $AB = BD = r\psi$. Alle Elemente des Bogens $r\varphi$ von A bis D lassen sich paarweise nach ihrem Abstande von B ordnen. Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi = \psi - \chi$ gehört, dessen Abstand von $B = 2r\sin\frac{1}{2}\chi$ ist, so hat das zu $\varphi = \psi + \chi$ gehörende Element denselben Abstand von B. Die diesen beiden Elementen zugehörigen elekrischen Massen sind

$$a(\psi - \chi - \pi)\,d\chi \text{ und } a(\psi + \chi - \pi)\,d\chi$$

und der Werth des Potentials dieser Massen im Punkte B

$$\frac{a(\psi - \chi - \pi)\,d\chi}{2r\sin\frac{1}{2}\chi} \text{ und } \frac{a(\psi + \chi - \pi)\,d\chi}{2r\sin\frac{1}{2}\chi} \,,$$

folglich deren Summe

$$= \frac{a(\psi - \pi)\,d\chi}{r \sin \frac{1}{2}\chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Bogens AD im Punkte B ergiebt sich hieraus

$$\frac{a(\psi - \pi)}{r}\int_{\frac{ea}{2r}}^{\psi} \frac{d\chi}{\sin \frac{1}{2}\chi} = \frac{2a(\psi - \pi)}{r} \cdot \left(\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{4}\psi - \log \operatorname{tang} \frac{ea}{8r}\right).$$

Der Punkt C des Kreises liege dem Punkte B diametral gegenüber, folglich der Bogen $ABC = r(\psi + \pi)$. Alle Elemente des Bogens $r\varphi$ von D über C nach A lassen sich ebenfalls paarweise ordnen nach ihrem Abstande von C. Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi = \psi + \pi - \chi$ gehört, dessen Abstand von $C = 2r \sin \frac{1}{2}\chi$ ist, so hat das zu $\varphi = \psi + \pi + \chi$ gehörende Element denselben Abstand von C. Die diesen beiden Elementen zugehörigen elektrischen Massen sind

$$a(\psi - \chi)\,d\chi \text{ und } a(\psi + \chi)\,d\chi$$

und der Werth des Potentials dieser Massen im Punkte B

$$\frac{a(\psi - \chi)\,d\chi}{2r \sin \frac{1}{2}(\pi - \chi)} \text{ und } \frac{a(\psi + \chi)\,d\chi}{2r \sin \frac{1}{2}(\pi - \chi)}$$

folglich deren Summe

$$= \frac{a\psi}{r} \cdot \frac{d\chi}{\cos \frac{1}{2}\chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Bogens DCA im Punkte B ergiebt sich hieraus

$$\frac{a\psi}{r}\int_0^{\pi - \psi} \frac{d\chi}{\cos \frac{1}{2}\chi} = -\frac{2a\psi}{r} \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{4}\psi$$

der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Kreises also

$$= -\frac{2a\psi}{r} \log \operatorname{tang} \frac{ea}{8r} - \frac{2a\pi}{r}\left(\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{4}\psi - \log \operatorname{tang} \frac{ea}{8r}\right).$$

Hieraus ergiebt sich die auf den Punkt B ausgeübte elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten des Potentials in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$= -\frac{2a}{rr} \log \operatorname{tang} \frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{rr \sin \frac{1}{2}\psi}$$

oder

$$= \frac{2a}{rr} \log \cot \frac{ea}{8r} - \frac{a\pi}{rr \sin \frac{1}{2}\psi}.$$

Für diejenigen Werthe von ψ, welche von π wenig verschieden sind, ergiebt sich hiernach die elektromotorische Kraft nahe gleich; je mehr aber der Werth von ψ dem Werthe von 0 oder 2π nahe kommt, desto tiefer sinkt die elektromotorische Kraft unter jenem Grenzwerthe herab, woraus also folgt, dass die Ohm'sche Hypothese über die Vertheilung der freien Elektricität nur für den mittlern Theil der Kette näherungsweise zulässig ist.

So wie nun nach dieser Hypothese der Werth der elektromotorischen Kraft in allen Theilen der Kette kleiner ist, als der für die Mitte der Kette gültige Grenzwerth, so lässt sich auch leicht eine Hypothese aufstellen, nach welcher er grösser sein würde. Die Ohm'sche Hypothese bedarf nämlich nothwendig einer Ergänzung, wenn sie nicht mit dem Satze in Widerspruch stehen soll, dass aus der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche eines Leiters eine im Innern des Leiters überall gleiche elektromotorische Kraft nur dann resultieren könne, wenn zwei Querschnittsflächen des Leiters zu jener Oberfläche gehören (s. S. 275). Denn hiernach muss in unserer linearen Darstellung alle in diesen beiden Querschnittsflächen befindliche freie Elektricität in zwei Punkten concentriert gedacht werden, während in der ganzen übrigen Kette nur die in der Begrenzungslinie eines Querschnitts befindliche Elektricität in einem Punkte concentriert gedacht wird. Es ergiebt sich daraus, dass wenigstens in den jene beiden Querschnitte darstellenden Endpunkten eine von Ohm nicht berücksichtigte Concentration von freier Elektricität stattfinden müsse. Bezeichnet man diese mit $\pm \varepsilon$, wo das obere Vorzeichen für den einen, das untere für den andern Punkt gilt, und bezeichnet δ den kleinen Abstand beider Punkte von einander, so lässt sich die elektromotorische Kraft, welche dadurch für jeden Punkt der Kette noch hinzukommt, nach demselben Gesetze bestimmen, welches Gauss für die Wirkung eines Magnets in die Ferne gegeben hat. Siehe »Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840« S. 33. 34. Ist nämlich ACA' der kreisförmige Leiter und in A die Contaktstelle, und soll die elektromotorische Kraft bestimmt werden, welche durch die freie Elektricität $\pm \varepsilon$ zu beiden Seiten von A im Punkte C des Leiters hinzukommt; so ziehe man in A die Tangente und verlängere sie, bis sie in B die verlängerte Gerade $A'C$ schneidet, wo A' denjenigen Punkt des Kreises bezeichnet, welcher dem Punkte A diametral gegenüber

liegt; ferner mache man $AD = \frac{1}{3} AB$ und ziehe CD; so ist CD die Richtung der elektromotorischen Kraft, welche $\pm \varepsilon$ in C ausübt, und die Grösse dieser Kraft wird dargestellt durch:

$$\frac{CD}{AD} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{AC^2}.$$

Zieht man endlich die Tangente des Kreises in C und fällt darauf das Perpendikel DE; so ergiebt sich die Componente nach der Richtung der Kreistangente in C, d. i. die gesuchte elektromotorische Kraft

$$= \frac{CE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{AC^2} = \frac{CE}{AD} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{AC^2}.$$

Bezeichnet man den Halbmesser des Kreises mit r und den Kreisbogen AC mit ψ, so findet man dafür den Ausdruck

$$\frac{1 + \cos\frac{1}{2}\psi^2}{\sin\frac{1}{2}\psi^3} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{8r^2}.$$

Fügt man nun diese elektromotorische Kraft der nach der Ohm'schen Hypothese gefundenen noch hinzu, so erhält man

$$\frac{2a}{rr} \log\cot\frac{\varepsilon a}{8r} - \frac{a\pi}{rr\sin\frac{1}{2}\psi} + \frac{1+\cos\frac{1}{2}\psi^2}{\sin\frac{1}{2}\psi^3} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{8r^2}.$$

Auch dieser Werth ist nahe constant für solche Werthe von ψ, welche von π wenig verschieden sind, wie man ersieht, wenn man den Differentialquotienten entwickelt, nämlich

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{2rr\sin\frac{1}{2}\psi^2}\left(a\pi - \frac{\delta\varepsilon}{4r}\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{1+\cos\frac{1}{2}\psi^2}{\sin\frac{1}{2}\psi^2}\right)\right)$$

welcher für $\psi = \pi$ Null ist. Ausserdem kann aber der Werth von $\delta\varepsilon$ so bestimmt werden, dass auch der zweite und dritte Differentialquotient für $\psi = \pi$ Null ist, welches der Fall ist, wenn

$$\delta\varepsilon = \frac{8}{5} a\pi r$$

ist. Substituiert man diesen Werth von $\delta\varepsilon$ in dem Ausdruck der elektromotorischen Kraft, so erhält man

$$\frac{2a}{rr}\log\cot\frac{\varepsilon a}{8r} + \frac{2a\pi}{5rr\sin\frac{1}{2}\psi^3}\left(3\cos\frac{1}{2}\psi^2 - 2\right)$$

dessen Differentialquotient

$$= -\frac{3}{5}\,\frac{a\pi}{rr}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\psi^3}{\sin\frac{1}{2}\psi^4}$$

für $\psi = \pi$ Null ist, weil er $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ zum Factor hat. Auch sieht man, dass die beiden folgenden Differentialquotienten für $\psi = \pi$ Null werden, weil sie ebenfalls den Factor $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ haben.

Man ersieht hieraus, dass nach dieser Hypothese der Werth der elektromotorischen Kraft in allen anderen Theilen der Kette grösser ist, als der für die Mitte der Kette gültige Grenzwerth, statt er nach der

Ohm'schen Hypothese kleiner war. Die richtige Hypothese über die Vertheilung der freien Elektricität, aus welcher sich eine überall gleiche elektromotorische Kraft ergeben soll, ist also zwischen den von den beiden obigen Hypothesen gegebenen Grenzen eingeschlossen, was so viel heisst als: die elektrische Ladung der Kette wächst von dem Indifferenzpunkte zu dem Contaktpunkte nicht gleichförmig, sondern allmählig beschleunigt. Die daraus hervorgehende, überall gleiche elektromotorische Kraft wird dann muthmasslich zwischen den durch die beiden obigen Hypothesen gegebenen Grenzwerthen liegen, nämlich

$$\frac{2a}{rr}\cdot\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\frac{1}{2}\pi\right) \text{ und } \frac{2a}{rr}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\frac{2}{5}\pi\right).$$

Der Factor a bezieht sich dabei auf das Gefälle der elektrischen Ladung in der Mitte der Kette, wenn man nach Ohm unter Gefälle den Differentialquotienten der Ladung $f\varphi$ in Beziehung auf den Bogen φ versteht.

31.

Die Vertheilung der freien Elektricität in einem linearen Leiter, durch welchen ein constanter Strom geht, und die Grösse der von dieser Vertheilung abhängigen elektromotorischen Kraft kann in jedem einzelnen Falle genähert auf folgende Weise bestimmt werden. Der Einfachheit wegen soll auch hier für den Leiter die Form eines Kreises angenommen werden und für einen einzigen Punkt desselben eine elektromotorische Kraft $= a$ gegeben sein.

Theilt man den Kreis durch die Punkte A, (A^1), B, (A_1) in vier gleiche Theile und ist B der Punkt, für welchen die elektromotorische Kraft $= a$ gegeben ist; so lässt sich leicht eine Vertheilung freier Elektricität in den beiden Punkten (A^1) und (A_1) angeben, durch welche die elektromotorischen Kräfte in den beiden Punkten A und B ausgeglichen werden. Denn bezeichnet $+e$ die freie Elektricität in (A^1), $-e$ in (A_1) und r den Halbmesser des Kreises, so ist $2r\sin\frac{1}{4}\pi = r\sqrt{2}$ der Abstand der Punkte A und B von (A^1) oder (A_1). Hieraus ergiebt sich nach dem Grundgesetze der Elektrostatik die elektromotorische Kraft nach der Richtung der Tangente des Kreises

$$\text{in } B = a - \frac{2e}{4rr\sin\frac{1}{4}\pi^2}\cdot\cos\frac{1}{4}\pi = a - \frac{e}{rr}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{in } A = + \frac{2e}{4rr\sin\frac{1}{4}\pi^2}\cdot\cos\frac{1}{4}\pi = + \frac{e}{rr}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

folglich für die verlangte Ausgleichung

$$a = \frac{e}{rr} \cdot \sqrt{2}$$

oder

$$\pm e = \pm arr \, . \, \sqrt{\tfrac{1}{2}} \, .$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich, wenn der Kreis durch die Punkte A, (A^1), A^1, (A^2), etc. in $4n$ gleiche Theile getheilt wird und in dem A diametral gegenüberliegenden Punkte B die elektromotorische Kraft $= a$ gegeben ist, eine solche Vertheilung freier Elektricität in $2n$ Punkten (A^1), (A^2), etc., durch welche die elektromotorischen Kräfte in den $2n$ Punkten A, A^1, etc. ausgeglichen werden. Denn bezeichnet $\pm e_1$ die freie Elektricität in (A^1), (A_1), $\pm e_2$ in (A^2), (A_2), etc., und r den Halbmesser des Kreises, und setzt man $\dfrac{\cos \frac{(2m-1)\pi}{4n}}{4rr\left[\sin \frac{(2m-1)\pi}{4n}\right]^2} = p_m$, so findet man die elektromotorische Kraft nach der Richtung der Tangente des Kreises

$$\text{in } B = a - 2p_n \, . \, e_1 - 2p_{n-1} \, . \, e_2 - \ldots - 2p_1 \, . \, e_n$$

$$\text{in } A = 2p_1 e_1 + 2p_2 e_2 + \ldots + 2p_n e_n$$

in A^m oder in A_m

$$= - p_m e_1 - p_{m-1} e_2 - \ldots - p_1 e_m + p_1 e_{m+1} + \cdots + p_{n-m} e_n$$
$$+ p_{m+1} e_1 + p_{m+2} e_2 + \ldots + p_n e_{n-m} - p_n e_{n-m+1} - \ldots - p_{n-m+1} e_n$$

worin für m alle ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$ gesetzt werden können. Durch Gleichsetzung aller dieser $(n+1)$ Werthe erhält man n Gleichungen zur Bestimmung der n unbekannten Grössen e_1, e_2, ... e_n.

Ferner ergiebt sich der Mittelwerth der beiden ersten von obigen $(n+1)$ gleichgesetzten elektromotorischen Kräften k

$$k = \tfrac{1}{2} a + (p_1 - p_n) e_1 + (p_2 - p_{n-1}) e_2 + \ldots$$

und die Summe aller zusammen

$$(n+1) k = a + (p_1 - p_n) e_1 + (p_2 - p_{n-1}) e_2 + \ldots$$

folglich

$$(n+1) k - a = k - \tfrac{1}{2} a$$

oder

$$a = 2nk \, .$$

Z. B. für $n = 2$ ergiebt sich

$$e_1 = 0{,}01567 \, . \, 4rra$$
$$e_2 = 0{,}05833 \, . \, 4rra$$
$$k = \tfrac{1}{4} a$$

für $n = 4$:

$$e_1 = 0{,}001537 \,.\, 4rra$$
$$e_2 = 0{,}004744 \,.\, 4rra$$
$$e_3 = 0{,}008570 \,.\, 4rra$$
$$e_4 = 0{,}015922 \,.\, 4rra$$
$$k = \tfrac{1}{8}\, a$$

für $n = 8$:

$$e_1 = 0{,}0001582 \,.\, 4rra$$
$$e_2 = 0{,}0004771 \,.\, 4rra$$
$$e_3 = 0{,}0008047 \,.\, 4rra$$
$$e_4 = 0{,}0011495 \,.\, 4rra$$
$$e_5 = 0{,}0015271 \,.\, 4rra$$
$$e_6 = 0{,}0019726 \,.\, 4rra$$
$$e_7 = 0{,}0025951 \,.\, 4rra$$
$$e_8 = 0{,}0041187 \,.\, 4rra$$
$$k = \tfrac{1}{16}\, a\,.$$

Je grösser die Zahl n ist, desto mehr nähert sich der Werth von e_1 den Werthen

$$\tfrac{1}{3}\, e_2\,,\ \tfrac{1}{5}\, e_3 \ldots .$$

Vertheilt man nun die Massen $e_1, e_2 \ldots e_m$, für welche die Abweichungen von den Massen $e_1, 3e_1, \ldots (2m-1)\, e_1$ als unmerklich vernachlässigt werden dürfen, auf die m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$, in deren Mitte sie liegen, dem Abstande x vom Punkte A proportional, so ist, wenn b einen constanten Factor bezeichnet,

$$b \int_0^{\frac{m}{n}\pi r} x dx = \tfrac{1}{2}\, b \cdot \frac{mm\pi\pi rr}{nn} = e_1 + e_2 + \ldots + e_m = mme_1\,,$$

folglich
$$b = \frac{2nn}{\pi\pi} \cdot \frac{e_1}{rr}\,.$$

Nun war die elektromotorische Kraft der in der Mitte der m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$ concentrierten Massen $e_1, e_2 \ldots . e_m$ im Punkte A, wenn der Kreisbogen $\frac{m}{n}\,\pi r$ so klein ist, dass seine Abweichung von der geraden Linie als unmerklich betrachtet werden darf,

von e_1 $\quad = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot e_1$

von e_2 $\quad = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{9}\, e_2 = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{3}\, e_1$

von e_m $\quad = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{(2m-1)^2}\, e_m = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{2m-1} \cdot e_1$

also die ganze von diesen m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= \frac{4nn}{\pi\pi rr}\left(1+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2m-1}\right)e_1 = 2\left(1+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2m-1}\right)b\,.$$

Die elektromotorische Kraft dagegen, welche von der nämlichen, nach dem angegebenen Gesetze stetig auf den ganzen Bogen $\frac{m}{n}\pi r$ vertheilten Masse im Punkte A ausgeübt wird, wenn diese lineare Vertheilung nach Art. 30 die Stelle der wirklichen Vertheilung auf der Oberfläche eines dünnen Drahts von dem Halbmesser α vertritt, wird gefunden

$$b\int_{\frac{e\alpha}{2}}^{\frac{m}{n}\pi r}\frac{dx}{x} = b\log\text{nat}\,\frac{2m\pi r}{ne\alpha}\,.$$

Diese beiden Ausdrücke für die von den m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft sind gleich, wenn α einen solchen Werth erhält, dass

$$2\left(1+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2m-1}\right) = \log\text{nat}\,\frac{2m\pi r}{ne\alpha}$$

d. i.

$$e\alpha = \frac{2m}{n}\pi r e^{-2\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2m-1}\right)}$$

ist, worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet. Je grösser die Zahl n und folglich auch die Zahl m ist, desto geringer ist der Einfluss, welchen es auf den Werth von α hat, ob die Zahl m um einen oder einige Einheiten grösser oder kleiner genommen wird. Denn bezeichnet m eine grössere Zahl und α' den Werth, welchen α erhält, wenn m um 1 vergrössert wird, so lässt sich α' darstellen durch $\frac{2m^2+3m+1}{2m^2+3m}\cdot\alpha$, was für grosse Werthe von m nur wenig von α verschieden ist. Für diesen Werth von α können also die in den Mittelpunkten der m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$ concentrierten Massen freier Elektricität an die Stelle einer gleich grossen, an der Oberfläche des Leiters stetig vertheilten Masse gesetzt werden; denn für den dem betrachteten Punkte zunächst liegenden Theil der Kette folgt dies aus der eben nachgewiesenen Gleichheit der elektromotorischen Kräfte, für die ferneren Theile der Kette leuchtet es aber eben so wie Art. 30 von selbst ein.

Für den oben betrachteten Fall, wenn $n = 8$ ist, sieht man leicht, dass m nicht grösser als 2 genommen werden kann; folglich

$$e\alpha = \tfrac{1}{2}\pi r e^{-\frac{8}{3}} = 0{,}10915\,.\,r\,.$$

Dieser Werth von α ist nun allerdings, weil so kleine Werthe von n und m ihm zu Grunde gelegt worden, nicht als genau zu betrachten und ergiebt sich ausserdem zu gross, als dass die Art. 30 entwickelten Regeln, welche nur für kleine Werthe von α gelten, mit hinreichender Genauigkeit angewendet werden könnten. Eine genauere Anwendung dieser Regeln würde fordern, dass n nicht kleiner als 32 wäre, wo, wenn man $m = 4$ annähme,

$$e\alpha = \tfrac{1}{4}\,\pi r e^{-\frac{352}{105}} = 0{,}02749\,.\,r$$

erhalten würde. Der vorliegende Fall möge daher nur zur Erläuterung dienen, wie auf dem angegebenen Wege, trotz der Ungenauigkeit und der Grösse von α, die Vertheilung der freien Elektricität im Leiter und die daraus resultierende elektromotorische Kraft doch einigermassen näherungsweise bestimmt werde. Ausser dem Werthe von $e\alpha$

$$e\alpha = 0{,}10915\, r$$

erhält man nämlich für diesen Fall

$$b = \frac{32}{\pi\pi} \cdot \frac{e_1 + e_2}{rr} = 0{,}008239\,.\,a$$

und die in der ganzen Kette gleiche elektromotorische Kraft

$$k = \tfrac{1}{16}\,a\,.$$

Diese Resultate lassen sich nur mit den S. 285 gegebenen Formeln vergleichen, wonach dieselbe elektromotorische Kraft näherungsweise durch folgende beide Ausdrücke dargestellt werden soll, nämlich durch

$$\frac{2a}{rr}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \frac{1}{2}\pi\right)$$

oder durch

$$\frac{2a}{rr}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \frac{2}{5}\pi\right)$$

wobei zu beachten ist, dass dort das Massenelement der freien Elektricität in dem Bogenelemente $rd\varphi$, welches in einer kleinen Entfernung $r\varphi$ vom Indifferenzpunkte A sich befindet, durch $a\varphi d\varphi$ ausgedrückt worden ist, während hier dasselbe Massenelement mit $bxdx$ bezeichnet wurde, wo $x = r\varphi$ und $dx = rd\varphi$ ist: es ist also in diesen beiden Formeln $a = brr$ zu setzen. Hiernach ergiebt sich nun näherungsweise entweder

$$k = 2b\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \frac{1}{2}\pi\right) = 0{,}04488\,.\,a$$

oder

$$k = 2b\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \frac{2}{5}\pi\right) = 0{,}05006\,.\,a$$

statt oben $k = \frac{1}{16} a = 0{,}0625 . a$ gefunden worden ist. Man sieht also hieraus, dass, wenn der oben berechnete Werth von k mit den beiden letzteren Näherungswerthen auch nicht genau übereinstimmt, was bei der Ungenauigkeit und Grösse des Werths von α unmöglich ist, jener Weg doch selbst unter diesen ungünstigen Verhältnissen wenigstens zu einem Werthe für k von gleicher Grössenordnung führt. Eine grössere Uebereinstimmung darf erwartet werden, wenn die Rechnung z. B. für $n = 32$ oder für noch grössere Zahlen ausgeführt würde. Durch eine angemessene Vergrösserung der Zahlen n und m würde sich die Vertheilung der freien Elektricität in dem linearen Leiter sowohl, als auch die davon abhängige elektromotorische Kraft näherungsweise mit jeder verlangten Schärfe bestimmen lassen.

Es ist übrigens kaum nöthig, besonders zu bemerken, dass in obiger Darstellung die Kreisform des Leiters nur beispielsweise zur Vereinfachung der Rechnung gewählt worden ist, dass aber dieselbe Methode für jede andere lineare Form des Leiters anwendbar bleibt. Dasselbe gilt auch, wenn statt einer elektromotorischen Kraft mehrere solche Kräfte an verschiedenen Stellen des Leiters gegeben sind, oder wenn der Leiter in Abtheilungen von verschiedenem specifischen Widerstande zerfällt, und daher eine ungleichförmige Vertheilung der elektromotorischen Kraft nach Proportion dieses Widerstandes stattfinden muss. Ueberhaupt ist die Anwendung dieser Methode, abgesehen von dem Umfange der Rechnung, nur dadurch beschränkt, dass lineare Leiter vorausgesetzt werden.

32.

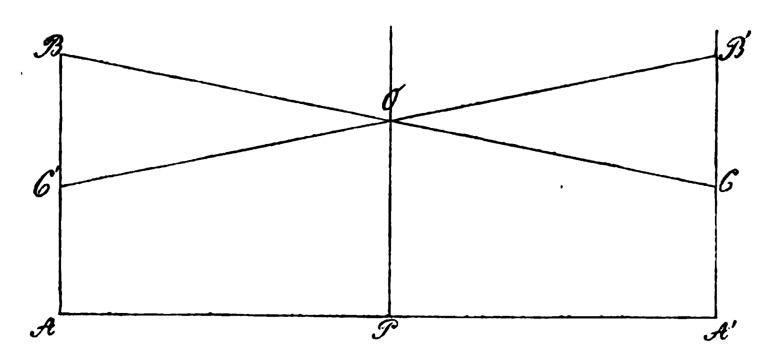
Nachweisung, wie die zu einem gleichförmigen und beharrlichen Strome nothwendige Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des geschlossenen Leiters entstehe.

Es leuchtet ein, dass, wenn nur in einzelnen Punkten einer geschlossenen Kette elektromotorische Kräfte gegeben sind, unmittelbar nur in diesen Punkten eine elektrische Strömung beginnen kann und nicht in der ganzen Kette; denn in allen denjenigen Theilen der Kette, auf welche keine elektromotorischen Kräfte wirken, werden die elektrischen Fluida auch nicht bewegt. Beginnen aber die elektrischen Fluida an den Stellen, wo elektromotorische Kräfte gegeben sind, sich zu be-

wegen, und zwar das positive Fluidum nach der einen Richtung, das negative nach der entgegengesetzten Richtung, während die Fluida vor ihnen noch in Ruhe beharren, so wird durch dieses Fortschieben des positiven Fluidums nach der einen Seite zu auf dieser Seite eine Ansammlung von freier positiver Elektricität hervorgebracht, welche sogleich eine elektromotorische Kraft vorwärts und rückwärts ausübt. Rückwärts schwächt sie die Wirkung der gegebenen elektromotorischen Kraft oder hebt dieselbe auf, vorwärts übt sie eine elektromotorische Kraft in gleichem Sinne aus, wie die gegebene, nur an einer andern Stelle der Kette. Dasselbe gilt auch von dem in entgegengesetzter Richtung fortgeschobenen negativen Fluidum, so lange die elektrischen Fluida in dem vor ihm gelegenen Theile der Kette in Ruhe verharren. Auch die daraus sich ergebende Ansammlung freier negativer Elektricität wirkt sogleich rückwärts und vorwärts, schwächt nämlich rückwärts die Wirkung der gegebenen elektromotorischen Kraft und übt vorwärts eine elektromotorische Kraft in gleichem Sinne aus, wie die gegebene, nur an einer andern Stelle der Kette. Setzt man diese Betrachtung fort, so übersieht man im Allgemeinen, dass nur bei einem gleichförmigen Strome in allen Theilen der Kette diese Ansammlungen freier Elektricität zu wachsen aufhören und stationär werden können, und dass jede Abweichung von der Gleichförmigkeit des Stroms unmittelbar eine Veränderung in diesen Ansammlungen mit sich führt, welche so lange zunimmt, bis die Ungleichförmigkeit des Stroms wieder verschwunden ist.

Die Art. 29, 30 erörterte Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters ist nun zwar der Art, dass kein Gleichgewicht der vertheilten freien Elektricität dabei bestehen kann; denn dazu wäre nöthig, dass die Resultante aller Kräfte, welche ein Theilchen der freien Elektricität an der Oberfläche von allen übrigen erleidet, gegen die Oberfläche senkrecht und nach aussen gerichtet wäre, was nicht der Fall ist. Denn aus der Art. 29 gegebenen Darstellung erhellt von selbst, dass ausser einer gegen die Oberfläche senkrechten, nach aussen gerichteten Kraft noch eine tangentiale Kraft für jedes Theilchen der freien Elektricität an der Oberfläche resultiere, woraus folgt, dass diese freie Elektricität an der Oberfläche nicht in Ruhe beharren könne, sondern an der Strömung, welche im Innern stattfindet, Antheil nehmen müsse. Diese Theilnahme der freien Elektricität der Oberfläche an der Strö-

mung im Innern kann aber mit einer unveränderten Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters wohl bestehen. Denn stellt man die Vertheilung aller strömenden positiven Elektricität, am Rande und im Innern, für den zu einer geraden Linie ausgestreckt gedachten Leiter *AA'* durch die Ordinaten einer anderen geraden



Linie *BC* dar und eben so die Vertheilung aller strömenden negativen Elektricität durch die Ordinaten einer dritten geraden Linie *B'C'*, welche die Linie *BC* in *O* schneidet, so sind nach dieser Darstellung im Querschnitt *OP* beide Fluida in gleicher Menge vorhanden; von *P* nach *A* zu wächst aber der Ueberschuss an positiver Elektricität proportional mit dem Abstande von *P*; von *P* nach *A'* zu wächst der Ueberschuss an negativer Elektricität ebenfalls proportional mit dem Abstande von *P*. Die allgemeine Strömung wird alsdann durch ein gleich schnelles Fortrücken der Linien *BC* und *B'C'* in entgegengesetzter Richtung parallel mit *AA'* dargestellt, woraus sich leicht ergiebt, dass die Ordinate des Schneidungspunktes beider Linien *PO*, d. h. der Indifferenzpunkt der Kette, unverrückt bleibt und dass auch durch dieses Fortrücken das Wachsthum des Ueberschusses an einer von beiden Elektricitäten mit dem Abstande von *P* unverändert bleibt, wenn nur vorausgesetzt werden darf, dass in den Contaktpunkten *A*, *A'* die fortgerückte Elektricität durch neu geschiedene immer so ersetzt wird, dass die fortgerückten Geraden *BC* und *B'C'* rückwärts immer so weit verlängert werden, dass sie bis zu den Ordinaten der Punkte *A*, *A'* sich erstrecken. Nach dieser bildlichen Darstellung könnte es scheinen, als wenn die Menge der zwischen *A* und *A'* strömenden Elektricität immer grösser würde. Dies kommt daher, weil dabei die in *A* und *A'* immer neu geschiedene und nach entgegengesetzten Seiten bewegte Elektricität in Rechnung gebracht ist, während auf die zwischen *A* und *A'* durch Wieder-

vereinigung zur Ruhe kommenden Elektricität keine Rücksicht genommen ist. Diese allmählige Wiedervereinigung beider elektrischen Fluida zwischen A und A' lässt sich aber auch leicht bildlich darstellen durch ein Fortrücken der Abscissenlinie nach oben, welches mit solcher Geschwindigkeit geschehen kann, dass die Ordinate PO immer gleiche Länge behält, wodurch ausgedrückt wird, dass die Menge der daselbst befindlichen positiven und negativen Elektricität unverändert bleibt.

In dieser Darstellung ist das Ohm'sche Gesetz der Proportionalität für die Ladung der Kette angenommen. Sollte auf die in den vorhergehenden Artikeln erörterte Abweichung von diesem Gesetze Rücksicht genommen werden, so müsste zugleich auch der Unterschied der Geschwindigkeit in Rechnung gebracht werden, mit welcher die beiden Elektricitäten strömen müssen, wenn, bei einem vorhandenen Überschuss der einen, gleiche Quantitäten von beiden durch den Querschnitt gehen sollen. Auch dürfte dann, bei genauerer Erörterung, das elektrostatische Princip, welches hier der Einfachheit wegen zum Grunde gelegt worden ist, nicht mehr genügend befunden und daher das Zurückgehen auf das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung für nothwendig erachtet werden.

33.

Während des Drucks dieser Abhandlung ist in Poggendorffs Annalen Bd. 79. S. 506 eine von Herrn Dr. Kirchhoff der physicalischen Gesellschaft zu Berlin gemachte Mittheilung erschienen: „Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst", worin die Principien, auf welchen auch die vorhergehenden Erörterungen beruhen, einer genaueren Prüfung unterworfen worden sind. Insbesondere ist gezeigt worden, dass die Ohm'schen Gesetze der galvanischen Kette in keinem nothwendigen Zusammenhange mit der von Ohm bei ihrer Ableitung, im Widerspruche mit dem elektrostatischen Grundgesetze, gemachten Voraussetzung stehen, dass die Elektricität in einem Leiter sich in Ruhe befinden könne, wenn sie den Rauminhalt desselben mit gleichmässiger Dichtigkeit erfülle; dass vielmehr die Ableitung jener Gesetze unverändert bleibe, wenn man statt jener mit dem elektrostatischen Grundgesetze in Widerspruch stehenden Voraussetzung eine andere damit übereinstimmende

und daraus mit Nothwendigkeit resultierende substituiert, nämlich dass das neutrale elektrische Fluidum in einem Leiter sich in Ruhe befinden könne, wenn das Potential der an seiner Oberfläche vertheilten freien Elektricität im Innern des Leiters überall gleichen Werth hat, und wenn man, im Verlaufe der Ableitung, im Innern des Leiters den Potentialwerth der freien, an der Oberfläche befindlichen Elektricität für die Dichtigkeit der Elektricität setzt, welche nach Ohm im Innern des Leiters selbst stattfinden soll. Die von Kirchhoff hiervon gegebene Nachweisung ist so kurz gefasst, dass sie keinen Auszug gestattet, und es muss deshalb auf das Original selbst verwiesen werden. Es möge daraus nur die Schlussbemerkung angeführt werden, welche Kirchhoff beigefügt hat, durch die er die Zurückführung der Gesetze der galvanischen Kette auf das Grundgesetz der Elektrostatik zu rechtfertigen sucht, da doch die Gesetze der galvanischen Kette elektrodynamische Erscheinungen betreffen, zu deren Erklärung sonst das elektrostatische Grundgesetz im Allgemeinen nicht genügt. Es heisst a. a. O. S. 512:

«Den durchgeführten Betrachtungen liegt das elektrostatische Gesetz der Wirkung elektrischer Theilchen zu Grunde. Aus diesem Gesetze lassen sich die Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen und die Inductionserscheinungen nicht erklären; Weber hat ein allgemeineres Gesetz gefunden, durch welches es ihm gelungen ist, jene Erscheinungen zu erklären, ein Gesetz, in dessen Ausdruck die relative Geschwindigkeit der Theilchen, deren Wirkung auf einander betrachtet wird, vorkommt, und das in das elektrostatische übergeht, wenn diese Geschwindigkeit verschwindet. Um die verschiedenen Felder der Elektricitätslehre unter einen Gesichtspunkt zu bringen, muss man sich daher die Aufgabe stellen, die Gesetze der Strömungen in der geschlossenen Kette aus dem Weber'schen Gesetze abzuleiten. Diese Herleitung scheint schwer zu sein, doch ist es leicht, *a posteriori* zu beweisen, dass die Vorstellung von den Strömungen, zu denen die Annahme des elektrostatischen Gesetzes geführt hat, auch mit dem Weber'schen Gesetze in Einklang ist, wenn man noch eine gewisse Hypothese zu Hülfe nimmt, die Hypothese nämlich, dass bei der Berechnung der Kraft, welche eine Scheidung der beiden Elektricitäten in dem Raumelemente v eines der Leiter hervorbringt, die Elektricitäten in v als ruhend angesehen werden müssen. Diese Annahme hat nichts Widerstrebendes,

wenn man sich vorstellt, dass die Bewegung der Elektricität in einem Leiter nur von Molecül zu Molecül vor sich geht, so dass jedes Elektricitätstheilchen bei einem Molecüle, bei dem es ankommt, einen Ruhepunkt findet. Bei dieser Vorstellung kann man leicht zugeben, dass die Elektricitätsmenge, die von einem Molecüle zu einem benachbarten übergeführt wird, nur durch die Kräfte bedingt wird, die auf die Elektricitätstheilchen ausgeübt werden, während sie noch an jenem Molecül sich in Ruhe befinden, nicht aber durch die Kräfte, die auf sie wirken, während sie schon auf dem Wege zum folgenden Molecül sind. In Bezug auf die Theorie der Induction, die Weber gegeben hat, ist es gleichgültig, ob man diese Annahme macht oder nicht. Macht man dieselbe und denkt sich übrigens die Strömungen in der Kette so, wie sie die Voraussetzung des elektrostatischen Gesetzes ergeben hat, so ist es, in Bezug auf die Grösse und die Richtung der Kraft, welche die Elektricitäten in dem Elemente v zu scheiden strebt, — also in Bezug auf die elektromotorische Kraft, wie Weber sie nennt, — gleichgültig, ob man von dem elektrostatischen oder dem Weber'schen Gesetze ausgeht. Der Unterschied, der möglich wäre, müsste nämlich herrühren von den Kräften, welche die in den andern Theilen des Systems strömenden Elektricitäten ausüben, und diese Kräfte tragen nach Dem, was Weber bewiesen hat, zu jener elektromotorischen Kraft nichts bei, da die Strömungen constant sind und gleiche Mengen der beiden Elektricitäten nach entgegengesetzten Richtungen mit derselben Geschwindigkeit führen.»

34.

Durch Vergleichung elektromotorischer und galvanometrischer Beobachtungen der galvanischen Kette diejenige relative Geschwindigkeit zweier elektrischer Massen zu bestimmen, bei welcher weder Anziehung noch Abstossung stattfindet.

Ist das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms gegeben, so lässt sich darauf eine für die Elektricitätslehre im Allgemeinen wichtige Anwendung gründen. Es leuchtet nämlich ein, dass alsdann die elektromotorische Kraft einer Kette auf doppelte Weise bestimmt werden kann, nämlich erstens aus ihrer Wirkung, d. h. aus der Inten-

sität des von ihr bei einem bekannten Widerstande der Kette hervorgebrachten Stroms. Hierdurch wird die Bestimmung der elektromotorischen Kraft von den Messungen der Stromintensität und des Widerstands der Kette abhängig gemacht, welche beide, wie in dieser Abhandlung gezeigt worden ist, nach absoluten Maassen ausführbar sind. Zweitens kann sie aus ihrer Ursache bestimmt werden, d. h. aus der auf der Oberfläche des Leiters vertheilten freien Elektricität. Sind die Stromintensität i und der Widerstand der Kette w nach den Art. 26 definierten Maassen gefunden, so wird die elektromotorische Kraft der ganzen Kette nach dem dort angegebenen Maasse durch das Produkt

$$iw$$

bestimmt, und dieser Werth kann nach Art. 27 durch Multiplication mit $\frac{4}{c}$ auf das allgemeine Kraftmaass der Mechanik reduciert werden, wo c die relative Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie einander weder anziehen noch abstossen sollen. Die elektromotorische Kraft der ganzen Kette ist also nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik, aus ihrer Wirkung berechnet,

$$= \frac{4}{c}\, iw.$$

Zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft derselben Kette aus ihrer Ursache möge nun der im 30. Artikel gefundene Ausdruck

$$\frac{2a}{rr}\left(\log\cot\frac{\epsilon\alpha}{8r} - \beta\pi\right)$$

zum Grunde gelegt werden, worin β einen kleineren Werth als $\frac{1}{2}$ und einen grösseren als $\frac{3}{8}$ hat. Nach Seite 281 bezeichnet hierin a denjenigen Factor, welcher mit $(\varphi - \pi)d\varphi$ multipliciert die Masse der freien Elektricität giebt, welche auf dem Längenelemente der Kette $rd\varphi$ am Ende des Bogens $r\varphi$ vertheilt ist. Ist nun die Masse der freien Elektricität zweier Elemente der Kette von der Länge dx, das eine am Ende des Bogens $\pi - \chi$, das andere am Ende des Bogens $\pi + \chi$ wirklich gemessen und erstere $= Edx$, letztere $= E'dx$ gefunden, so ist

$$Edx = -a\chi d\chi$$
$$E'dx = +a\chi d\chi$$

und $rd\chi = dx$ zu setzen; folglich

$$a = \frac{r}{2\chi}(E' - E).$$

Setzt man nun diesen Werth für a in obigen Ausdruck, so erhält man

$$\frac{E'-E}{r\chi}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\beta\pi\right).$$

Dieser Ausdruck giebt aber nicht die elektromotorische Kraft für die ganze Länge der Kette, sondern nur für ein dem Längenmaasse gleiches Stück der Kette und muss mit der Länge der Kette $= 2\pi r$ multipliciert werden, wenn die elektromotorische Kraft der ganzen Kette erhalten werden soll, nämlich:

$$\frac{2\pi}{\chi}(E'-E)\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\beta\pi\right).$$

Hiernach ergiebt sich nun endlich durch Gleichsetzung der nach beiden Methoden bestimmten elektromotorischen Kraft der ganzen Kette folgende Gleichung:

$$\frac{4}{c}\,iw=\frac{2\pi}{\chi}(E'-E)\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\beta\pi\right)$$

oder

$$c=\frac{2\chi}{\pi}\,\frac{iw}{E'-E}\cdot\frac{4}{\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\beta\pi}.$$

Es ist also hierdurch diejenige Geschwindigkeit c bestimmt, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie einander weder abstossen noch anziehen sollen. Aus dem Grundgesetze der Wechselwirkung zweier elektrischer Massen, wie es in der ersten Abhandlung über «Elektrodynamische Maassbestimmungen» ausgesprochen worden ist, so wie aus Art. 27 in dieser Abhandlung, wo gezeigt worden ist, dass, wenn diese Geschwindigkeit c bekannt ist, alle elektromotorischen Kräfte nach dem in der Mechanik festgesetzten Kraftmaasse ausgedrückt werden können, leuchtet die Wichtigkeit der Bestimmung dieser Geschwindigkeit c von selbst ein. Bei dieser Bedeutung von c ist es aber selbst schon von Interesse, die Möglichkeit einer solchen Bestimmung nachzuweisen, auch wenn die wirkliche Ausführung auf Hindernisse stossen sollte, welche noch nicht überwunden werden könnten, weil es dazu noch an den geeigneten Instrumenten fehlt. In der That dürften jetzt noch solche Hindernisse der Ausführung der feinen elektrometrischen Messungen entgegenstehen, durch welche die Grössen E' und E gefunden werden sollen. Alle unsere jetzigen Elektroskope und Elektrometer scheinen zur Ausführung dieser Messungen nicht geeignet: es würde damit nur möglich sein, das Verhältniss der Grössen E und E' zu bestimmen, aber nicht ihren absoluten Werth, wenigstens ist bisher kein Versuch dieser Art damit ge-

macht worden. Die Construction neuer Elektroskope und Elektrometer, welche dazu geeigneter wären, bildet aber eine Aufgabe für sich, mit der wir uns hier nicht beschäftigen, weil wir uns in dieser Abhandlung nur auf elektrodynamische Maassbestimmungen beschränken.

35.

Ueber das Verhältniss der Geschwindigkeit der Strömung zur Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Stroms.

Ueber die Geschwindigkeit, mit welcher die elektrischen Fluida selbst in den Leitern sich bewegen, liegen noch gar keine Data vor. Man weiss nur, dass die Geschwindigkeit, mit welcher manche elektrische Phänomene, wie der Blitz, sich verbreiten, sehr gross sein müsse, da auch ihre Verbreitung durch die grössten Räume nicht den kleinsten messbaren Zeitraum erfordert. Eben so weiss man nur, dass die Verbreitung eines galvanischen Stroms durch eine lange Kette mit ausserordentlicher Geschwindigkeit geschehe, weil die Zeit, welche erfordert wird, bis ein an einer bestimmten Stelle der Kette erregter Strom in allen Theilen der Kette gleiche Intensität erlangt, so klein ist, dass sie bisher noch auf keine Weise hat gemessen werden können. Die Versuche von Wheatstone über die Ungleichzeitigkeit der Funken, welche an verschiedenen Stellen eines unterbrochenen Leitungsdrahts hervorgebracht werden, wenn die in zwei Conductoren angesammelten positiven und negativen Elektricitäten durch den Leitungsdraht sich mit einander vereinigen, geben ebenfalls über die Geschwindigkeit, mit welcher die elektrischen Fluida sich bewegen, keine Auskunft, sondern nur über die Fortpflanzung der Bewegung durch das neutrale elektrische Medium im Leitungsdrahte; denn das Erscheinen des Funkens setzt voraus, dass das an der betreffenden Stelle befindliche neutrale elektrische Medium in Bewegung gesetzt worden ist; setzt aber keineswegs voraus, dass die in den beiden Conductoren zuvor angesammelte positive oder negative Elektricität selbst durch den Leitungsdraht bis zu dieser Stelle hin gedrungen sei. Die von Wheatstone beobachtete Ungleichzeitigkeit der Funken an verschiedenen Unterbrechungstellen des Leitungsdrahts kann daher nur Aufschluss geben über die Geschwindigkeit der Verbreitung der Bewegung durch das neutrale elektrische Medium in den dazwischen liegenden Theilen des Leitungsdrahts. Auch in einer ge-

schlossenen und nirgends unterbrochenen Kette, worin durch elektromotorische Kräfte das Gleichgewicht der elektrischen Fluida fortwährend gestört wird, müssen zweierlei Geschwindigkeiten unterschieden werden, nämlich die einer von Theilchen zu Theilchen fortgepflanzten Bewegung und die einer jedem Theilchen eigenthümlichen Bewegung: die erstere heisst die Geschwindigkeit der Stromverbreitung, die letztere heisst die Stromgeschwindigkeit. Bei einem beharrlichen Strome in einer homogenen Kette ist die Stromgeschwindigkeit überall gleich. Ein solcher Strom heisst ein gleichförmiger, weil er sich durch die ganze Kette gleichförmig verbreitet hat, und so lange er unverändert fortdauert, ist von keiner weiteren Stromverbreitung mehr die Rede. Soll von einer Stromverbreitung wieder die Rede sein, so muss irgend eine Veränderung mit dem Strome vorgehen: der Strom muss stärker oder schwächer werden. Es fragt sich dann, ob jede Aenderung in der Stärke des Stroms, d. i. jede Aenderung in der Stromgeschwindigkeit, in allen Theilen der Kette gleichzeitig oder allmählig, in einem Theile nach dem andern, eintritt. Im erstern Falle würde man sagen, der Strom verbreite sich mit unendlicher Geschwindigkeit durch die Kette oder die Geschwindigkeit der Stromverbreitung sei unmessbar; im andern Falle würde man sagen, der Strom verbreite sich mit endlicher Geschwindigkeit durch die Kette, oder die Geschwindigkeit der Stromverbreitung sei messbar. Es geht hieraus hervor, dass die Messung der Geschwindigkeit der Stromverbreitung eine Veränderung oder einen Wechsel der Stromstärke in der Kette voraussetze, ohne welche von einer solchen Messung gar nicht die Rede sein kann.

Es ist nun schon S. 273 an einem Beispiele erläutert worden, dass Aenderungen der Stromstärke oder der Stromgeschwindigkeit in der That möglich sind, welche in allen Theilen der Kette gleichzeitig eintreten, nämlich wenn die gegebenen elektromotorischen Kräfte, welche die Aenderung verursachen, auf alle Theile der Kette unmittelbar, nach Proportion ihres Widerstands, wirken. Ein solcher besonderer Fall beweist aber die Unmessbarkeit der Geschwindigkeit der Stromverbreitung im Allgemeinen noch nicht. Sollte die Geschwindigkeit der Stromverbreitung im Allgemeinen unmessbar genannt werden, so müsste diese Gleichzeitigkeit der Stromänderung in allen Theilen der Kette in allen Fällen stattfinden, insbesondere auch dann, wenn die

gegebene elektromotorische Kraft, welche die Aenderung verursacht. unmittelbar nur auf einen Theil der Kette wirkt. Für diesen Fall ergiebt sich aber aus dem in den vorhergehenden Artikeln erörterten Zusammenhange der Gesetze der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen, dass die veränderte Stromgeschwindigkeit in demjenigen Theile der Kette, wo sie durch die gegebene elektromotorische Kraft unmittelbar hervorgebracht wurde, einige Zeit gedauert haben müsse, ehe sie in anderen Theilen der Kette eintreten könne, nämlich darum, weil dem Eintritt dieser Stromänderung in andern Theilen der Kette nothwendig eine neue Ansammlung freier Elektricität vorangegangen sein muss, welche auf diese Theile der Kette eine elektromotorische Kraft ausübt, welche zur Hervorbringung der Stromänderung in diesen Theilen nothwendig ist. Diese neue Ansammlung freier Elektricität kann aber nur durch die Stromänderung in einem Theile der Kette in derjenigen Zeit hervorgebracht werden, in welcher in den übrigen Theilen der Kette diese Stromveränderung noch nicht stattgefunden hat. Es ergiebt sich also hieraus, dass die durch eine gegebene elektromotorische Kraft unmittelbar nur an einer Stelle der Kette hervorgebrachte Stromänderung unmöglich in allen andern Theilen der Kette ganz gleichzeitig eintreten könne, sondern sie kann nur allmählig in einem Theile nach dem andern entstehen, nachdem die zu ihrer Hervorbringung in jedem Theile nothwendige Ansammlung freier Elektricität sich vorher gebildet hat.

Hält man sich z. B. der Einfachheit wegen an die näherungsweise zulässige Ohm'sche Hypothese von der Vertheilung der freien Elektricität im Leiter, wonach die freie Elektricität des Längenelements der Kette $rd\varphi$ am Ende des Bogens φ durch $a(\varphi-\pi)\,d\varphi$ dargestellt wird, so ergiebt sich hieraus für die freie negative Elektricität der einen Hälfte des kreisförmigen Leiters der Integralwerth

$$= a\int_0^{\pi}(\varphi-\pi)\,d\varphi = -\frac{\pi\pi}{2}\,a,$$

für die freie positive Elektricität der anderen Hälfte der Integralwerth

$$= a\int_{\pi}^{2\pi}(\varphi-\pi)\,d\varphi = +\frac{\pi\pi}{2}\,a,$$

worin nach S. 296

$$a = \frac{r}{2\chi}(E' - E)$$

ist, wenn Edx die Masse der freien Elektricität des Längenelements dx am Ende des Bogens $r(\pi - \chi)$, $E'dx$ die Masse der freien Elektricität eines gleich langen Elements dx am Ende des Bogens $r(\pi + \chi)$ bezeichnet. Die Länge des zwischen diesen beiden Elementen liegenden Stücks der Kette ist folglich $= 2r\chi$. Bezeichnet man nun die Masse der freien Elektricität zweier eben solcher Elemente dx, zwischen denen aber nur ein dem Längenmaasse gleiches Stück der Kette liegt, mit εdx und $\varepsilon' dx$, so erhält man

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{E' - E}{2r\chi},$$

folglich

$$a = rr(\varepsilon' - \varepsilon),$$

und setzt man diesen Werth von a in den obigen Ausdruck des Integralwerthes der freien negativen und positiven Elektricität, so erhält man dafür

$$-\frac{\pi\pi rr}{2}(\varepsilon' - \varepsilon) \text{ und } + \frac{\pi\pi rr}{2}(\varepsilon' - \varepsilon).$$

Die hieraus resultierende elektromotorische Kraft ist nach S. 297

$$\frac{2\pi}{\chi}(E' - E)\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right) = 4\pi r(\varepsilon' - \varepsilon)\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right).$$

Bezeichnet man den Widerstand des Leiters für die Einheit der Länge und des Querschnitts, nach dem Art. 27 festgesetzten Maasse, mit k und folglich den Widerstand der ganzen Kette, deren Länge $= 2\pi r$ und deren Querschnitt $= \pi\alpha\alpha$ ist, durch $\frac{2r}{\alpha\alpha}k$; so stellt der Quotient jener elektromotorischen Kraft und dieses Widerstands die Stromintensität eu dar, wo e die Masse der in einem dem Längenmaasse gleichen Stücke der Kette enthaltenen positiven oder negativen Elektricität und u die Stromgeschwindigkeit bezeichnet, folglich

$$4\pi r(\varepsilon' - \varepsilon)\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right) = \frac{2r}{\alpha\alpha}k \,.\, eu.$$

Soll nun in dieser Kette die Stromintensität eu in dem Verhältniss von $1 : n$ sich ändern, so muss neu an die Stelle von eu treten, folglich auch $n(\varepsilon' - \varepsilon)$ an die Stelle von $(\varepsilon' - \varepsilon)$, wodurch der Integralwerth der freien negativen und positiven Elektricität folgenden Ausdruck erhält:

$$-\frac{\pi\pi rr}{2}\cdot n(\varepsilon' - \varepsilon) \text{ und } + \frac{\pi\pi rr}{2}\cdot n(\varepsilon' - \varepsilon).$$

Die Aenderung dieses Integralwerths ergiebt sich hieraus

$$= -\frac{\pi\pi rr}{2}(n-1)(\varepsilon'-\varepsilon) \text{ und } = +\frac{\pi\pi rr}{2}(n-1)(\varepsilon'-\varepsilon).$$

Die Möglichkeit dieser Aenderung setzt aber voraus, dass die Zunahme der Stromgeschwindigkeit $= (n-1)u$ am Anfange der Kette, wo die Verstärkung der elektromotorischen Kraft stattfindet, durch welche die Aenderung der Stromintensität bewerkstelligt wird, früher eintrete, als in der Mitte der Kette, welche von dieser Stelle am weitesten entfernt ist, und zwar um einen Zeitraum T, in welchem in Folge der Geschwindigkeitsänderung $(n-1)u$ durch den Querschnitt der Kette eine Masse negativer oder positiver Elektricität $= (n-1)eu \,.\, T$ geht, welche der obigen Aenderung des Integralwerths gleich ist, woraus folgende Gleichung sich ergiebt:

$$\frac{\pi\pi rr}{2}(n-1)(\varepsilon'-\varepsilon) = (n-1)eu \,.\, T.$$

Hieraus folgt, mit Zuziehung der vorher gefundenen Gleichung

$$4\pi r(\varepsilon'-\varepsilon)\left(\log\cot\frac{ea}{8r}-\beta\pi\right) = \frac{2r}{aa}k \,.\, eu,$$

der Zeitraum T

$$T = \frac{\pi\pi rr}{2}\cdot\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{eu} = \frac{\pi rr}{4aa}\,\frac{k}{\log\cot\frac{ea}{8r}-\beta\pi}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass im ersten Augenblicke der Aenderung die Stromgeschwindigkeit im ersten Elemente der Kette sogleich von n zu nu übergehe und dass diese neue Stromgeschwindigkeit nu in diesem Elemente von dann an unverändert beharre. Unter der Voraussetzung, dass ein ähnlicher plötzlicher Uebergang der Stromgeschwindigkeit von u zu nu in allen Theilen der Kette stattfinde, lässt sich endlich die Geschwindigkeit der Stromverbreitung in jedem Theile der Kette bestimmen. Unter dieser Voraussetzung wird nämlich die Zeit t, in welcher der Strom durch ein dem Bogen $r\psi$ entsprechendes Stück der Kette fortgepflanzt wird, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$t = \frac{\psi\psi rr}{4\pi aa}\cdot\frac{k}{\log\cot\frac{eu}{8r}-\beta\pi}.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung in Beziehung auf t und ψ erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$,

$$\frac{rd\psi}{dt} = \frac{2\pi aa}{kr\psi}\left(\log\cot\frac{ea}{8r}-\beta\pi\right),$$

wonach also diese Geschwindigkeit desto kleiner ist, je grösser das Stück $r\psi$ der Kette ist, durch welches sich die Stromänderung schon verbreitet hat.

In diesem Ausdrucke der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet k den Widerstand des Leiters für die Einheit seiner Länge und seines Querschnitts und zwar nach dem Art. 27 definierten Maasse. Bezeichnet man mit q den nach bekannten Methoden messbaren Widerstand desselben Leiters für dieselbe Länge und denselben Querschnitt nach dem Art. 26 definierten Maasse, so ist nach Art. 27

$$k = \frac{16}{cc} q ,$$

und setzt man diesen Werth von k in die obige Gleichung, so erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$,

$$\frac{rd\psi}{dt} = \frac{\pi ccaa}{8qr\psi} \left(\log \cot \frac{\epsilon a}{8r} - \beta\pi\right) ,$$

woraus hervorgeht, dass, wenn die Geschwindigkeit c bekannt wäre, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie sich weder anziehen noch abstossen sollen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$ daraus berechnet werden könnte, und dass umgekehrt, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$ gemessen würde, jene Geschwindigkeit c sich daraus berechnen lassen würde. Könnten aber beide Geschwindigkeiten c und $\frac{rd\psi}{dt}$ aus unabhängigen Beobachtungen bestimmt werden, so würden dadurch die Mittel gewonnen, die Richtigkeit der obigen Gleichung an der Erfahrung zu prüfen. Es ergiebt sich aus dieser Gleichung, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$ nicht bloss in verschiedenen Ketten, sondern auch an verschiedenen Stellen einer und derselben Kette verschieden ist; denn der Zahlencoefficient $\frac{1}{8}\left(\log \cot \frac{\epsilon a}{8r} - \beta\pi\right)$ hat für verschiedene Ketten verschiedene Werthe, und in einer und derselben Kette, für welche der Zahlencoefficient $\frac{1}{8}\left(\log \cot \frac{\epsilon a}{8r} - \beta\pi\right) = n$ gegeben ist, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an einer bestimmten Stelle der Kette dem Widerstande desjenigen Stücks $r\psi$ umgekehrt proportional, durch welches die Stromverbreitung von ihrem Ursprunge an bis dahin stattgefunden hat. Bezeichnet man diesen Widerstand nach dem Art. 26 definierten Maasse mit $w = \frac{r\psi}{\pi aa} \cdot q$, so ist $\frac{rd\psi}{dt} = n \cdot \frac{cc}{w} \cdot$ Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nimmt also ab, je weiter die Verbreitung von ihrem Ursprunge sich entfernt, und wird also in recht langen Ketten sich viel leichter messen lassen, als in kürzeren.

Was aber endlich die Stromgeschwindigkeit u betrifft, so sieht man

leicht, dass die Bestimmung derselben, abgesehen von den Hindernissen, welche die Ausführung der Messung der Geschwindigkeit c auf dem Art. 34 oder auf dem in diesem Artikel angegebenen Wege findet, vorzüglich an der gänzlichen Unkenntniss derjenigen Masse positiver oder negativer Elektricität $\pm e$ scheitert, welche in einem dem Längenmaasse gleichen Stücke des Leiters enthalten ist; denn zur Bestimmung des Products eu hat man nach Art. 27 die Gleichung

$$eu = \frac{c}{4} i,$$

wo i in bekannter Weise gemessen werden kann. Die Möglichkeit, über die Werthe von e und u einzeln Auskunft zu erhalten, würde, wie es scheint, darauf beruhen, dass der Widerstand eines Leiters, welcher bisher nur aus seinen Wirkungen definiert worden ist, nämlich aus der Abhängigkeit, in welcher bei einer gegebenen elektromotorischen Kraft die Stromintensität von ihm steht, auch aus seinen Ursachen näher definiert werden könnte. Gelänge es nämlich, die Ursachen des Widerstands in den Leitern zu erforschen, und ergäbe sich daraus zum Beispiel, dass der Widerstand eines Leiters von dem Werthe e, welcher dem Leiter zukommt, abhängig sei, und zwar, dass derselbe desto grösser oder kleiner sei, je kleiner oder grösser der Werth von e sei, und durch $\frac{d}{e}$ dargestellt werden könne, wo d unabhängig von e aus der sonstigen Beschaffenheit des Leiters bestimmt werde; so leuchtet ein, dass nach Art. 27 für i der Quotient der elektromotorischen Kraft $\frac{4}{c}\varepsilon$ (worin ε nach Art. 26 messbar ist) und des Widerstands $\frac{d}{e}$ gesetzt werden kann, folglich

$$eu = \frac{c}{4} i = \frac{\varepsilon}{d} e$$

also

$$u = \frac{\varepsilon}{d}.$$

Aus dieser Bestimmung von u würde dann zugleich auch der Werth von e sich ergeben. Es geht hieraus die Wichtigkeit hervor, welche eine nähere Nachforschung über die bisher noch nicht erörterten Ursachen des Widerstands für die Elektricitätslehre haben könnte.

36.

Ueber die Ursachen des Widerstands der Leiter.

Zu einer vollständigen Kenntniss des Widerstands genügt es nicht, die Grösse des Widerstands aus seinen Wirkungen zu definieren, d. i. aus der Stärke des durch eine gegebene elektromotorische Kraft her-

vorgebrachten Stroms, sondern es gehört auch dazu, die Grösse des Widerstands aus ihren Ursachen zu definieren. Ohne diese wesentliche Ergänzung ist unsere Kenntniss von dem Wesen des Widerstands mangelhaft, und die ermittelte Grösse desselben ist eine blosse Hülfsgrösse der Elektrodynamik, deren wahre physische Bedeutung noch unbekannt ist. Wenn nun der Widerstand bisher bloss nach seinen Wirkungen betrachtet worden ist, so liegt der Grund davon darin, dass über die Ursachen desselben bisher noch gar nichts Wesentliches ermittelt worden ist. Es ist bloss die Abhängigkeit des Widerstands von den äusseren Dimensionen des Leiters, nämlich von seiner Länge und von seinem Querschnitt, ermittelt worden, aber diese Abhängigkeit betrifft bloss den absoluten Widerstand eines Leitungsdrahts und hat keine Beziehung auf den specifischen Widerstand des leitenden Metalls, über dessen Ursachen gar nichts bekannt ist. Diese Ursachen scheinen so tief in der Natur der Körper verborgen zu liegen, dass sie auf den bisherigen Wegen der Forschung unzugänglich sind. Kurz, die Frage nach den Ursachen des galvanischen Widerstands führt zu einem noch ganz unangebauten Gebiete der Wissenschaft. Ich werde mich daher nur auf eine einzelne Erörterung beschränken, nämlich darüber, in welcher Beziehung dieser Widerstand mit der Natur der elektrischen Fluida selbst, wie dieselben definiert worden sind, und mit deren Verhalten im elektrischen Doppelstrome stehe, wie dasselbe nach der gewöhnlichen Vorstellung auch hier immer angenommen und festgehalten worden ist.

Die Frage nach den Ursachen des Widerstands lässt sich zunächst specieller darauf richten, in wie weit diese Ursachen in dem ponderabelen Träger des Stroms, und in wie weit dieselben in den darin enthaltenen elektrischen Fluidis liegen. Dass die Gegenwart der ponderabelen Theile die Canäle, durch welche die elektrischen Fluida strömen, mehr oder weniger beengen und dadurch auf die elektrische Strömung Einfluss haben können, leuchtet von selbst ein; es fragt sich aber, ob diese Ursache zur Erklärung des Widerstands allein schon genüge. Diese Ursache des Widerstands würde bloss die Masse des elektrischen Fluidums beschränken, welche an der Strömung Theil nehmen könnte. Es liegt aber in dem Wesen des Widerstands, wie wir ihn aus seinen Wirkungen kennen, dass durch die Grösse des Widerstands nicht bloss die Masse des elektrischen Fluidums beschränkt wird, welche an der Strombewegung Theil nimmt, sondern, dass auch die Bewegung selbst

beschränkt wird. Diese Beschränkung der Bewegung selbst kann aber ihren Grund in der blossen Gegenwart der ponderabelen Theile nicht haben, sondern setzt nothwendig Kräfte voraus, welche den fortwirkenden elektromotorischen Kräften der Kette das Gleichgewicht halten, weil ohnedem jene Kräfte die elektrischen Fluida in ihrer Bewegung immerfort beschleunigen müssten, was bei einem gleichförmigen und beharrlichen Strome nicht der Fall ist.

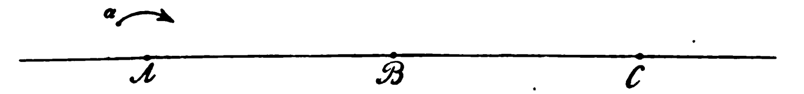
Es fragt sich also ferner, woher die Kräfte rühren, welche bei einem gleichförmigen und beharrlichen Strome den fortwirkenden elektromotorischen Kräften das Gleichgewicht halten und dadurch eine fernere Beschleunigung der elektrischen Fluida in ihrer Bewegung verhindern? Sind diese Kräfte rein elektrische Kräfte, oder sind es Kräfte, welche die ponderabelen Theile auf die elektrischen Fluida, die an ihnen vorbeigehen, ausüben? Setzen wir in dem galvanischen Strome, wie wir es stets gethan haben, zwei elektrische Fluida voraus, die gleichzeitig durch denselben Leiter in entgegengesetzten Richtungen strömen, so liegt es sehr nahe, eine Ursache des Widerstands für die Bewegung jedes Fluidums in dem ihm entgegenkommenden Fluidum zu suchen. Das positive und das negative Fluidum werden nämlich in dem Augenblicke der Begegnung sich zu neutralem Gemische verbinden, und so leicht auch diese neutrale Verbindung wieder zu scheiden sein möge, so wird doch eine solche neue Scheidung nur durch eine neue elektromotorische Kraft erfolgen können, und nicht in Folge einer Beharrung derjenigen Bewegungen, welche beide Fluida vor ihrer Vereinigung besassen, weil diese durch ihre Begegnung und Verbindung mit einander als aufgehoben betrachtet werden muss. Es geht daraus hervor, dass während jedem Fluidum für sich bei seinen Bewegungen Beharrung zugeschrieben werden muss, beiden Fluidis zusammen bei ihrer Bewegung im Doppelstrome keine Beharrung zukommt. Wenn aber auch dieser Grund, warum den elektrischen Fluidis bei ihrer Bewegung im Doppelstrome keine Beharrung zukommt, der richtige ist, so gewinnt man doch dadurch noch keine deutliche Einsicht in den Hergang selbst, so lange die Kräfte unbekannt sind, welche die Verbindung und Vereinigung der elektrischen Fluida bei ihrer Begegnung bewirken, und welche bei ihrer wiederholten Scheidung überwunden werden müssen. Es fragt sich, ob dabei noch andere Kräfte in Betracht kommen, als diejenigen, welche durch das allgemeine elektrische Grund-

gesetz schon bestimmt sind, z. B. ob dabei besondere Molecularkräfte der elektrischen Fluida wirksam sind. Wäre dies nicht der Fall, so müsste der Hergang bei der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida im Doppelstrome nach dem bekannten Grundgesetze der elektrischen Wirkung genauer bestimmt werden. Ohne eine solche genauere Bestimmung lässt sich im Allgemeinen nur mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dass die Intensität eines elektrischen Doppelstroms ausser von der Masse der elektrischen Fluida, welche an der Strömung Theil nimmt, von der Zahl der Scheidungen abhänge, welche in bestimmter Zeit erfolgen, und dass die Zahl dieser Scheidungen der während dieser Zeit fortwirkenden elektromotorischen Kraft proportional sein müsse. Ergäbe sich z. B., dass durch gleiche elektromotorische Kraft jedes elektrische Theilchen in gleicher Zeit immer eine gleiche Zahl Verbindungen und Scheidungen erlitte und dadurch eine gleiche Wegstrecke fortgeführt würde, so wäre die Stromgeschwindigkeit u für gleiche elektromotorische Kraft immer die nämliche, und es würde dann die Stromintensität für gleiche elektromotorische Kraft bloss mit der Menge der Elektricität e variiren, welche auf einer solchen Wegstrecke (z. B. in der Längeneinheit des Leiters) enthalten wäre, und zwar proportional damit sein, woraus hervorginge, dass der sogenannte Widerstand gleichfalls nur mit e variirte und zwar dem Werthe von e umgekehrt proportional wäre, welches derjenige Fall ist, welcher am Ende des vorigen Artikels als Erläuterung angeführt wurde.

Sollte in der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida bei ihrer Begegnung im Doppelstrome die Ursache des Widerstands wirklich enthalten sein, so würde daraus ferner die Unmöglichkeit eines beharrlichen Doppelstroms ohne fortwirkende äussere elektromotorische Kraft folgen, und es würde sich dann fragen, wie damit die Annahme von beharrlichen Molecularströmen zur Erklärung der magnetischen und diamagnetischen Erscheinungen verträglich wäre. Die Möglichkeit solcher Molecularströme müsste dann nothwendig auf einer Wirkung der ponderabelen Molecule beruhen, durch welche die Bahnen der in entgegengesetzten Richtungen um jene Molecule sich bewegenden elektrischen Fluida von einander getrennt erhalten würden, indem z. B. das eine Fluidum eine engere Kreisbahn, das andere Fluidum eine weitere Kreisbahn um das Mole-

cule beschriebe, sodass die beiden Fluida sich bei ihren Bewegungen nirgends begegnen und vereinigen könnten.

Zur Erläuterung des Hergangs bei der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida im Doppelstrome, wie er aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung ohne Zuziehung besonderer Molecularkräfte dieser Fluida abzuleiten wäre, diene folgende Betrachtung. In A, B, C . . seien positiv elektrische Massen, von denen zunächst angenommen werden möge, dass sie an den Orten, wo sie sich befinden, festgehalten würden. In a befinde sich gegenwärtig eine



bewegliche negativ elektrische Masse, auf welche die benachbarte positive Masse in A so stark wirke, dass dagegen die Wirkung der entfernten Massen in B, C . . vernachlässigt werden könne. Die Massen in A und a wirken auf einander mit einer Kraft, die von ihrer Grösse, Entfernung, relativen Geschwindigkeit und deren Aenderung abhängt; indess möge hier der Einfachheit wegen angenommen werden, dass die aus der relativen Geschwindigkeit und deren Aenderung sich ergebende Correction der elektrostatischen (von den Massen und der Entfernung abhängigen) Kraft gegen diese letztere so gering sei, dass sie ebenfalls vernachlässigt werden dürfe. Unter diesen Voraussetzungen folgt, dass, wenn keine andere Kraft auf die Masse in a wirkt, diese Masse den Gesetzen der Bewegung durch Centralkräfte, welche dem Quadrat der Entfernung verkehrt proportional sind, folgen müsse. Die Masse in a wird folglich nach den Kepler'schen Gesetzen z. B. eine elliptische Bahn um A beschreiben. Es wird aber eine Störung in dieser Bewegung der betrachteten Masse um A eintreten, sobald ausser der Centralkraft eine elektromotorische Kraft parallel mit der Linie AB mit constanter Intensität auf die betrachtete Masse wirkt. Die Elemente der bisherigen elliptischen Bewegung werden nun fortwährend geändert werden, und die von der betrachteten Masse beschriebene Bahn wird dadurch in eine Spirallinie übergehen, in welcher die betrachtete Masse endlich so weit von A fortgeführt wird, dass sie aus der Wirkungssphäre von A in die Wirkungssphäre von B gelangt, und so fort, nachdem sie eine Anzahl Spiralwindungen um B beschrieben hat, auch von B so weit fortgeführt wird, dass sie aus der Wirkungssphäre von B in

die Wirkungssphäre von C gelangt. Auf diese Weise kann also eine elektromotorische Kraft ein Fortströmen der negativen Elektricität in der Richtung ABC bewirken, an welchem die positiven Massen in A, B, C keinen Antheil nehmen. Das Wesentliche dieser Betrachtung besteht darin, dass, sobald die elektromotorische Kraft zu wirken aufhört, die betrachtete Masse sogleich wieder nach den Kepler'schen Gesetzen in elliptischer Bahn um diejenige positive Masse sich bewegen wird, in deren Nähe sie sich gerade befindet, weil nach Wegfall der störenden Kraft keine weitere Aenderung der Elemente ihrer Centralbewegung stattfindet. Auch ersieht man leicht, dass in dieser wesentlichen Beziehung nichts geändert werden würde, wenn die positiven Massen in A, B, C . . . gleichfalls beweglich angenommen und ausser der Centralkraft der negativen Massen, in deren Nähe sie sich befinden, der störenden Einwirkung der nämlichen elektromotorischen Kraft unterworfen würden, welche aber für diese positiven Massen die entgegengesetzte Richtung, wie für die negativen hätte. Es ergiebt sich daraus folgendes Resultat. Wenn die elektromotorische Kraft c auf die betrachtete negative Masse allein wirkte, so würde sie dieser Masse in der Richtung ABC während der Zeit t eine Geschwindigkeit ct ertheilen, mit welcher sich diese Masse, auch nachdem die Kraft c zu wirken aufgehört hätte, beharrlich in der Richtung ABC fortbewegen müsste. Unter Mitwirkung der Centralkräfte der positiven Massen in A, B, C . . aber wird zwar die elektromotorische Kraft c ebenfalls, so lange sie wirkt, ein Fortrücken der betrachteten Masse in der Richtung ABC bewirken, sobald die Kraft c aber zu wirken aufhört, wird auch dieses Fortrücken aufhören, d. h. dieses Fortrücken der betrachteten Masse in der Richtung ABC geschieht dann nicht mit einer Geschwindigkeit, welche fortdauert, nachdem die Kraft zu wirken aufgehört, welche das Fortrücken hervorgebracht hat. Der Grund also, warum die betrachtete Masse in der Richtung ABC nicht weiter fortrückt, nachdem die elektromotorische Kraft zu wirken aufgehört hat, liegt darnach in den von den positiven Massen auf die betrachtete negative Masse ausgeübten Centralkräften. Das Wort Widerstand bezeichnet aber in der Theorie der galvanischen Kette wesentlich nichts Anderes, als das Factum, dass die Fortbewegung der elektrischen Fluida im galvanischen Strome der elektromotorischen Kraft proportional ist, d. h. aufhört, sobald die elektromotorische Kraft zu wirken aufhört. Es folgt also daraus,

dass der Grund des Widerstands in den Centralkräften liegen kann, welche die im elektrischen Doppelstrome sich begegnenden positiven und negativen Massen wechselseitig auf einander ausüben. Es würde für weitere theoretische Untersuchung wichtig sein, aus diesem Grunde eine bestimmte und präcise Definition des Widerstands abzuleiten und die Beziehungen zu entwickeln, in welchen der nach seiner Wirkung definierte Widerstand dazu stehe. Es würde dabei hauptsächlich auf eine Bestimmung der Zeit ankommen, welche ein Theilchen braucht, um in seiner Spiralbahn von einer Windung um eine Centralmasse A zur entsprechenden Windung um die darauf folgende Centralmasse B zu gelangen. Dass aber solche Bestimmungen, auch wenn alle wesentlichen Elemente für die Rechnung gegeben sind, grosse Schwierigkeiten finden, zeigt die Theorie der Störungen in der Astronomie.

VI.

VERGLEICHUNG DES ALLGEMEINEN PRINCIPS DER MATHEMATISCHEN THEORIE INDUCIERTER ELEKTRISCHER STROEME VON NEUMANN MIT DEN AUS DEM GRUNDGESETZE DER ELEKTRISCHEN WIRKUNG ABGELEITETEN INDUCTIONSGESETZEN.

37.

In der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen ist schon im 26. Art. die Abhandlung angeführt worden, welche Neumann im Jahre 1845 der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelegt hatte, nämlich: «Die mathematischen Gesetze der inducierten Ströme». Diese damals noch nicht gedruckte Abhandlung konnte dort nur nach dem in Poggendorffs Annalen davon erschienenen Auszuge citiert werden. Neumann hat seitdem über denselben Gegenstand der Berliner Akademie der Wissenschaften eine noch umfassendere Arbeit vorgelegt: «Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducierter Ströme», welche, aus den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften von 1847 besonders abgedruckt, Berlin bei Reimer, 1848, erschienen ist. In dieser Abhandlung hat Neumann folgendes allgemeine Theorem aufgestellt:

«Wird ein geschlossenes, unverzweigtes, leitendes Bogensystem $A_{,}$ durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente, aber ohne Aufhebung der leitenden Verbindung derselben, in ein anderes $A_{,,}$ von neuer Form und Lage übergeführt, und geschieht diese Veränderung von $A_{,}$ in $A_{,,}$ unter dem Einflusse eines elektrischen Stromsystems $B_{,}$, welches gleichzeitig durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente eine Veränderung in Lage, Form und Intensität von $B_{,}$ in $B_{,,}$ erfährt, so ist die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche in dem leitenden Bogensysteme durch diese Veränderung inducirt worden sind, gleich dem mit der Inductions-Constante ε multiplicierten Unterschied der Potentialwerthe des Stroms $B_{,,}$ in Bezug auf $A_{,,}$ und des Stroms $B_{,}$ in Bezug auf $A_{,}$, wenn $A_{,,}$ und $A_{,}$ von der Stromeinheit durchströmt gedacht werden.»

Nachdem hierauf Neumann in den vier ersten Paragraphen seiner Abhandlung dieses Theorem nebst seinen Folgerungen entwickelt hat, führt er § 5 fort: «W. Weber hat in seiner Abhandlung: Elektrodynamische Maassbestimmungen u. s. w. den Weg gebahnt, welcher über die Kluft in unserer Kenntniss der elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkung der Elektricität führen wird. Er zeigt, wie die Ampère'schen Gesetze für die Wirkung zweier Stromelemente aus der Wirkung der positiven und negativen Elektricität des einen Elements auf die beiden Elektricitäten des anderen Elements abgeleitet werden können. Diese Analyse der Ampère'schen Gesetze führte zu dem Grundgesetze zweier elektrischen Massen, nach welchem diese nicht allein von ihrer relativen Entfernung, sondern auch relativen Geschwindigkeit und deren Veränderung abhängig ist. Dieses Grundgesetz erklärt zugleich, wie Weber gezeigt hat, die Inductions-Erscheinungen und giebt ihre Gesetze. Der Gegenstand dieses Paragraphen ist nachzuweisen, wie weit die im Vorhergehenden enthaltenen Resultate mit den aus Webers Grundgesetz der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductions-Gesetzen übereinstimmen.»

Aus diesem Grundgesetze der elektrischen Wirkung, wie es in der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen aufgestellt worden ist, entwickelt nun Neumann a. a. O. in seiner Abhandlung einen allgemeinen Ausdruck für die Induction, welchen er sodann auf die verschiedenen Arten der Induction in Anwendung bringt, näm-

lich 1) auf den Fall, wo weder die Strom- noch die Leiterelemente eine Ortsveränderung erleiden und die Induction bloss von einer Aenderung der Stromintensität herrührt; 2) auf den Fall, wo die Induction bloss durch eine Ortsveränderung der Leiterelemente hervorgebracht wird, die unter dem Einflusse eines constanten und unverrückten Stroms stattfindet; 3) auf den Fall, wo der inducierte Leiter ruht und die Induction durch eine Bewegung des ganzen Trägers eines constanten Stroms erregt wird. In allen diesen Fällen ergiebt sich nun das Resultat, dass die aus jenem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductionsgesetze mit den Resultaten des von Neumann aufgestellten allgemeinen Princips der mathematischen Theorie inducierter Ströme vollkommen übereinstimmen.

«Anders verhält es sich», führt Neumann fort, «mit der Gleichung, welche die von einem einfachen Stromumgange inducierte elektromotorische Kraft unter der Annahme ausdrückt, dass derselbe aus einem bewegten Leiterstücke und einem ruhenden besteht. Die Summe der elektromotorischen Kraft, welche während des Umlaufs der Elemente des Inducenten erregt wird, ist nach beiden Formeln dieselbe, die Richtung des inducierten Stroms aber die entgegengesetzte.»

Zur Entscheidung nun, ob in diesem einzigen Falle, wo zwischen dem von Neumann aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductionsgesetze und zwischen dem Resultate seines eigenen allgemeinen Princips der mathematischen Theorie inducierter Ströme eine Abweichung stattfindet, dieses oder jenes wirklich gelte, hat Neumann in seiner Abhandlung einige Versuche angeführt, welche bewiesen haben, dass die aus Neumanns allgemeinem Principe abgeleitete Formel auch in diesem Falle die richtige sei. Auch ich habe, wie unten beschrieben werden wird, diese Versuche wiederholt und habe das von Neumann erhaltene Resultat vollkommen bestätigt gefunden. Nachdem durch diese Versuche das wahre, für diesen Fall gültige Gesetz factisch sicher gestellt ist, unterwirft Neumann die von ihm selbst gegebene Ableitung des Inductionsgesetzes dieses Falles aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung einer näheren Prüfung. «Es muss also untersucht werden», sagt er, «worin bei Ableitung der Formel aus Weber's Grundgesetz gefehlt worden ist. Der Umstand, dass der in Rede stehende Widerspruch nur bei Inducenten mit Gleitstellen eintritt, führt die

Betrachtung sogleich auf diese. Hier treten neue Elemente in die Strombahn ein oder heraus, in welchen also die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von i bis 0 verändert, und die durch diese ihre Intensitätsveränderung einen inducierenden Effect ausüben, welcher in meinen Formeln schon enthalten ist, der aber bei der Anwendung des Weber'schen Grundgesetzes noch berücksichtigt werden muss.» Diese Prüfung führt Neumann zu dem Resultate, dass dieser zweite Theil der Induction, welcher in der ersten Ableitung aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht berücksichtigt worden war, den fraglichen Widerspruch zur Hälfte ausgleicht, indem sich dann die Summe der elektromotorischen Kräfte aus dem ersten und aus dem zweiten Theile = 0 ergiebt.

Nach dieser zu keinem befriedigenden Resultate führenden Prüfung der Rechnung geht endlich Neumann noch zu einer Prüfung der dieser Rechnung zum Grunde liegenden Voraussetzung von den in diesem Falle stattfindenden physischen Verhältnissen über, unter welchen die Induction geschehe. Diese Voraussetzung besteht darin, dass in den Leiterelementen, welche an den Gleitstellen in die Strombahn ein- oder heraustreten, die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis i oder von i bis 0 verändere. Es ist nun aber eine Bedingung für einen beharrlichen Strom, dass in allen Elementen der geschlossenen Kette eine gleiche Stromintensität stattfinde, und wenn daher auch die Stromintensität in den an der Gleitstelle ein- oder heraustretenden Elementen variiert, so scheint doch auch hier der mittlere Werth der Stromintensität für die kurze Zeit, wo sie variiert, jener Bedingung genügen zu müssen, was, wenn die in der ganzen Kette gleiche Stromintensität $= i$ sein soll, voraussetzt, dass in den an der Gleitstelle ein- oder heraustretenden Elementen die Stromstärke sich von 0 bis $2i$ oder von $2i$ bis 0 verändere. Unter dieser Voraussetzung von den physischen Verhältnissen, unter welcher die Induction in diesem Falle stattfindet, lässt sich nun leicht beweisen, dass der anfänglich bemerkte Widerspruch gänzlich verschwindet und die aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductionsgesetze auch für diesen Fall mit Neumanns allgemeinem Princip der mathematischen Theorie inducierter Ströme übereinstimmen.

Was nun aber die Voraussetzung selbst betrifft, worauf hierbei die Hebung des fraglichen Widerspruchs beruht, so sagt Neumann dar-

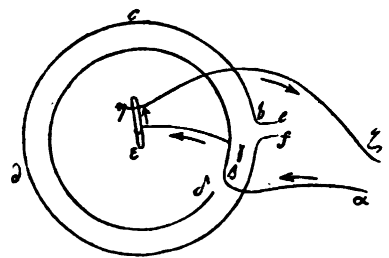
über, dass sie «weniger durch ihre Evidenz als durch ihren Erfolg gerechtfertigt» werde. Abgesehen aber von dem Bedenken, welches gegen die Voraussetzung selbst etwa gehegt werden könnte, scheint mir diese Voraussetzung, wenn sie wahr ist, mit einer Folge nothwendig verbunden zu sein, welche jenen Erfolg ganz wieder aufhebt. Zugegeben nämlich, dass wirklich in den an der Gleitstelle ein- oder austretenden Elementen die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis $2i$ oder von $2i$ bis 0 verändere, so scheint mir damit doch die Folge nothwendig verbunden zu sein, dass unmittelbar, nachdem in dem eintretenden Elemente die Stromstärke bis auf $2i$ gestiegen ist, sie sogleich wieder in diesem von nun in der Kette bleibenden Elemente auf i herabsinke, weil i die in allen Theilen der Kette nothwendig gleiche Stromintensität bezeichnet. Auf gleiche Weise würde bei den an der Gleitstelle austretenden Theilchen, in welchen die Stromintensität constant $= i$ gewesen war, diese Stromintensität, ehe sie von $2i$ auf 0 abnehmen kann, erst von i auf $2i$ zugenommen haben müssen. Bringt man nicht bloss die oben vorausgesetzte Veränderung, sondern auch diese damit nothwendig verbundene in Rechnung, so ergiebt sich dasselbe Resultat, wie wenn man von dieser Voraussetzung abstrahiert und einfach annimmt, wie zuvor geschehen war, dass in den an der Gleitstelle ein- oder austretenden Elementen die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis i oder von i bis 0 verändere.

Der durch obige Voraussetzung also, wie mir scheint, nicht lösbare Widerspruch löst sich aber von selbst, wenn man näher prüft, ob in dem fraglichen Falle, bei der von Neumann gegebenen Ableitung des Inductionsgesetzes aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung, alle gegebenen relativen Bewegungen der elektrischen Fluida und deren Veränderungen wirklich in Rechnung gebracht worden seien, und es soll diese Lösung gegeben werden, nachdem in dem folgenden Artikel die Beschreibung der erwähnten, von Neumann zur Entscheidung dieser wichtigen Frage angestellten Versuche nebst meiner Wiederholung derselben vorausgeschickt worden ist.

38.

Beschreibung von Neumanns Versuchen und deren Wiederholung.

Neumann sagt S. 59 der angeführten Abhandlung: «Ich werde, obgleich ich die Beschreibung von Experimenten aus dieser Abhandlung ausgeschlossen habe, in diesem Falle, wegen seiner Wichtigkeit, die Vorrichtung, deren ich mich zur Prüfung der in Rede stehenden Formeln bedient habe, in kurzen Abrissen angeben. Ein Theil des Schliessungsdrahts einer galvanischen Kette α ist ringförmig $\beta\gamma\delta$ gebogen; das Ende δ dieses Ringes reicht sehr nahe an seinen Anfang β, ohne mit ihm in leitender Verbindung zu stehen. Eine im Mittelpunkte des Ringes senkrecht auf seiner Ebene stehende rotierende Axe $\varepsilon\eta$ führt das bewegliche Bahnstück $\varepsilon\gamma$ mit sich im Kreise herum und zwar so, dass sein Ende in γ auf dem Ringe schleifend fortgeführt wird. Der inducierende Strom tritt, von α kommend, bei β in den Ring und bei γ aus ihm heraus in das bewegliche Bahnstück, aus diesem in die leitende Axe $\varepsilon\eta$, bei η kehrt er durch die ruhende Drahtleitung $\eta\zeta$ nach α zurück. Diese Richtung des Stroms ist durch Pfeile in der Figur angedeutet. Concentrisch um den Ring liegt ein kreisförmiger Leiter bcd, in welchem durch die Bewegung des Bahnstücks $\varepsilon\gamma$ ein Strom induciert wird. Wenn das bewegliche Bahnstück von β über γ bis δ fortgeführt ist, kann die Bahn desselben, wegen der geringen Entfernung von δ bis β, als geschlossen angesehen werden, und deshalb können die gegebenen Formeln zur Bestimmung der während eines Umlaufs entwickelten elektromotorischen Kraft angewandt werden .... Um Richtung und Grösse des inducierten Stroms zu beobachten, war folgende Einrichtung getroffen. Der inducierte kreisförmige Leiter war bei b unterbrochen und hier mit zwei Fortsätzen e und f versehen, von denen einer unmittelbar mit dem einen Ende des Multiplicatordrahts in Verbindung stand, der andere aber zu einer Metallfeder ging, welche in schleifender Berührung mit einer Metallhülse stand, die isoliert auf die rotierende Axe $\varepsilon\eta$ gesteckt war. Der inducierte Strom ging also durch diese Feder in die Hülse, trat aus dieser



durch eine zweite gegen sie drückende Metallfeder heraus und ging aus dieser zu dem andern Ende des Multiplicatordrahts. Die Hülse hatte einen Ausschnitt, der mit Holz ausgefüllt war, auf welchem die eine Feder in dem Augenblicke lag, als das bewegliche Bahnstück $\gamma\varepsilon$ bei δ den Ring $\beta\gamma\delta$ verliess, um bei β von Neuem mit ihm in leitende Verbindung zu treten. In diesem Augenblicke nämlich wird die Schliessung des Inducenten unterbrochen und wieder hergestellt, es verschwindet sein Strom und er tritt wieder auf, dadurch wird aber in dem Leiter keine Induction erregt, weil er ihr, nach der eben angegebenen Vorrichtung, keine geschlossene leitende Bahn darbietet. Zum Multiplicator gelangt also nur der durch die Bewegung des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ inducierte Strom und lässt, da er bei fortgesetzter Drehung der Axe $\varepsilon\eta$ immer in derselben Richtung fliesst, Richtung und Intensität beobachten. Die Beobachtung zeigte einen inducierten Strom, und, was die Richtung desselben betrifft, gab sie dieselbe, so wie meine Formel es fordert. Um zu beweisen, dass durch diese Formel nicht bloss die Richtung, sondern auch die Stärke des inducierten Stroms richtig ausgedrückt wird, wurde auf folgende Weise verfahren. Die Feder, welche die leitende Verbindung in der inducierten Strombahn unterbrach, wurde so viel höher gestellt, dass sie den mit Holz ausgefüllten Ausschnitt der Hülse, durch den eben die Unterbrechung bewirkt wurde, nicht mehr traf. Den inducierten Strömen wird jetzt immer eine geschlossene Bahn geboten. Zum Multiplicator gelangen bei fortgesetzter rascher Drehung der Axe $\varepsilon\eta$ drei Ströme innerhalb sehr kurzer Zeit, nämlich der durch die Bewegung des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ inducierte, dann der durch das Verschwinden des inducierenden Stroms inducierte, in dem Momente, wo das bewegliche Bahnstück den Ring bei δ verlässt, und endlich der durch sein Wiederauftreten inducierte, sobald das Stück den Ring in β wieder erreicht. Die Kraft, welche von diesen drei Strömen während der kurzen Dauer eines Umlaufs des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ auf die Magnetnadel des Multiplicators ausgeübt wird, ist mit der Summe ihrer elektromotorischen Kräfte proportional; je nachdem das Vorzeichen dieser Summe positiv oder negativ ist, wird die Nadel auf der einen Seite oder der andern des Meridians ihre beinahe feste Stellung nehmen, oder sie wird, wenn jene Summe $= 0$ ist, in ihrer Stellung im Meridiane verharren .... Die Beobachtung zeigt, dass, wenn die Drehung rasch geschieht, die Nadel im Meridiane bleibt, wodurch die Richtigkeit meiner Formel sowohl in

Beziehung auf die Richtung als die Stärke des inducierten Stroms erwiesen ist.»

Zur Wiederholung dieser Versuche wurde 1 Kilogramm Kupferdraht, welcher $\frac{2}{3}$ Millimeter dick war, mit Seide übersponnen auf einen dünnen Messingreif von 120 Millimeter Durchmesser aufgewunden. In diesen Messingreif wurde ein hölzerner Cylinder gestellt, welcher, von etwas kleinerem Durchmesser als der Messingreif, mit einer metallenen Axe versehen war, durch die er mittelst eines Getriebes schnell gedreht werden konnte. In den hölzernen Cylinder war ein Streifen Kupfer eingelegt, welcher von der metallenen Axe bis zur Peripherie reichte. Mit diesem kupfernen Streifen waren an der Peripherie drei messingene Federn verbunden, welche den Messingreif von innen in drei Punkten berührten, welche in einer mit der Drehungsaxe parallelen Linie lagen. Diese 3 Federn dienten zur Herstellung einer sicheren Berührung, damit, wenn eine der 3 Federn einen Augenblick versagte, die Verbindung mit dem Messingreife durch die beiden andern Federn erhalten würde. Von den beiden Leitungsdrähten eines Grove'schen Bechers wurde der eine an dem Lager der Drehungsaxe befestigt, der andere an irgend einen Punkt des Messingreifs. Die beiden Enden des auf den Messingreif aufgewundenen übersponnenen Kupferdrahts wurden mit dem Multiplicator des Galvanometers verbunden, dessen Nadel eine Schwingungsdauer von nahe 10 Secunden besass.

Die beschriebene Vorrichtung unterscheidet sich von der Neumann'schen wesentlich nur in einer Beziehung, nämlich darin, dass der Messingreif nicht aufgeschnitten war, wodurch bewirkt wird, dass der Strom der Säule, welcher durch die metallene Drehungsaxe eintritt, von der einen Stelle des Messingreifs, zu welcher er durch die Messingfedern geführt wird, auf zwei Wegen zu der andern Stelle des Messingreifs gelangen kann, von wo er zur Säule zurückgeführt wird: der Strom theilt sich daher zwischen diesen beiden Wegen, nämlich zwischen den beiden Theilen des Messingreifs, welche den Berührungspunkt der Messingfedern mit derjenigen Stelle verbinden, wo der andere Leitungsdraht der Säule am Messingreife befestigt ist. Durch diese Theilung des Stroms wird wesentlich Dasselbe erreicht, was im Neumann'schen zweiten Versuche die Erhaltung des Schlusses der inducierten Kette in dem Augenblicke bezweckte, wo die Gleitstelle den Schnitt des Messingreifs passierte, dass nämlich die Summe

der elektromotorischen Kräfte, welche von den an der Gleitstelle ein- und austretenden Stromelementen ausgeübt wurden, für eine ganze Umdrehung der Axe = 0 wird, und daher bei schneller Drehung die beobachtete Wirkung auf das Galvanometer bloss von der Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte abhing, welche von der Bewegung des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ herrührten. Durch die beschriebene Theilung des Stroms wird ebenfalls bewirkt, dass die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche von den an der Gleitstelle ein- und austretenden Elementen ausgeübt werden, = 0 wird, und zwar nicht bloss für die ganze Dauer einer Umdrehung, sondern für jeden einzelnen Augenblick, woraus für die Ausführung des Versuches der Vortheil entspringt, dass der Erfolg nicht mehr an die Bedingung einer schnellen Drehung geknüpft ist, was bei dem Neumann'schen Versuche der Fall war.*) Eine

*) Dass die beschriebene Theilung des Stroms die angegebene Wirkung wirklich habe, lässt sich auf folgende Weise zeigen. Bezeichnet man die constante Intensität des ungetheilten Stroms mit i, und theilt sich dieser Strom bei seinem Eintritte in den Messingreif in zwei Theile, von denen der eine die Intensität $i_{,}$ hat und durch den Kreisbogen ψ zum Austrittspunkte geht, der andere die Intensität $i_{,,}$ hat und durch den Bogen $2\pi - \psi$ zum Austrittspunkte geht; so geben die Ohm'schen Gesetze der Stromtheilung folgende Gleichungen:

$$i_{,} + i_{,,} = i$$
$$i_{,} : i_{,,} = (2\pi - \psi) : \psi .$$

Nimmt nun ψ um $d\psi$ zu, so verschwindet in dem Bogenelemente $d\psi$ die Stromintensität $i_{,,}$ und statt dessen entsteht in demselben Elemente die Stromintensität $-i_{,}$ (wo das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Richtung des neu entstandenen Stroms der Richtung des wachsenden Bogens ψ entgegengesetzt ist). Das Verschwinden eines positiven Stroms $i_{,,}$ in dem Elemente $d\psi$ erzeugt eine mit $i_{,,}d\psi$ proportionale elektromotorische Kraft, und das Entstehen eines negativen Stromes $-i_{,}$ in dem Elemente $d\psi$ eine mit $-(-i_{,}d\psi) = i_{,}d\psi$ proportionale elektromotorische Kraft, deren Summe also, wenn a einen constanten Factor bezeichnet,

$$= a(i_{,} + i_{,,})d\psi = ai d\psi$$

ist. Indem nun aber ψ um $d\psi$ wächst, ändert sich zugleich das Verhältniss von $i_{,} : i_{,,} = (2\pi - \psi) : \psi$, während die Summe $i_{,} + i_{,,} = i$ unverändert bleibt, woraus die beiden Differentialgleichungen erhalten werden:

$$di_{,} + di_{,,} = 0$$
$$\psi di_{,} - (2\pi - \psi)di_{,,} = -id\psi$$

folglich $di_{,} = -\frac{id\psi}{2\pi}$ und $di_{,,} = +\frac{id\psi}{2\pi}$. Die Intensitätsänderung $di_{,}$ des Stromes $i_{,}$ im Bogen ψ in der Richtung abnehmender Werthe von ψ erzeugt eine mit $\psi di_{,}$ proportionale elektromotorische Kraft $+ a\psi di_{,} = -a\psi\frac{id\psi}{2\pi}$; die Intensitätsänderung $di_{,,}$ im Bogen $(2\pi - \psi)$ in der Richtung wachsender Werthe von ψ erzeugt eine mit $-(2\pi - \psi)\, di_{,,}$ proportionale elektromotorische Kraft $= -a(2\pi - \psi)di_{,,}$



andere Einrichtung, welche getroffen wurde, um sowohl den ersten Neumann'schen Versuch, als auch den zweiten, ganz unverändert, zu wiederholen, soll nachher beschrieben werden.

Es wurden folgende zwei Versuche gemacht. Erstens wurde der hölzerne Cylinder durch das Getriebe in jeder Secunde 10 Mal um seine Axe gedreht, während der inducierende Strom durch die Drehungsaxe und den Messingreif geführt wurde, und es wurde am Galvanometer beobachtet, dass dadurch kein Strom induciert wurde. Der unverrückte Stand der Galvanometernadel konnte bis auf $\frac{1}{2}$ Scalentheil verbürgt werden. Dieses Resultat stimmt also mit dem des zweiten Neumann'schen Versuches ganz überein. Zweitens wurde um den Messingreif noch ein Hülfsdraht einmal herum geführt, und seine Enden mit der Säule verbunden, so dass der Strom, statt durch die Drehungsaxe und durch den Messingreif, durch diesen Draht hindurch gehen musste. Im Augenblicke, wo diese Kette geschlossen wurde, wurde am Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, dessen Richtung der des inducierenden Stroms entgegengesetzt war. Bei Lösung der Kette zeigte sich ein gleich starker inducierter Strom, aber von gleicher Richtung mit dem inducierenden. In beiden Fällen erhielt die Galvanometernadel eine Ablenkung von nahe 22 Scalentheilen. Der zweite Versuch dient zum Beweise, dass im ersten Versuche, bei 100 Umdrehungen des beweglichen Stromstücks während einer Schwingung, die Galvanometernadel über 1000 Scalentheile Ablenkung erhalten haben müsste, wenn jede Umdrehung eine elektromotorische Kraft erzeugt hätte, welche der durch den zweiten Versuch bestimmten gleich wäre. Eine solche Kraft ist also nicht vorhanden.

Dieser Versuch bietet bei der beschriebenen Stromtheilung noch ein besonderes Interesse dadurch dar, dass er dem bekannten elektrodynamischen Rotationsversuche genau entspricht, wo innerhalb eines festen kreisrunden Stroms ein beweglicher Stromtheil sich befindet, welcher nach dem Mittelpunkte des ersteren gerichtet ist. Ueber diesen elektrodynamischen Rotationsversuch siehe Poggendorff in den Annalen 1849. 77. S. 22 ff. Es ist bekannt, dass der Kreisstrom den beweglichen Ra-

---

$= - a(2\pi - \psi)\frac{id\psi}{2\pi}$. Es ergiebt sich hieraus die Summe aller elektromotorischen Kräfte in Folge der Zunahme $d\psi$ des Bogens ψ:

$$= aid\psi - a\psi\frac{id\psi}{2\pi} - a(2\pi - \psi)\frac{id\psi}{2\pi} = 0,$$

was zu beweisen war.



dialstrom rotieren macht, in der Richtung des Kreisstroms selbst oder in umgekehrter, je nachdem die Richtung des Stroms in dem beweglichen Stromtheile nach dem Mittelpunkte zu oder von ihm abgerichtet ist. Nach der sonst gültigen Regel, nach welcher elektromagnetische oder elektrodynamische Versuche in magnetoelektrische oder Voltainductions-Versuche umgekehrt werden, scheint es, dass, wenn jener bewegliche Radialstrom gedreht wird, wie es bei unserem Versuche der Fall war, in dem festen kreisrunden Leiter ein der Drehungsrichtung paralleler oder entgegengesetzter Strom induciert werden müsste, je nachdem der Strom in dem beweglichen Leiter von dem Mittelpunkte ab oder nach demselben zu gerichtet wäre. Auch leuchtet ein, dass die Vertauschung der Quecksilberrinne, in die man bei dem erwähnten Rotationsversuche den beweglichen Stromtheil eintauchen zu lassen pflegt, mit einem von dem beweglichen Stromtheile berührten Messingreife, unwesentlich ist und keinen Einfluss auf das Resultat haben könne. Der Versuch hat nun aber gelehrt, dass der nach der angeführten Regel zu erwartende Inductionsstrom in diesem Falle nicht stattfindet. Jene Regel der Umkehrung gilt daher nicht allgemein, sondern es findet davon eine Ausnahme statt, wenn der geschlossene inducierende Strom aus einem beweglichen und einem unbeweglichen Stromtheile besteht, welche durch eine Gleitstelle verbunden sind. Bekanntlich findet der Inductionsstrom statt, wenn der inducierte Leiter aus zwei durch eine Gleitstelle verbundenen Theilen besteht.

Ferner habe ich auch die Neumann'schen Versuche unverändert wiederholt, indem der Messingreif neben der Stelle durchschnitten wurde, wo der von der Säule kommende Leitungsdraht an ihm befestigt war. Die eine Verbindung des um den Messingreif gewundenen Drahts mit dem Multiplicator des Galvanometers wurde durch eine Feder hergestellt und konnte durch Zurückdrücken dieser Feder gelöst werden. Dieses Zurückdrücken wurde durch einen Holzstift bewirkt, welcher am Holzcylinder befestigt und so gestellt war, dass dadurch die Lösung der Feder in dem Augenblicke stattfand, wo die am Holzcylinder angebrachten Messingfedern auf die durchschnittene Stelle des Messingreifs zu stehen kamen. Noch ist zu bemerken, dass der um den Messingreif gewundene Draht eine geringere Anzahl von Umwindungen als vorher bildete. Es wurden damit folgende Versuche gemacht. Erstens wurde der hölzerne Cylinder um seine Axe durch das Getriebe

10 Mal in jeder Secunde gedreht und am Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, welcher so stark war, dass die Ablenkung der Nadel über 500 Scalentheile betrug und mit der Scale nicht mehr gemessen werden konnte. Zweitens: der Holzcylinder wurde nach Beseitigung des Holzstiftes in derjenigen Stellung festgehalten, wo die an ihn befestigten Messingfedern das mit der Säule nicht verbundene Ende des durchschnittenen Messingreifs berührten, so dass der Strom den ganzen Messingreif durchlaufen musste. In dem Augenblicke nun, wo die Säule geschlossen wurde, wurde am Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, welcher die Nadel um 13,5 Scalentheile in der nämlichen Richtung wie bei dem ersten Versuche ablenkte, vorausgesetzt, dass die Richtung des inducierenden Stroms die nämliche war, und dass beim ersten Versuche in derjenigen Richtung gedreht wurde, bei welcher die Messingfedern von ihrer eben beschriebenen Stelle über den Schnitt des Messingreifs fortgeführt wurden. Drittens: um den Messingring wurde noch ein Hülfsdraht einmal herumgewunden und die Säule so damit geschlossen, dass der Strom diese Drahtwindung in gleicher Richtung durchlief, wie vorher den Messingreif. Im Augenblicke der Schliessung der Säule wurde dann mit dem Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, welcher die Nadel 13,8 Scalentheile in gleicher Richtung wie vorher ablenkte. Hierauf wurde viertens der Multiplicator geschwächt und der erste Versuch nochmals wiederholt. Der inducierte Strom brachte dann eine bleibende Ablenkung der Magnetometernadel von 377 Scalentheilen hervor, jedoch liess sich eine feinere Messung dieser Ablenkung nicht ausführen, wegen bedeutender Schwankungen, die wahrscheinlich ihren Grund in Unvollkommenheiten der technischen Ausführung der Rotationsvorrichtung hatten. Fünftens wurde auch der zweite Versuch nochmals wiederholt und es ergab sich, statt der früher beobachteten Ablenkung von 13,5 Scalentheilen, mit dem geschwächten Multiplicator nur eine Ablenkung von 8 Scalentheilen. Sechstens endlich wurde auch der zweite Neumann'sche Versuch wiederholt, welcher sich von dem vierten Versuch nur dadurch unterschied, dass der Holzstift am Holzcylinder entfernt wurde, wodurch bewirkt wurde, dass nun bei der Drehung des Holzcylinders die inducierte Kette immer geschlossen blieb. Bei gleich schneller Drehung, wie beim ersten und vierten Versuche, wurde dann an der Galvanometernadel gar keine Ablenkung

beobachtet und dieser Ruhestand konnte bis auf ein paar Scalentheile verbürgt werden, innerhalb welcher die Nadel schwankte.

Die Resultate der im vierten und fünften Versuche gemachten Messungen gestatten eine Vergleichung, welche, auch wenn diese Messungen keine grosse Genauigkeit besassen, bemerkt zu werden verdient. Aus dem Resultate der im vierten Versuche gemachten Messung lässt sich nämlich die grösste Elongation berechnen, welche die Magnetometernadel von der Ruhe ab in Folge der ihr durch eine einzige momentane Umdrehung des Holzcylinders ertheilten Bewegung erreicht haben würde. Es ist nur zu diesem Zwecke noch hinzuzufügen, dass das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen der Nadel = 0,47160 war, oder dass, wenn man dasselbe durch den Modulus des Logarithmensystems dividiert mit λ bezeichnet, $\lambda = 1,088$ war. Bezeichnet man ausserdem mit y die im vierten Versuche beobachtete Ablenkung für n Umdrehungen während der Schwingungsdauer der Nadel, so ergiebt sich für die grösste Elongation, welche die Nadel in Folge der ihr durch eine Umdrehung ertheilten Bewegung erreicht haben würde, folgender Ausdruck:

$$x = \frac{y}{n} \cdot \sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} \cdot {}^{*)}$$

Nun ist in Scalentheilen $y = 377$, ferner $n = 100$ (weil 10 Umdrehungen auf 1 Secunde kamen und die Schwingungsdauer $\tau = 10$ Secunden war) und $\lambda = 1,088$ gefunden worden; folglich ist die grösste Elongation, welche die Magnetometernadel von der Ruhe ab in Folge der ihr durch eine Umdrehung ertheilten Bewegung erreicht haben würde, in Scalentheilen ausgedrückt,

$$x = 8,164 ,$$

---

*) Siehe Beilage *C*, wo mit Rücksicht auf die Dämpfung die der ruhenden Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit, wenn x die gesuchte Elongation und τ die Schwingungsdauer unter dem Einflusse der Dämpfung bezeichnet, ausgedrückt ist durch $\frac{x}{\tau} \sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}$. Diese Drehungsgeschwindigkeit ist aber durch das der Ablenkung y entsprechende Drehungsmoment F, dividiert durch das Trägheitsmoment der Nadel K und multipliciert mit der Zeit einer Umdrehung $\frac{\tau}{n}$ im vierten Versuche gegeben $= \frac{\tau}{n} \frac{F}{K}$. Endlich ist das der Ablenkung y entsprechende Drehungsmoment $F = \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\tau\tau} Ky$, folglich

$$\frac{x}{\tau} \sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{\tau}{n} \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\tau\tau} y$$

woraus sich für x der oben angeführte Ausdruck ergiebt.



während im fünften Versuche eine Elongation von 8 Scalentheilen wirklich beobachtet worden ist, wenn der Holzcylinder nicht gedreht wurde, sondern in derjenigen Stellung fest stand, bei welcher der bei Schliessung der Säule entstehende Strom den ganzen Messingreif durchlaufen musste. Aus der aus dieser Vergleichung hervorgehenden Uebereinstimmung folgt, dass der im vierten Versuche inducierte Strom, eine nur mittelbare Folge der Drehung, durch den bei jeder Umdrehung im ganzen Messingreif entstehenden Strom induciert worden sei (dessen Wiederverschwinden keinen Einfluss ausüben konnte, weil die Multiplicatorkette in dem Augenblicke dieses Verschwindens gelöst war); die Drehung des beweglichen Stromstücks selbst hatte also keinen Antheil an dem inducierten Strome. Es finden sich durch diese Versuche also die von Neumann gegebenen Bestimmungen vollkommen bestätigt.

39.

Das Inductionsgesetz für inducierende Ströme mit Gleitstellen.

Das allgemeine Princip der mathematischen Theorie inducierter elektrischer Ströme, welches von Neumann aufgestellt worden ist, ist ein Theorem, welches sich auf die Ströme und Leiter im Ganzen, und zwar bloss auf ihre Stärke und Lage am Anfang und am Ende der betrachteten Induction bezieht und die gesuchte Summe der elektromotorischen Kräfte von der Betrachtung aller mitwirkenden Elemente im Einzelnen und von der Betrachtung des allmähligen Uebergangs der Ströme und Leiter aus ihrem Zustande am Anfange der Induction zu dem am Ende derselben unabhängig darstellt. Die Erleichterung, welche ein Theorem von solcher Einfachheit und Allgemeinheit überall, wo es Anwendung findet, zur wirklichen Bestimmung der gesuchten Summe elektromotorischer Kräfte gewährt, leuchtet von selbst ein. Mit dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung verhält es sich der Sache nach ganz anders, weil dieses nur eine für alle Elementarwirkungen gültige Regel geben soll, aus welcher die gesuchte Summe elektromotorischer Kräfte nicht unmittelbar erhalten wird, sondern nur mittelbar durch eine Summation aller vollständig zusammengestellten Elementarwirkungen gefunden werden kann. Es kommt daher hier bei Ableitung des Inductionsgesetzes für einen bestimmten Fall hauptsächlich auf eine für diesen Fall vollständige Zusammenstellung aller Elementarwirkungen an, welche sich aus der Be-

trachtung der Verhältnisse ergeben muss, welche der gegebene Fall voraussetzt. Die Ableitung der Inductionsgesetze aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung fordert daher eine ganz besondere Aufmerksamkeit auf alle Verhältnisse, welche durch jeden gegebenen Fall bestimmt sein sollen. Es ist dies geschehen für den Fall der von Stromelementen auf andere Stromelemente oder auf Leiterelemente ausgeübten Induction sowohl in der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen, als auch in der von Neumann in der angeführten Abhandlung § 5 gegebenen Ableitung, wodurch sich für diesen Fall zwei wesentlich verschiedene Arten von Elementarwirkungen herausgestellt haben, nämlich diejenigen, welche ein Stromelement durch seine relative Bewegung zum inducierten Elemente, und diejenigen, welche ein Stromelement durch Aenderung seiner Stromintensität ausübt.

Diese Eintheilung der Elementarwirkungen hat nun Neumann auch auf den Fall eines inducierenden Stroms mit Gleitstellen in Anwendung gebracht. Dieser Strom zerfällt in ein bewegliches und unbewegliches Stromstück, die an zwei Stellen in leitender Verbindung stehen, von denen wenigstens eine Gleitstelle ist. Es ergab sich leicht, dass die Elementarwirkungen des beweglichen Stromstücks der ersten Art angehören, nämlich denjenigen, welche die Stromelemente durch ihre relative Bewegung zu den inducierten Elementen ausüben. Eben so ergab sich, dass die Elementarwirkungen des unbeweglichen Stromstücks der zweiten Art angehören, nämlich denjenigen, welche die Stromelemente durch Aenderung ihrer Stromintensität ausüben. Den aus der ersteren Quelle stammenden Theil der elektromotorischen Kraft hatte Neumann zuerst allein berechnet, bei der nachfolgenden Prüfung aber den aus der andern Quelle stammenden Theil der elektromotorischen Kraft noch hinzugefügt.

Eine weitere Prüfung kann nur darauf gerichtet sein, ob die Zusammenstellung der Elementarwirkungen nach den beiden angegebenen Arten für den Fall eines inducierenden Stroms mit Gleitstelle wirklich erschöpfend ist. In der That wäre sie wirklich erschöpfend, wenn in diesem Falle bloss inducierende Stromelemente gegeben wären; denn diese müssen entweder dem beweglichen oder dem unbeweglichen Stromstücke angehören, wonach ihre Elementarwirkungen entweder der ersteren oder der letzteren Art sein müssen. Prüft man nun

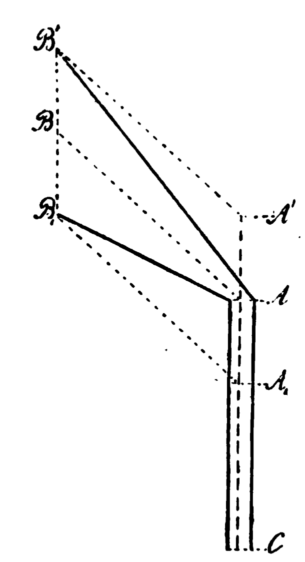
aber näher, ob in dem vorliegenden Falle wirklich alle gegebenen Bewegungen der elektrischen Fluida und deren Aenderungen auf Bewegungen der Elektricität in Stromelementen und deren Aenderungen zurückgeführt werden können; so ergiebt sich leicht, dass diese Zurückführung überall möglich ist, mit Ausnahme der Gleitstelle. An der Gleitstelle tritt nämlich eine plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen ein, indem diejenigen, welche von dem beweglichen Stromstücke zu dem unbeweglichen übergehen, an der Bewegung des ersteren Theil zu nehmen aufhören, und diejenigen, welche von dem unbeweglichen Stromstücke zu dem beweglichen übergehen, an der Bewegung des letzteren Theil zu nehmen beginnen. Diese plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle, kann nicht unter denjenigen Aenderungen befasst werden, welche in den Stromelementen selbst stattfinden; denn jene Aenderung tritt weder in den Stromelementen des beweglichen Stromstücks ein, weil alle elektrischen Theilchen, so lange sie diesen Stromelementen angehören, auch an der Bewegung derselben Theil nehmen, noch tritt sie in den Stromelementen des unbeweglichen Stromstücks ein. Jene plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle kann also nicht auf Aenderungen der Bewegungen in den Stromelementen selbst zurückgeführt werden und ist daher die Quelle einer dritten Art von Elementarwirkungen, welche von den beiden, inducierenden Stromelementen zukommenden, Arten von Elementarwirkungen unterschieden werden muss. Es fragt sich also nur darum, ob aus der angegebenen plötzlichen Aenderung der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle nach dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung elektromotorische Kräfte wirklich entspringen oder nicht. Im ersteren Falle leuchtet ein, dass diese elektromotorischen Kräfte, da sie von Neumann noch nicht in Rechnung gebracht sind, der von Neumann berechneten Summe elektromotorischer Kräfte noch hinzugefügt werden müssen.

Die Ableitung der aus der plötzlichen Aenderung in der Bewegung der elektrischen Fluida an einer Gleitstelle entspringenden elektromotorischen Kräfte ist auch in der im 30. Artikel der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen gegebenen Ableitung des Gesetzes der Volta-Induction aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht mit enthalten, denn letztere

ist dort ausdrücklich auf die Induction von Stromelementen beschränkt worden, wobei also nur diejenigen Aenderungen der Bewegung der elektrischen Fluida in Betracht gezogen zu werden brauchten, welche in den Stromelementen vorkommen. Wenn es nun aber Aenderungen in der Bewegung der elektrischen Fluida giebt, welche in keinem Stromelemente vorkommen, sondern nur an der Grenze zweier Stromelemente, oder in dem Augenblicke, wo das elektrische Fluidum von dem einen Stromelemente zu dem andern übergeht, und ein solcher Fall an einer Gleitstelle wirklich eintritt; so bedarf obiges Inductionsgesetz noch einer Ergänzung, wenn es diesen Fall mit umfassen soll. Diese Ergänzung kann leicht gegeben werden; denn es ist dazu nur nöthig, dass die elektrischen Massen, welche solche plötzliche Aenderungen der Geschwindigkeit ihrer Bewegung erleiden, und die Grösse dieser Aenderungen genau bestimmt seien, um das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung auch hierauf in Anwendung zu bringen. Dabei sollen zum leichteren Verständniss dieselben Bezeichnungen gebraucht werden, wie in der im 30. Art. der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen gegebenen Ableitung; auch sollen Kürze halber alle hierbei in gleicher Weise gültigen Bestimmungen nicht nochmals entwickelt, sondern von dort entlehnt werden.

Was die Masse des elektrischen Fluidums betrifft, welche eine plötzliche Aenderung in ihrer Bewegung an der Gleitstelle erleidet, so kann diese nicht, wie es bei einem Stromelemente geschah, durch das Product $\pm\alpha e$ ausgedrückt werden, wo α die Länge des Stromelements bezeichnete, sondern es muss an die Stelle von α die Länge des Wegelements udt gesetzt werden, welches die Elektricität mit der Geschwindigkeit u, mit welcher sie durch die Gleitstelle geht, in dem Zeitelemente dt zurücklegen würde. Die inducierten Massen können dagegen eben so, wie Art. 30 der angeführten Abhandlung, durch $+\alpha'e'$ und $-\alpha'e'$ dargestellt werden, wo α' die Länge des inducierten Elements und $\pm e'$ die in der Längeneinheit des inducierten Leiters enthaltene positive oder negative Elektricität bezeichnet.

Die Bewegungen jener inducierenden Massen $+eudt$ und $-eudt$ und die von ihnen durchlaufenen Bahnen lassen sich auf folgende Weise darstellen. A sei die Gleitstelle, AB der angrenzende Theil des beweglichen, AC der angrenzende Theil des unbeweglichen Stromstücks. Die



Wege $CA = AB$ werden von den elektrischen Fluidis mit der Geschwindigkeit u in derselben Zeit durchlaufen, in welcher das bewegliche Stromstück von $A_{,}B_{,}$ bis AB oder von AB bis $A'B'$ fortrückt. Die Zusammensetzung beider Bewegungen ergiebt für die negative Masse (wenn diese von dem beweglichen Stromstück zum unbeweglichen übergeht) die Bahn $B_{,}AC$, und das Bahnstück $B_{,}A$ wird in gleicher Zeit wie AC durchlaufen; für die positive Masse ergiebt sich eben so die Bahn CAB', und die Stücken CA und AB' werden in gleicher Zeit durchlaufen. In dieser Darstellung ist der Deutlichkeit wegen angenommen worden, dass der Strom an der Gleitstelle A eine plötzliche Wendung mache und von der Richtung CA zur Richtung AB übergehe. In der Wirklichkeit findet eine solche plötzliche Wendung nicht statt, sondern man kann annehmen, dass die beiden Elemente der wahren Strombahn CA und AB nahe eine gerade Linie bilden. Bezeichnet man dann mit v die Geschwindigkeit des beweglichen Stromstücks, so ist $A_{,}A = AA' = B_{,}B = BB' = v\,dt$, während die Länge der Stromelemente $CA = AB = u\,dt$ ist. Hieraus ergiebt sich also für die positive Masse, dass sie in zwei gleichen auf einander folgenden Zeitelementen dt die Wege $CA = u\,dt$ und $AB' = (u+v)\,dt$, für die negative Masse, dass sie in denselben Zeitelementen die Wege $B_{,}A = -(u-v)\,dt$ und $AC = -u\,dt$ zurücklegt. Die Geschwindigkeit der positiven Elektricität geht also bei A von $+u$ plötzlich zu $+(u+v)$ über; die Geschwindigkeit der negativen Elektricität geht dagegen bei A von $-(u-v)$ plötzlich zu $-u$ über. Soll auch dieser Wechsel der Geschwindigkeit nach dem Gesetz der Stetigkeit geschehen, so bezeichne man die, wenn auch noch so kleine, Zeit dieses Uebergangs mit τ und in irgend einem Augenblicke $d\sigma$ am Ende des Zeitabschnitts σ im Zeitraum τ die Geschwindigkeit der positiven Elektricität mit $+(u+\frac{\sigma}{\tau}v)$ und eben so die Geschwindigkeit der negativen Elektricität mit $-(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v)$. Ausserdem bezeichne man, wie in Art. 30 der angeführten Abhandlung, mit θ den Winkel, welchen die Richtung von $+u$,

d. h. AB mit $A\alpha' = r$ macht, mit θ' den Winkel, welchen die Richtung, nach welcher sich die positive Elektricität im unbewegten inducierten Elemente α' mit der Geschwindigkeit $+u'$ bewegt, mit der verlängerten Geraden $A\alpha'$ macht, und mit ω den Winkel der beiden Ebenen, welche durch $A\alpha'$ parallel mit der Richtung von $+u$ und von $+u'$ gelegt werden. Endlich bezeichne r_1 den Abstand der Masse $+eudt$ von der Masse $+\alpha'e'$, r_2 den Abstand der Masse $-eudt$ von der Masse $-\alpha'e'$, r_3 den Abstand der Masse $+eudt$ von der Masse $-\alpha'e'$, r_4 den Abstand der Masse $-eudt$ von der Masse $+\alpha'e'$, die sämmtlich für den betrachteten Augenblick $= r$ sind, aber bei der Verschiedenheit der Bewegung jener Massen nicht gleich bleiben. Es ergiebt sich dann aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung die Differenz der Kräfte, welche auf die positive und negative Elektricität im Elemente α' wirken, von welcher die Induction abhängt,

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{eudt\,.\,\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)\right.$$
$$\left.-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem Ausdrucke dieser für ein inducierendes Stromelement im 30. Artikel der angeführten Abhandlung S. 363 abgeleiteten Differenz bloss dadurch, dass $eudt$ an die Stelle von αe gesetzt ist. Ferner findet man auf die dort angegebene Weise für unsern Fall

$$\frac{dr_1}{dt} = -\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\cos\theta + u'\cos\theta'$$
$$\frac{dr_2}{dt} = +\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\cos\theta - u'\cos\theta'$$
$$\frac{dr_3}{dt} = -\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\cos\theta - u'\cos\theta'$$
$$\frac{dr_4}{dt} = +\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\cos\theta + u'\cos\theta'$$

welche von den a. a. O. gefundenen Gleichungen sich nur dadurch unterscheiden, dass $+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)$ statt $+u$ für die Geschwindigkeit der inducierenden positiven Elektricität und $-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)$ statt $-u$ für die Geschwindigkeit der inducierenden negativen Elektricität gesetzt und das von der Bewegung des inducierten Elements α' abhängige Glied weggelassen worden ist. Es ist also

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right) = +4\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-\frac{1}{2}v\right)v\cos\theta^2$$

Die zweiten Differentialquotienten erhält man hieraus auf die dort angegebene Weise, wenn man berücksichtigt, dass hier u, u' und v gegebene constante Werthe haben, nämlich:

$$\frac{ddr_1}{dt^2} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta \frac{d\theta_1}{dt} - u' \sin\theta' \frac{d\theta'_1}{dt} - \frac{v}{\tau} \cos\theta$$

$$\frac{ddr_2}{dt^2} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta \frac{d\theta_2}{dt} + u' \sin\theta' \frac{d\theta'_2}{dt} + \frac{v}{\tau} \cos\theta$$

$$\frac{ddr_3}{dt^2} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta \frac{d\theta_3}{dt} + u' \sin\theta' \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{v}{\tau} \cos\theta$$

$$\frac{ddr_4}{dt^2} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta \frac{d\theta_4}{dt} - u' \sin\theta' \frac{d\theta'_4}{dt} + \frac{v}{\tau} \cos\theta$$

Es ist also:

$$\begin{aligned}\left(\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = &+ \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) \\ &- u' \sin\theta' \left(\frac{d\theta'_1}{dt} + \frac{d\theta'_2}{dt} - \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right) \\ &- v \sin\theta \left(\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) - 4 \frac{v}{\tau} \cos\theta\end{aligned}$$

und man findet auf die dort angegebene Weise

$$r \frac{d\theta_1}{dt} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta - u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta_2}{dt} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta + u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta_3}{dt} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta + u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta_4}{dt} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta - u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta'_1}{dt} = - u' \sin\theta' + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta'_2}{dt} = + u' \sin\theta' - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta'_3}{dt} = + u' \sin\theta' + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta'_4}{dt} = - u' \sin\theta' - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta \cos\omega .$$

Substituiert man diese Werthe, so ist

$$r \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) = + 2v \sin\theta$$

$$r \left(\frac{d\theta'_1}{dt} + \frac{d\theta'_2}{dt} - \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right) = 0$$

$$r \left(\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) = - 2 \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta$$

folglich:

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = + 4\left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - \tfrac{1}{2} v\right) v \sin\theta^2 - 4 \frac{rv}{\tau} \cos\theta$$

woraus endlich die Differenz der Kräfte, welche auf die positive und negative Elektricität im Elemente α' wirken, und von welcher die Induction abhängt, sich ergiebt, nämlich:

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{eudt.\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}$$

$$=-\frac{aa}{4}\cdot\frac{eudt.\alpha'e'}{rr}\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-\frac{1}{2}v\right)v\left(\cos\theta^2-2\sin\theta^2\right)-\frac{aa}{2}\frac{eudt.\alpha'e'}{r}\frac{v}{\tau}\cos\theta.$$

Multipliciert man diesen Ausdruck mit dem Zeitelement $d\sigma$ und integriert von $\sigma=0$ bis $\sigma=\tau$, so erhält man den Integralwerth jener Differenz für die Dauer des Uebergangs τ

$$=-\frac{aa}{4}\frac{eudt.\alpha'e'}{rr}\cdot uv\tau.(\cos\theta^2-2\sin\theta^2)-\frac{aa}{2}\cdot\frac{eudt.\alpha'e'}{r}\cdot v\cos\theta$$

oder, wenn τ verschwindend klein ist, d. h. wenn der Wechsel der Geschwindigkeit in den elektrischen Fluidis an der Gleitstelle sehr schnell geschieht,

$$=-\frac{aa}{2}\cdot\frac{eudt.\alpha'e'}{r}\cdot v\cos\theta.$$

Setzt man nun hierin, wie a. a. O. S. 367 angegeben ist, $aeu=i$ und multipliciert mit $\frac{\cos\theta'}{e'}$, so ergiebt sich die in dem Zeitelemente dt von der durch die Gleitstelle gegangenen Elektricität auf das inducierte Element α' ausgeübte elektromotorische Kraft

$$=-\frac{1}{2}\frac{\alpha'vdt}{r}\cdot ai\cos\theta\cos\theta'.$$

Nun ist aber

$$vdt=\alpha$$

die Länge des in die Kette während des Zeitelements dt an der Gleitstelle neu eintretenden Leiterelements, in welchem also die Stromstärke von 0 bis i wächst. Bei dem Wachsthum der Stromintensität $\frac{di}{dt}$ in dem Elemente α ist aber die von diesem Elemente auf α' ausgeübte elektromotorische Kraft a. a. O. S. 367

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r}a\cos\theta\cos\theta'\frac{di}{dt}$$

gefunden worden, folglich die elektromotorische Kraft für das Wachsthum der Stromintensität von 0 bis i

$$=-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}ai\cos\theta\cos\theta'$$

und setzt man endlich hierin für α seinen Werth vdt, so ersieht man, dass die in dem Zeitelemente dt von der durch die Gleitstelle gehenden Elektricität auf das inducierte Element α' ausgeübte elektromotorische



Kraft der von dem an der Gleitstelle in demselben Zeitelemente dt neu eintretenden Stromelemente αi auf das inducierte Element α' ausgeübten elektromotorischen Kraft sowohl der Grösse als auch der Richtung nach gleich ist, und dass man daher, um die erstere Kraft in Rechnung zu bringen, bloss die letztere Kraft zu verdoppeln brauche. Diese Verdoppelung ist aber, wie Neumann nachgewiesen hat, die Bedingung dafür, dass das aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleitete Inductionsgesetz mit den Resultaten aus Neumanns allgemeinem Principe der mathematischen Theorie inducierter Ströme und mit der Erfahrung auch in dem Falle einer Gleitstelle übereinstimme. Diese Uebereinstimmung ist also hiermit nachgewiesen. Die plötzliche Aenderung, welche in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle eintritt, ist also die Ursache von elektromotorischen Kräften, welche Neumann bei der von ihm gegebenen Ableitung des Inductionsgesetzes aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht in Rechnung gebracht hat, und fügt man die Summe der aus dieser Quelle entspringenden elektromotorischen Kräfte der von Neumann gefundenen Summe hinzu, so findet sich der Widerspruch, welcher zwischen den Resultaten des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung und Neumanns allgemeinem Principe der mathematischen Theorie inducierter Ströme zu bestehen schien, vollständig gelöst, was zu beweisen war.

Nach den hier entwickelten Gesetzen lassen sich endlich die Resultate aller in Art. 38 beschriebenen Versuche voraussagen. Bezeichnet man nämlich mit R den Halbmesser des von der Gleitstelle beschriebenen Kreises, von welchem die Halbmesser der inducierten Kreise R' nur wenig verschieden waren, und ist m die Zahl der letzteren und n die Zahl der Umdrehungen des beweglichen Stromstücks in der Zeiteinheit, i die Stärke des inducierenden Stroms und wird endlich Kürze halber

$$R_0 = \frac{RRR'R'}{(RR+R'R')^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^2 + \frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^4 + \ldots\right\}$$

gesetzt; so ergiebt sich aus obigen Gesetzen

1) die Summe der elektromotorischen Kräfte des beweglichen Stromstücks $= + mn\pi\pi \,.\, \alpha i R_0$

2) die Summe der elektromotorischen Kräfte der an der Gleitstelle allmählig neu eintretenden Stromelemente (wenn die Wirkung ihres



plötzlichen Verschwindens durch eine momentane Lösung der inducierten Kette bei jeder Umdrehung aufgehoben wird, wie im ersten Neumann'schen Versuche es der Fall war)

$$= - mn\pi\pi \, . \, aiR_0$$

3) die Summe der elektromotorischen Kräfte der durch die Gleitstelle gehenden Elektricität, wegen der plötzlichen Aenderung ihrer Geschwindigkeit in der Gleitstelle,

$$= - mn\pi\pi \, . \, \alpha iR_0 \, .$$

Die Ableitung dieser Werthe siehe in der Beilage *E*. Aus diesen partiellen Summen lassen sich die ganzen elektromotorischen Kräfte für alle in Art. 38 beschriebenen Versuche leicht zusammensetzen. Es ergiebt sich nämlich

a) für den ersten Neumann'schen Versuch die elektromotorische Kraft durch Addition aller drei partiellen Summen

$$= - mn\pi\pi \, . \, aiR_0 \, .$$

Dasselbe gilt für die beiden Wiederholungen dieses Versuchs, wenn nur für m der in jedem Versuche ihm zukommende Werth gesetzt wird. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass der Strom in den inducierten Kreisen die entgegengesetzte Richtung hat, wie der Strom in dem kreisförmigen inducierenden Stromstücke, wenn letzteres durch die an der Gleitstelle neu eintretenden Elemente wächst.

b) Für den zweiten Neumann'schen Versuch, wo die elektromotorische Kraft der an der Gleitstelle neu eintretenden Stromelemente durch das plötzliche Verschwinden derselben am Ende jeder Umdrehung aufgehoben wurde, fällt die partielle Summe unter (2) weg, und es sind bloss die beiden partiellen Summen unter (1) und (3) zu addieren, welche die elektromotorische Kraft geben

$$= 0 \, .$$

Dasselbe gilt für die Wiederholung dieses Versuchs, so wie auch für diejenige Modification desselben, wo dieselbe Wirkung, welche durch das plötzliche Verschwinden aller während einer Umdrehung allmählig neu eingetretenen Stromelemente am Ende der Umdrehung hervorgebracht wurde, durch eine Stromtheilung erreicht worden ist.

c) Es bleiben also nur noch diejenigen Versuche übrig, wo der inducierende Strom, welcher durch einen kreisförmigen Leiter ging, eine Intensitätsänderung erlitt, entweder von 0 bis i oder von i bis 0, und wobei dieser Strom entweder gar nicht durch das bewegliche Stück

des Leiters geführt wurde, oder dieses Stück, während der Strom durchging, nicht bewegt wurde. Für diese Versuche fallen die partiellen Summen unter (1) und (3) ganz weg und es bleibt als elektromotorische Kraft bloss die partielle Summe unter (2), worin für n der Werth $= 1$ zu setzen ist, also

$$= - mn\pi \,.\, aiR_0 \,.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass bei Schliessung der Kette der Strom im inducierten Kreise die entgegengesetzte Richtung hat, wie der Strom im inducierenden Kreise.

Alle diese elektromotorischen Kräfte sind nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik ausgedrückt und können nach Art. 27 durch Multiplication mit $\frac{c}{4} = \frac{1}{a}$ auf das Art. 26 definierte absolute Maass zurückgeführt werden. Durch diese Reduction fällt der unbekannte Factor a in dem Ausdrucke jener Kräfte weg und der reducierte Werth kann durch Messung bestimmt werden. Uebrigens geben obige Ausdrücke die mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft oder den Integralwerth derselben für die Zeiteinheit in allen denjenigen Versuchen, wo die Wirkung gleichförmig fortdauert. Für diejenigen Versuche dagegen, wo die Wirkung nur eine momentane ist, geben obige Ausdrücke den Integralwerth der elektromotorischen Kraft für die ganze Dauer der Wirkung. Bezeichnet T_0 im Allgemeinen die Zeit, für welche der gefundene Integralwerth der elektromotorischen Kraft gilt (wonach also in allen denjenigen Versuchen, wo die Wirkung gleichförmig fortdauert, $T_0 = 1$ zu setzen ist); so ergiebt sich die mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft durch Division des gefundenen Integralwerths mit T_0 und kann also für (1), (2) und (3) dargestellt werden durch

$$\pm\, mn\pi \cdot \frac{R_0}{T_0} \cdot i \,,$$

wo m die Zahl der inducierten Kreise und n die Zahl der Umdrehungen bezeichnet. Dividiert man diese mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft mit dem Widerstande der inducierten Kette, wie er nach dem Art. 26 definierten Maasse gefunden wird, so erhält man die mittlere Intensität des inducierten Stroms. Nun hat sich aber ergeben, dass der Widerstand nach dem angegebenen Maasse durch

$$p \cdot \frac{R'}{T'}$$

dargestellt werden kann, wo p eine reine Zahl ist, R' dagegen, gleich-

wie R_0, auf das gewählte Raummaass, T' gleichwie T_0 auf das gewählte Zeitmaass sich beziehen; folglich ergiebt sich für die mittlere Intensität des inducierten Stroms der Ausdruck

$$\pm \frac{mn\pi\pi}{p} \cdot \frac{R_0}{R} \cdot \frac{T'}{T_0} \cdot i \,,$$

wo $\frac{mn\pi\pi}{p} \cdot \frac{R_0}{R} \cdot \frac{T'}{T_0}$ eine aus den Messungen zu berechnende reine Zahl ist, welche das Verhältniss der Stärke des inducierten Stroms zum inducierenden angiebt. Es ist hierdurch die Möglichkeit gegeben, auch die Stärke des inducierten Stroms nach dem gegebenen Maasse vorauszusagen.

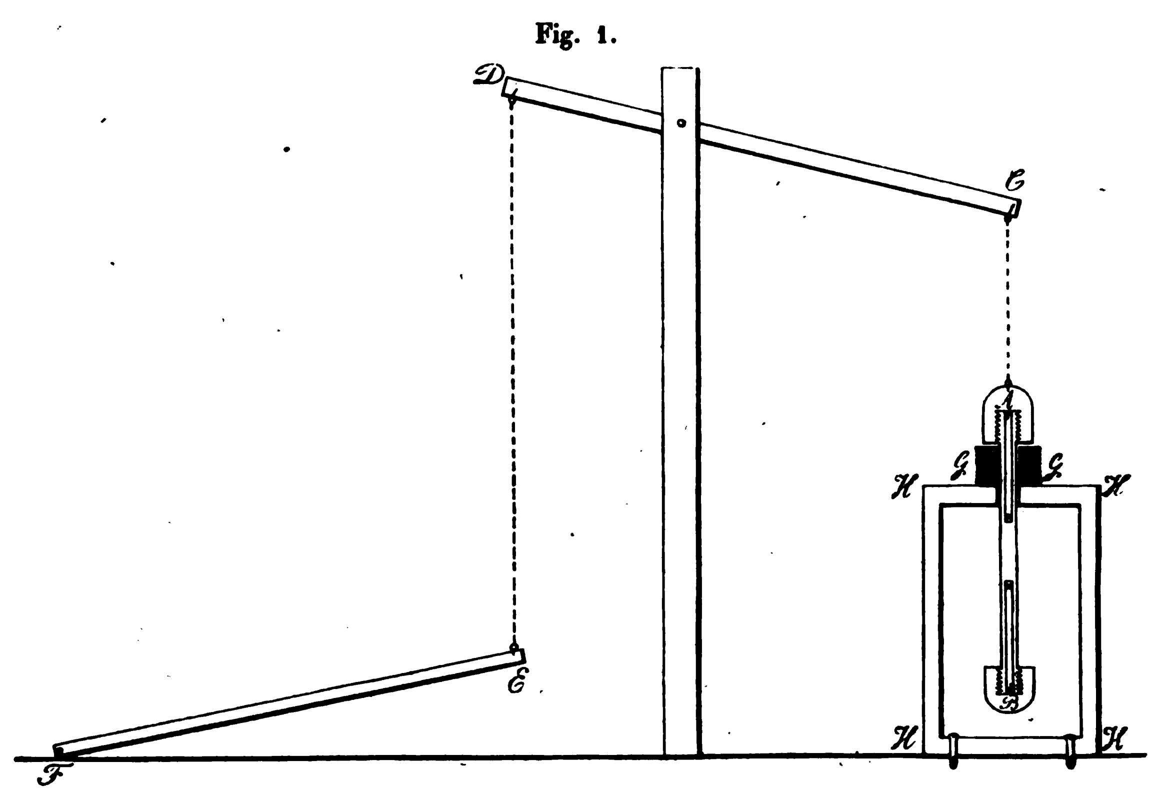
BEILAGEN.

A.

Beschreibung eines bei Widerstandsmessungen zu gebrauchenden magnetischen Inductors.

Bei den Versuchen zur Vergleichung des Widerstands zweier Leiter wurde ein magnetischer Inductor als Elektromotor gebraucht, welcher auf die folgende Weise eingerichtet war. Zwei cylindrische Magnetstäbe von 300 Millimeter Länge und 15 Millimeter Dicke wurden in einer hölzernen Röhre so befestigt, dass sie einander gleiche Pole (die Nordpole) zukehrten, die jedoch, damit sie einander bei dieser Lage nicht schwächten, durch einen 150 Millimeter weiten Zwischenraum von einander geschieden waren. Die hölzerne Röhre Fig. 1. *AB* sammt den eingeschlossenen Magneten *sn*, *sn* konnte durch einen mit dem Fusse in Bewegung zu setzenden Hebelapparat *CDEF* senkrecht gehoben und wieder gesenkt und durch die Höhle einer Inductorrolle *GG* hin- und hergeschoben werden, welche unbeweglich auf der obern Seite des am Fussboden angeschraubten Gestelles *HHHH* befestigt war. Fig. 1 stellt diesen Apparat in seinem Höhendurchschnitt dar (s. S. 336). Die Südpole der beiden Magnetstäbe sind mit *s*, die Nordpole mit *n* bezeichnet. Die Holzröhre, in welcher die beiden Magnetstäbe befestigt sind, ist an beiden Enden mit aufgeschraubten Deckeln verschlossen. Wird die Röhre in der Inductorrolle so weit abwärts geschoben, dass, wie in Fig. 1, der obere Deckel an die Inductorrolle *GG* anstösst, so befindet sich die Mitte des oberen Magnetstabs im Mittelpunkte der Inductorrolle; wird dagegen die Röhre so weit aufwärts geschoben, dass der untere Deckel an das Gestell *HH*, auf welcher die Inductorrolle *GG* befestigt ist, anstösst, so befindet sich die Mitte des unteren Magnetstabs im Mittelpunkte der Inductorrolle. In diesen beiden äussersten Lagen ist die Induction Null, weil die elektromotorischen Kräfte der zu beiden Seiten der Inductorrolle symmetrisch gelegenen Pole, wenn beide zugleich nach oben oder unten bewegt werden, sich aufheben. Während

Fig. 1.



der ganzen Schiebung der Röhre von unten nach oben geschieht die Induction in gleichem Sinne und ist am stärksten während des Durchgangs der beiden Nordenden der Magnetstäbe durch die Inductionsrolle. Während der ganzen Schiebung in der entgegengesetzten Richtung, von oben nach unten, geschieht die Induction im entgegengesetzten Sinne. Eine jede solche Bewegung heisst ein Inductionsstoss, und zwar ein positiver oder negativer, je nachdem die Schiebung aufwärts oder abwärts geschieht. — Dass jeder Inductionsstoss mit einer Lage beginnt und endigt, für welche die Induction Null ist, hat den Zweck, dass der ganze Werth der einem Inductionsstosse entsprechenden Induction ein Maximum sei und unverändert bleibe, auch wenn jene äussersten Lagen nicht ganz genau erreicht würden. Die einfache Schiebung, durch welche ein solcher ganzer Inductionsstoss bewerkstelligt wird, gestattet eine sehr rasche Ausführung und eignet sich daher besonders zu Messungen, wo die Inductionsstösse genau in den Augenblicken stattfinden sollen, in welchen die Galvanometernadel durch ihre Gleichgewichtslage geht. Um diese Augenblicke recht genau einhalten zu können, ist die Einrichtung getroffen, dass der positive Inductionsstoss, d. h.

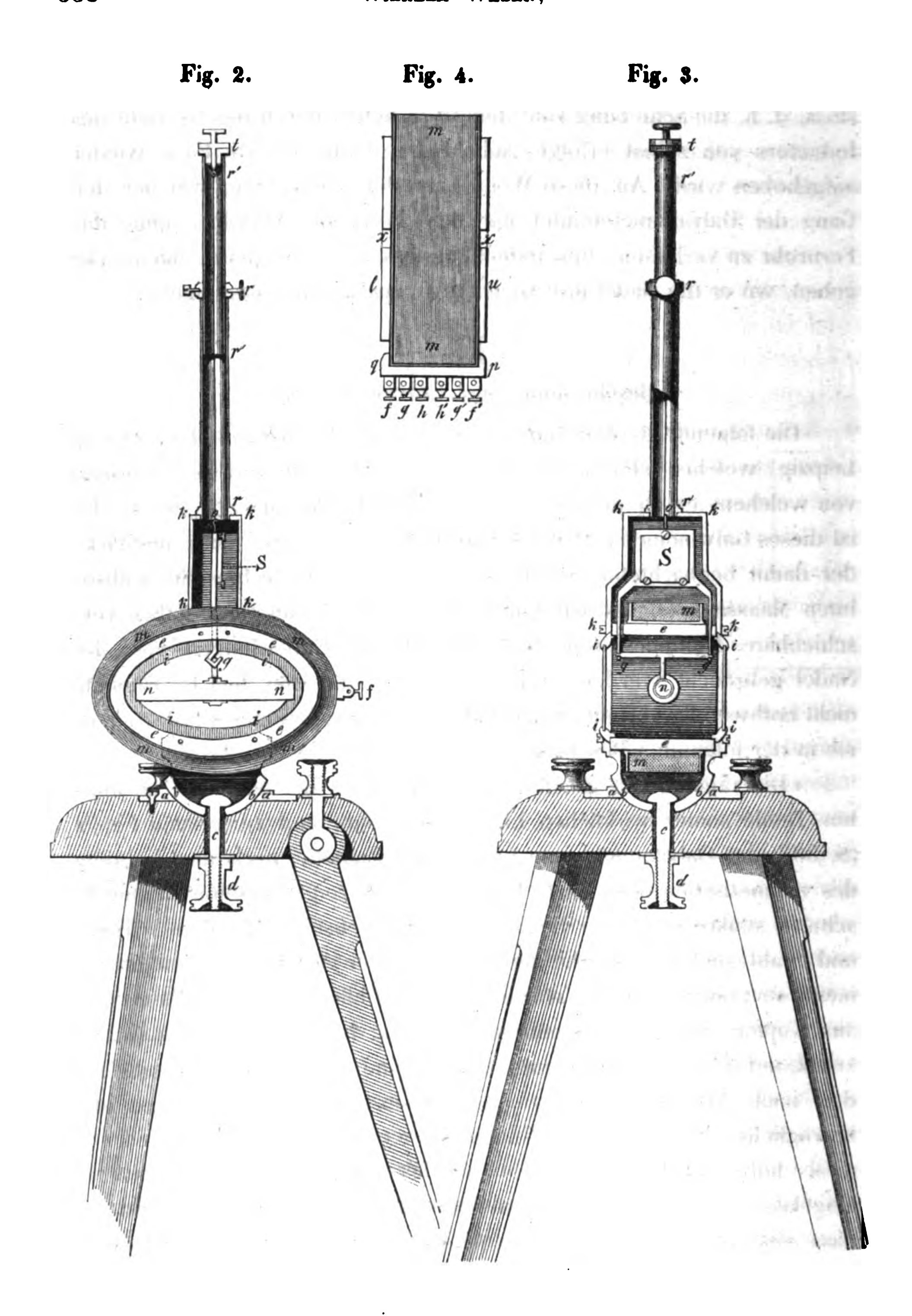
die Schiebung von unten nach oben, durch Niedersetzen des Fusses auf dem Hebel *EF* bewerkstelligt wird, während der negative Inductionsstoss, d. h. die Schiebung von oben nach unten, durch das Gewicht des Inductors von selbst erfolgt, sobald der niedergesetzte Fuss wieder aufgehoben wird. Auf diese Weise kann der Beobachter, welcher den Gang der Galvanometernadel mit dem Fernrohre verfolgt, ohne das Fernrohr zu verlassen, den Inductionsstoss genau in dem Augenblicke geben, wo er die Nadel ihre Gleichgewichtslage passieren sieht.

B.

Beschreibung des Galvanometers.

Die folgende Beschreibung ist vom Herrn Mechanicus Leyser in Leipzig, welcher schon mehrere solche Instrumente verfertigt hat und von welchem es zu dem unten bemerkten Preise zu erhalten ist. Es ist dieses Galvanometer zugleich auch dazu eingerichtet, dass die Stärke der damit beobachteten Ströme nach dem Art. 10 festgestellten absoluten Maasse bestimmt werden kann, wozu zwei an Maassstäben verschiebbare Multiplicatoren in verschiedenen Entfernungen von der Nadel gebraucht werden. Da diese Einrichtung mit dem Instrumente nicht nothwendig verbunden ist und hier nicht gebraucht wurde, so ist sie in der folgenden Beschreibung nicht weiter erwähnt worden.

«Die zugehörigen Zeichnungen stellen das Galvanometer im fünften Theile seiner wirklichen Lineargrösse dar, und zwar zeigt Fig. 2 (S. 338) das Galvanometer im Längendurchschnitte nach der Richtung des magnetischen Meridians; Fig. 3 (S. 338) zeigt dasselbe im Durchschnitte senkrecht auf der Richtung des magnetischen Meridians. Eisen und Stahl sind bis auf die Magnetnadel bei Anfertigung des Instruments sorgsam vermieden worden, so dass alle Theile desselben theils aus Kupfer, theils aus eisenfreiem Messing bestehen. — Das Gestell selbst, auf dem das Instrument steht, ist eine hölzerne Kreisscheibe mit drei nach Art der Dreifüsse bei Messinstrumenten befestigten und beweglichen Füssen, deren Enden in metallene Spitzen auslaufen. In dieser hölzernen Kreisscheibe ist zunächst eine metallene Kreisplatte *aa* eingelassen, deren durchbrochene Mitte kugelförmig ausgedreht ist, so dass eine passende Kugelfläche *bb* nach allen möglichen Richtungen sich einstellen und mittelst eines Bolzens *c* und einer Schraubenmutter *d* an der Kreisplatte *aa* feststellen lässt. Auf der erwähnten Kugelfläche *bb*


Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 3.

ist nun das eigentliche Galvanometer befestigt. Zu diesem Zwecke setzt sich diese Kugelfläche *bb* nach oben in zwei parallele Seitenplatten fort, die in Fig. 2 durch punktierte Linien angedeutet, in Fig. 3 dagegen deutlich zu sehen sind. Zwischen diesen Seitenplatten ist der kupferne Dämpfer *eeee* in Form eines oval gebogenen, in sich selbst zurückkehrenden Ringes von 80 Millimeter Breite und 8 Millimeter Stärke mit zwei Schrauben zu jeder Seite befestigt. Der Durchschnitt dieses kupfernen Dämpfers ist eine Ellipse, in deren grosser Axe die Magnetnadel *nn* schwebt. Ueber diesen Dämpfer lässt sich ein aus dünnem Messingblech angefertigter Rahmen seitwärts überschieben, der, mit aufrechtstehenden Wänden versehen, eine Quantität übersponnenen Kupferdrahts aufnimmt und somit über dem Dämpfer noch einen Multiplicator *mmmm* darstellt. Die Drahtwindungen dieses Multiplicators laufen ellipsenförmig um den Dämpfer herum, bestehen aus neun concentrischen Lagen über einander, jede Lage aus 80 neben einander gelegenen Umwindungen; der Draht hat gegen $\frac{2}{3}$ Millimeter Stärke. Hierbei ist die Einrichtung getroffen, den Multiplicator bald ganz, bald theilweise, in drei Abtheilungen zu drei Lagen, gebrauchen zu können. Auch lassen sich diese drei Abtheilungen so verbinden, dass sie gleichzeitig von demselben Strome durchlaufen werden, der sich zwischen ihnen theilt. Die Einrichtung, welche zu diesem Zwecke dem Multiplicator gegeben ist, wird durch Fig. 4 (S. 338) deutlich, welche den Multiplicator von oben herab gesehen darstellt; *qp* ist ein Querstäbchen von Buchsbaumholz, welches an den vorstehenden Wänden des Rahmens für den Multiplicator *mm* befestigt ist. Die erste Abtheilung des Multiplicators beginnt mit der ersten oder untersten Lage der Windungen, deren Anfang am Knöpfchen *f* ist; sie geht um den kupfernen Dämpfer herum nach dessen rechter Seite *u* und bildet so die erste Lage; dann wendet sie sich nach der linken Seite *l* und bildet auf diese Weise die zweite Lage; hierauf geht sie nochmals nach der rechten Seite *u*, und so entsteht die dritte Lage, deren Ende sich am Knöpfchen f' befindet. Ganz analog nun, wie diese erste Abtheilung des Multiplicators drei Lagen bildet und ihren Anfang in *f*, ihr Ende in f' hat, eben so hat die zweite und dritte Abtheilung jede drei Lagen; der Anfang der zweiten Abtheilung aber ist in *g*, ihr Ende in g'; der Anfang der dritten Abtheilung endlich ist in *h*, ihr Ende in h'. — Diese sechs Knöpfchen von Kupfer sind kreuzweise durchbohrt und mit Schräubchen fest, aber

isoliert von einander, in dem buchsbaumenen Querstäbchen *qp* eingesetzt. Bei dieser Anordnung des Multiplicators ersieht man leicht, dass sich die drei Abtheilungen, aus denen der Multiplicator besteht, auf verschiedene Weise, je nachdem die Knöpfchen durch Drähte verbunden werden, combinieren lassen. — Ueber dem Dämpfer *eeee*, und an ihm mit Schrauben befestigt, befindet sich ein Rähmchen *kkkk*, welches, indem die eine seiner offenen Seiten durch eine schwache Metallplatte, die andere durch ein Planglas mit parallelen Oberflächen verschlossen ist, einen viereckigen geschlossenen Raum darstellt. Darüber ist noch ein Rohr *rr* angebracht, welches durch ein stellbares graduiertes Auszugsrohr *r'r'* verlängert oder verkürzt werden kann. Dieses Auszugsrohr *r'r'* schliesst mit einem Torsionskreise *t*, dessen Construction unmittelbar aus den Figuren erhellt. Dieser Torsionskreis hat eine kleine Oese, in welcher der Coconfaden befestigt ist, der im Innern des vereinigten Rohres herabhängt und an einem Häkchen *o* eine viereckige leichte Metallplatte trägt, an der ein Planspiegel *s* mit drei Schräubchen befestigt ist. Diese viereckige Platte geht nach unten weiter und zwar durch zwei an dem Dämpfer *eeee* seitlich angebrachte Ausschnitte (Fig. 4 durch *xx* angedeutet), als zwei schwache Stäbchen, deren Enden als die Haken *gg* in den Figuren erscheinen. In diese Haken wird die Magnetnadel *nn* eingelegt, zu welchem Ende sie in der Mitte von einer schmalen Hülse umgeben und mit einem an dieser Hülse befestigten Querbälkchen versehen ist, dessen Enden walzenförmig auslaufen und in jenen Häkchen *gg* eingelegt werden. Die Lage der Nadel hinsichtlich ihrer Höhe wird durch das Auszugsrohr *r'r'* reguliert; durch Drehung des Torsionskreises *t* kann die Torsion des Fadens auf Null gebracht werden; mittelst der Kugelbewegung aber, welche die Kugelfläche *bb* mit der Platte *aa* zulässt, kann das ganze System des Instruments stets vertical eingestellt werden, welche Einstellung am leichtesten geschieht, wenn man das Auszugsrohr in der Nähe des Torsionskreises anfasst und bei sehr sanfter Anziehung der Schraube *d* die Einstellung vornimmt, die man dann bei erhaltener richtiger Lage des Instruments durch Anziehung der Schraube *d* feststellt. Die nach beiden Seiten noch offenen Durchsichten des Dämpfers *eeee* sind durch Einsetzen verglaster Holzrähmchen zu schliessen, deren Durchschnitt in *iiii* anschaulich gemacht ist. Der Preis des Instruments mit der Einrichtung zu absoluten Messungen ist 80 Thlr., ohne dieselbe 60 Thlr.

C.

Uebersicht der Beobachtungsmethoden für galvanische Messungen mit Rücksicht auf den Einfluss der Dämpfung.

Bei den galvanischen Messungen wird gewöhnlich nur derjenige galvanische Strom in Rechnung gebracht, welcher, ausserhalb des Multiplicators erregt, durch denselben geleitet wird, um durch die der Nadel ertheilte Ablenkung gemessen zu werden. Ist dieser Strom constant und wird die Ablenkung der Nadel nicht eher gemessen, als bis sie zur Ruhe gekommen ist, so hängt die Ablenkung der Nadel wirklich bloss von diesem Strome ab; ist der Strom aber nicht constant, oder dauert er nur sehr kurze Zeit, und beobachtet man die Ablenkung, ehe die Nadel zur Ruhe gekommen ist, beobachtet man z. B. die erste Elongation der Nadel; so sind ausser dem zu messenden Strome noch andere Ströme vorhanden, die häufig einen grossen Einfluss auf die Beobachtungen haben, der nicht unbeachtet bleiben darf. Diese Ströme rühren von der Bewegung der Magnetnadel her, welche in allen sie umgebenden Leitern galvanische Ströme induciert, deren Intensität dem Magnetismus der Nadel und der Geschwindigkeit proportional ist, mit welcher sie sich bewegt, und deren Richtung stets so beschaffen ist, dass durch ihre Rückwirkung auf die Nadel die vorhandene Bewegung derselben verlangsamt oder gedämpft wird.

Ein solcher Strom wird von der bewegten Magnetnadel erstens im Multiplicator selbst induciert und ist desto stärker, je grösser der metallische Querschnitt des ganzen Multiplicators und je grösser der Theil ist, welchen der Widerstand des Multiplicators von dem Widerstande der ganzen Kette bildet: er ist am stärksten, wenn der Multiplicator in sich geschlossen wird, und ist am schwächsten, wenn die Kette des Multiplicators gelöst wird.

Ein solcher Strom wird zweitens von der bewegten Magnetnadel auch in allen Metalltheilen des Instruments erregt, und die Rückwirkung auf die Magnetnadel ist besonders stark, wenn verticale Platten in der Richtung des magnetischen Meridians nahe an der Nadel sich befinden, oder wenn die Nadel von einem verticalen Metallringe umgeben ist, weshalb ein solcher Ring, wenn er absichtlich zu diesem Zwecke ange-

bracht wird, ein Dämpfer heisst. Die Anwendung eines solchen Dämpfers gewährt bei den meisten Messungen nicht allein eine grosse Erleichterung, sondern gestattet oft auch eine grössere Präcision der Beobachtungen. Siehe die «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837.» S. 18.

Es kommt nun darauf an, die Resultate der Beobachtungen von dem dämpfenden Einflusse dieser beiden Ströme unabhängig zu machen, oder die wegen der Dämpfung an den Beobachtungen anzubringende Correction zu bestimmen. Diese Correction wird besonders wichtig und bedeutend, wenn man sich zu galvanischen Messungen entweder eines mit Dämpfer versehenen Magnetometers oder einer astatischen Doppelnadel bedient, die aus zwei stärkeren Magnetnadeln zusammengesetzt ist, und entweder ebenfalls mit Dämpfer versehen, oder von einem starken Multiplicator eng umschlossen ist. Besonders im letzteren Falle, wo die Dämpfung vom Multiplicator herrührt und sehr verschieden sein kann bei verschiedener Schliessung des Multiplicators, ist eine solche Correction nothwendig, um die Versuche unter einander vergleichbar zu machen.

Zur Bestimmung dieser Correction soll erstens die Dämpfungskraft des Instruments näher bestimmt werden, was durch die Beobachtung der Abnahme der Schwingungsbogen leicht geschehen kann. Sodann soll zweitens gezeigt werden, wie der Einfluss dieser Dämpfungskraft bei den verschiedenen Beobachtungsmethoden in der Berechnung der Resultate bestimmt oder eliminiert wird.

1. Bestimmung der Dämpfungskraft eines Galvanometers.

Die Dämpfungskraft eines Galvanometers zerfällt in zwei Theile, welche von einander getrennt werden müssen, nämlich in einen constanten, von der Kette, zu welcher der Multiplicator gehört, unabhängigen Theil, und in einen variabelen.

Den constanten Theil der Dämpfungskraft erhält man durch Beobachtung der Abnahme der Schwingungsbogen, während die Kette, zu welcher der Multiplicator gehört, gelöst ist. Die Schwingungsbogen bilden bekanntlich, wenn sie nicht sehr gross sind, eine abnehmende geometrische Reihe, welche dargestellt werden kann durch Ae^0; $Ae^{-\lambda'}$; $Ae^{-2\lambda'}$ .... $Ae^{-n\lambda'}$, wo n die Zahl der Schwingungen be-



zeichnet, welche die Nadel, von dem Augenblicke, wo der Bogen $= A$ war, an gerechnet, gemacht hat. Während der Dauer einer Schwingung nimmt also der Bogen in dem Verhältnisse

$$e^{\lambda'} : 1,$$

während der Dauer zweier Schwingungen in dem Verhältnisse

$$e^{2\lambda'} : 1,$$

während der Dauer von n Schwingungen in dem Verhältnisse

$$e^{n\lambda'} : 1$$

ab. Nimmt man hiernach den Exponenten λ' als Maass der Dämpfung während der Dauer einer Schwingung, oder während τ' Secunden, wenn τ' die Schwingungsdauer der Nadel in Secunden ausdrückt, so ist $2\lambda'$ das Maass der Dämpfung für $2\tau'$ Secunden, und $n\lambda'$ ist das Maass für $n\tau'$ Secunden. Das Verhältniss der so bestimmten Dämpfungskräfte zu den Zeiträumen, auf welche sie sich beziehen, giebt dann endlich die Constante $\frac{\lambda'}{\tau'} = \frac{2\lambda'}{2\tau'} = \frac{n\lambda'}{n\tau'}$, welche das auf die Zeiteinheit reducierte Maass der Dämpfung ausdrückt. λ' ist aber nichts Anderes als der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbogen, und τ' ist die Schwingungsdauer der Nadel unter dem Einflusse der Dämpfung; man erhält also das auf die Zeiteinheit reducierte Maass der Dämpfung, wenn man jenen Logarithmus mit dieser Schwingungsdauer, die sich beide aus den Beobachtungen leicht bestimmen lassen, dividiert.

Zur Bestimmung des variabelen Theils der Dämpfungskraft wird die Abnahme der Schwingungsbogen beobachtet, während der Multiplicator in sich selbst geschlossen ist. Ist $e^{\lambda''} : 1$ das durch die Beobachtung gefundene Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen und τ'' die Schwingungsdauer, so ist das Maass der Dämpfung für die Zeiteinheit

$$= \frac{\lambda''}{\tau''}.$$

Die Dämpfungskraft des in sich selbst geschlossenen Multiplicators für sich ergiebt sich hieraus

$$= \frac{\lambda''}{\tau''} - \frac{\lambda'}{\tau'}.$$

In den meisten Fällen ist der Unterschied der Schwingungsdauer τ'' von τ' unmerklich und es wird dann das Maass der Dämpfung des in sich selbst geschlossenen Multiplicators

$$= \frac{1}{\tau'}(\lambda'' - \lambda').$$

Hieraus bestimmt sich nun der variabele Theil der Dämpfung, wenn man den Bruchtheil kennt, welchen der Widerstand des Multiplicators von dem der ganzen Kette bildet. Bezeichnet a den Widerstand des Multiplicators, $a + b$ den Widerstand der ganzen Kette, so ist der gesuchte Werth des variabelen Theils der Dämpfung

$$= \frac{a}{a+b}\left(\frac{\lambda''}{\tau''} - \frac{\lambda'}{\tau'}\right),$$

worin bloss b veränderlich ist und für jeden einzelnen Fall besonders bestimmt werden muss. Fügt man hierzu das Maass des constanten Theils der Dämpfung $= \frac{\lambda'}{\tau'}$, so giebt die Summe den Werth der wirklichen Dämpfung $= \frac{\lambda}{\tau}$

$$\frac{\lambda}{\tau} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{\lambda''}{\tau''} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{\lambda'}{\tau'},$$

wo für den betreffenden Fall λ den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbogen, τ die Schwingungsdauer bezeichnet.

2. Berechnung der galvanischen Messungen mit Rücksicht auf Dämpfung.

Hat man auf diese Weise die Dämpfungskraft des Instruments bestimmt, so lässt sich diese Bestimmung benutzen, um bei den verschiedenen Beobachtungsmethoden in der Berechnung der Resultate den Einfluss der Dämpfung zu eliminieren, wobei die Anweisung zu benutzen ist, welche Gauss in den »Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837« S. 58 ff. zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel gegeben hat, in welcher man die Gesetze entwickelt findet, nach denen die Dämpfung auf den Stand und die Schwingungsdauer der Nadel wirkt. Es sollen hier die verschiedenen Beobachtungsmethoden einzeln, bei allen aber nur kleine Schwingungen der Nadel, betrachtet werden.

Beobachtungen der ersten Elongation.

1. Beobachtet man bei galvanischen Messungen bloss die erste Elongation, welche die Magnetnadel nach dem Eintritt eines constanten Stroms macht, so ist bekanntlich diese Elongation, wenn keine Dämpfung stattfindet, das Doppelte derjenigen Ablenkung der



Nadel, bei welcher sie unter der Einwirkung jenes Stroms im Gleichgewicht beharren würde; findet dagegen **Dämpfung** Statt, so wird die dem Gleichgewicht der Nadel entsprechende Ablenkung E aus der beobachteten ersten Elongation x der Nadel auf folgende Weise bestimmt:

$$E = \frac{x}{1 + e^{-\lambda}} \text{ *)},$$

wofür bei kleinen Werthen von λ gesetzt werden kann:

$$E = \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{4} \lambda x .$$

2. Beobachtet man bei galvanischen Messungen die **erste Elongation**, nachdem die ruhende Nadel durch einen **momentanen** Strom (durch einen Inductionsstoss) in Bewegung gesetzt worden, so kommt es wesentlich darauf an, aus der beobachteten Elongation der Nadel $= x$ die **Geschwindigkeit** herzuleiten, welche jener momen-

---

*) Für den Stand der schwingenden Nadel $= x$ am Ende der Zeit $= t$ hat man **ohne Dämpfung** den Ausdruck:

$$x = p + A \sin \frac{\pi}{T} (t - B),$$

wo T die Schwingungsdauer bezeichnet; **mit Dämpfung** dagegen

$$x = p + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} . \sin \frac{\pi}{\tau} (t - B),$$

wo τ die Schwingungsdauer der Nadel unter dem Einflusse der Dämpfung ausdrückt und durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{\pi\pi}{\tau\tau} = \frac{\pi\pi}{TT} - \frac{\lambda\lambda}{\tau\tau} .$$

Siehe «**Resultate**» 1837. S. 74. 75, wo ε dasselbe bezeichnet, was hier $\frac{\lambda}{\tau}$ und T' dasselbe, was hier τ. Wird nun zum Anfangspunkt der Zeit t derjenige Augenblick gewählt, wo der constante Strom die Nadel zu bewegen beginnt, wo also die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = 0$ und hieraus $\operatorname{tang}\left(-\frac{\pi}{\tau} B\right) = \frac{\pi}{\lambda}$ folglich: $-B = \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{2}\tau - \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\lambda}{\pi}$; und wird ferner der bisherige Stand der Nadel zum Anfangspunkt der Elongation x genommen, also $x = 0$ für $t = 0$, so erhält obige Gleichung folgende Form:

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} t - \operatorname{arc\,tang} \frac{\lambda}{\pi}\right)$$

wo $-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} = E$ den neuen Ruhestand der Nadel unter dem Einflusse des constanten Stroms bezeichnet; folglich für den Augenblick der **ersten Elongation** $t = \tau$, mit Rücksicht auf $\cos\left(\pi - \operatorname{arc\,tang} \frac{\lambda}{\pi}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} \cdot \left(1 + e^{-\lambda}\right) = E\left(1 + e^{-\lambda}\right)$$

folglich

$$E = \frac{x}{1 + e^{-\lambda}} .$$

tane Strom der Nadel ertheilt hatte. Diese Geschwindigkeit C ergiebt sich aus folgender Gleichung:

$$C = x \cdot \frac{\pi}{T} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} \text{ *)},$$

wo T die Schwingungsdauer der Nadel bezeichnet, wenn keine Dämpfung stattfindet. Für kleine Werthe von λ kann man setzen

$$C = \frac{\pi}{T} x + \frac{1}{2} \frac{\pi}{T} \lambda x .$$

Methode der Multiplication.

1. Beobachtet man, wegen der Schwäche des zu messenden constanten Stroms, nicht bloss die erste Elongation, sondern lässt man die Nadel hin- und herschwingen, indem man am Ende jeder Schwingung die Richtung des Stroms im Multiplicator wechselt, und beobachtet dann die wachsende Grösse der auf einander folgenden Schwingungsbogen, welche mit x_1, x_2, x_3 ... bezeichnet werden, so ergiebt sich hieraus die dem Gleichgewicht der Nadel entsprechende Ablenkung E aus folgenden Gleichungen:

---

*) Durch Differentiation der Gleichung in der vorhergehenden Note: $x = p + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau}(t - B)$ erhält man:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\lambda}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau}(t - B) + \frac{\pi}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \cos \frac{\pi}{\tau}(t - B).$$

Rechnet man nun die Zeit t von demjenigen Augenblicke an, wo der momentane Strom auf die Nadel wirkt und ihr die Geschwindigkeit $= C$ ertheilt, so ist $B = 0$ und $\frac{dx}{dt} = C$ für $t = 0$; folglich $\frac{\pi}{\tau} A = C$ oder $A = \frac{\tau}{\pi} C$. Setzt man nun zur Vereinfachung den ursprünglichen Stand der Nadel $p = 0$, so erhält man

$$x = \frac{\tau}{\pi} Ce^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t ,$$

folglich für das Ende der ersten Elongation, für welches $\frac{dx}{dt} = 0$ und also $\operatorname{tang} \frac{\pi}{\tau} t = \frac{\pi}{\lambda}$, $t = \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}$, $\sin \frac{\pi}{\tau} t = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$,

$$x = C \cdot \frac{\tau}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} .$$

Nun ist aber $\frac{\tau}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} = \frac{T}{\pi}$, wie sich aus der oben angeführten Gleichung $\frac{\pi\pi}{\tau\tau} = \frac{\pi\pi}{TT} - \frac{\lambda\lambda}{\tau\tau}$ ergiebt, folglich ist

$$x = C \cdot \frac{T}{\pi} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} \text{ oder } C = x \frac{\pi}{T} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} .$$

$$-\frac{x_1}{E} = 1 + e^{-\lambda}$$

$$+\frac{x_2}{E} = 2 + 3\,e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}$$

$$-\frac{x_3}{E} = 2 + 4\,e^{-\lambda} + 3\,e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda}$$

$$+\frac{x_4}{E} = 2 + 4\,e^{-\lambda} + 4\,e^{-2\lambda} + 3\,e^{-3\lambda} + e^{-4\lambda}.^{*)}$$

Je grösser λ ist, desto schneller nähert sich $\frac{x}{E}$ einem Grenzwerthe, für welchen man folgenden Ausdruck erhält:

$$\pm\frac{x}{E} = \frac{4}{1 - e^{-\lambda}} - 2;$$

folglich findet man, wenn man die Versuche so lange fortsetzt, bis die Schwingungsbogen zu wachsen aufhören, die dem Gleichgewicht der Nadel entsprechende Ablenkung E aus den übereinstimmenden Wer-

---

*) Es gilt hier bis zum Ende der ersten Elongation dieselbe Gleichung, wie in der Note S. 345, nämlich:

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}} + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \text{arc tang}\,\frac{\lambda}{\pi}\right),$$

also im Augenblicke der ersten Elongation für $t=\tau$, $x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}}\left(1 + e^{-\lambda}\right)$. In diesem Augenblicke, wo die erste Schwingung endigt und die zweite beginnt, wird der Strom im Multiplicator gewechselt, wodurch der bisherige Ruhestand der Nadel $-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}}$ in $+\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}}$ verwandelt wird; die Ablenkung der Nadel von ihrem Ruhestande, welche am Ende der ersten Schwingung $x + \frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}} = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}}\cdot e^{-\lambda}$ war, verwandelt sich dadurch in $= -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}}(2 + e^{-\lambda})$, woraus sich für die Dauer der zweiten Schwingung, von $t=\tau$ bis $t=2\tau$,

$$x = +\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}} + A(2 + e^{-\lambda})\,e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-\tau)}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \text{arc tang}\,\frac{\lambda}{\pi}\right)$$

ergiebt, also am Ende der zweiten Elongation, für $t=2\tau$,

$$x = +\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}}(1 + 2\,.\,e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}).$$

Eben so erhält man für die Dauer der dritten Schwingung von $t=2\tau$ bis $t=3\tau$,

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}} + A(2 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda})\,e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-2\tau)}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \text{arc tang}\,\frac{\lambda}{\pi}\right)$$

also am Ende der dritten Elongation, für $t=3\tau$,

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}}(1 + 2\,e^{-\lambda} + 2\,e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda})$$

u. s. w. Schreibt man die gefundenen Werthe von x für $t=0$, $t=\tau$, $t=2\tau$, $t=3\tau$ u. s. w. unter einander

$$0$$

$$-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}}\left(1 + e^{-\lambda}\right)$$

$$+\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}}\left(1 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}\right)$$

$$-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}}\left(1 + 2e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda}\right)$$

so geben die Unterschiede zweier auf einander folgender Werthe von x, der Reihe nach, die gesuchten Schwingungsbogen x_1, x_2, x_3, worin $\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi+\lambda\lambda)}} = E$ zu setzen ist.

then x der letzten Schwingungsbogen auf folgende Weise:

$$E = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}}.$$

2. Beobachtet man, wegen der Schwäche des zu messenden momentanen Stroms, nicht bloss die erste Elongation, nachdem die ruhende Nadel in Bewegung gesetzt worden ist, sondern lässt man die Nadel mehrmals hin- und herschwingen, indem man jedes Mal in dem nächsten Augenblicke, wo die Nadel wieder ihre ursprüngliche Stellung passiert, denselben momentanen Strom zur Beschleunigung der Nadel in verkehrter Richtung durch den Multiplicator gehen lässt, und beobachtet dann die wachsende Grösse der Schwingungsbogen, welche der Reihe nach mit $x_1, x_2, x_3 \ldots$ bezeichnet werden, so ergiebt sich hieraus die Geschwindigkeit C, welche jener momentane Strom der Nadel jedesmal ertheilt, auf folgende Weise. Setzt man

$$B = C \cdot \frac{T}{\pi} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}, \text{ so ist:}$$

$$+ \frac{x_1}{B} = 1$$

$$- \frac{x_2}{B} = 2 + e^{-\lambda}$$

$$+ \frac{x_3}{B} = 2 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}. \text{*)}$$

*) Für die erste Schwingungsdauer von $t = 0$ bis $t = \tau$ gilt dieselbe Gleichung, wie in der Note S. 346, nämlich:

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot Ce^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t,$$

folglich für den Augenblick der ersten Elongation, für welchen $t = \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}$, $\sin \frac{\pi}{\tau} t = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi})}} = \frac{T}{\tau}$ war, $x = \frac{T}{\pi} \cdot Ce^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}$. Für das Ende der Schwingungsdauer, wo $t = \tau$ ist, ergiebt sich $\frac{dx}{dt} = - Ce^{-\lambda}$. In diesem Augenblicke nun wird die Geschwindigkeit der Nadel durch den erneuten momentanen Strom um $-C$ geändert, d. i. sie wird verwandelt in $-C(1 + e^{-\lambda})$, woraus sich nun für die zweite Schwingungsdauer, von $t = \tau$ bis $t = 2\tau$, ergiebt:

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C\left(1 + e^{-\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - \tau)} \cdot \sin \frac{\pi}{\tau} t,$$

folglich für den Augenblick der zweiten Elongation, für welchen $t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}$, $\sin \frac{\pi}{\tau} t = - \frac{T}{\tau}$ ist, $x = -\frac{T}{\pi} C\left(1 + e^{-\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}$.

Auch hier nähert sich $\frac{x}{B}$ desto schneller einem Grenzwerthe, je grösser λ ist, und es ergiebt sich für diesen Grenzwerth:

$$\frac{x}{B} = \frac{2}{1 - e^{-\lambda}};$$

folglich findet man, wenn man diese Versuche so lange fortsetzt, bis die Schwingungsbogen zu wachsen aufhören, die Geschwindigkeit C, welche der zu messende momentane Strom der Nadel jedesmal ertheilt, aus den übereinstimmenden Werthen x der zuletzt beobachteten Schwingungsbogen auf folgende Weise:

$$C = \frac{x}{2} \cdot \frac{\pi}{T} (1 - e^{-\lambda}) \, e^{\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Methode der Zurückwerfung.

Es gehört hieher endlich noch die Anwendung auf die von Gauss angegebene Beobachtungsmethode, welche in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im J. 1838» S. 98 ff. beschrieben worden ist, welche auch darum von besonderer Wichtigkeit ist, weil sie eine scharfe und bequeme Methode an die Hand giebt, die Dämpfung zu messen, wenn sie stark ist, während die oben angeführte, auf der Beobachtung der Abnahme der Schwingungsbogen begründete Methode bloss bei schwächerer Dämpfung zu empfehlen ist. Die genannte Messungsmethode eignet sich besonders dann, wenn man sich eines Galvanometers bedient, des-

---

Ebenso findet man für die dritte Schwingungsdauer von $t = 2\tau$ bis $t = 3\tau$,

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C\left(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - 2\tau)} \,.\, \sin \frac{\pi}{\tau} t,$$

u. hieraus für den Augenblick der dritten Elongation, für welchen $t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}$, $\sin \frac{\pi}{\tau} t = + \frac{T}{\tau}$ ist, $x = + \frac{T}{\pi} \cdot C\left(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}$, u. s. w. Schreibt man die gefundenen Werthe von x für $t = 0$, $t = \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}$, $t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}$, $t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}$ u. s. w. unter einander, indem man Kürze halber B statt $\frac{T}{\pi} C e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}$ setzt, nämlich:

$$\begin{array}{l} 0 \\ + B \\ - B(1 + e^{-\lambda}) \\ + B(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}) \\ \vdots \end{array}$$

so geben die Unterschiede je zweier auf einander folgender Werthe der Reihe nach die gesuchten Schwingungsbogen x_1, x_2, x_3 u. s. w.



sen Magnetnadel eine grosse Schwingungsdauer hat und nie mehr als wenige Grade von ihrem normalen Stande abgelenkt wird, wie dies bei einem mit Multiplicator versehenen Magnetometer der Fall ist. — Ist das Instrument mit keinem Dämpfer versehen, so wird der Einfluss der dennoch vorhandenen schwachen, vom Multiplicator herrührenden, Dämpfung mit andern Einflüssen durch die für diese Methode eigenthümliche Combination der Beobachtungen aus den Resultaten eliminiert; bei stärkerer Dämpfung dagegen bleibt zwar die Beobachtungsmethode wesentlich dieselbe, aber die Berechnung der Resultate aus den Beobachtungen muss eine Modification erleiden, wenn diese Resultate ganz übereinstimmen sollen mit denen, welche ohne Dämpfung erhalten worden wären.

Es besteht nun diese Methode wesentlich darin, dass man durch einen momentanen Strom die Nadel plötzlich in Bewegung setzt und ihre erste Elongation beobachtet, darauf in dem Augenblicke, wo die Nadel zum ersten Male wieder ihren ursprünglichen Stand passiert, wieder einen momentanen Strom auf sie wirken lässt, der aber, gleich allen folgenden, doppelt so stark ist, wie der erste. Dieser zweite Strom soll dieselbe Richtung wie der erste haben; alsdann wird die Nadel durch ihn in ihrer Bewegung nicht allein plötzlich gehemmt werden, sondern sogar eine Geschwindigkeit nach derselben Seite erhalten, von welcher sie herkommt. Man beobachtet sodann wieder die erste Elongation, welche die Nadel hierauf macht, die, ohne Dämpfung, der vorigen nahe gleich ist, und lässt die Nadel auf die andere Seite ihrer Ruhelage hinüberschwingen, und beobachtet hier auch noch die zweite Elongation. Erst wenn die Nadel von dieser andern Seite her ihre Ruhelage wieder passiert, lässt man einen momentanen Strom in entgegengesetzter Richtung, als das zweite Mal, wirken und wirft sie dadurch nach derselben Seite zurück, woher sie kommt, und beobachtet die erste und zweite darauf folgende Elongation, worauf man, sobald die Nadel wieder ihre Ruhelage passiert, den momentanen Strom in entgegengesetzter Richtung, wie das vorige Mal, wirken lässt, u. s. w. Die so beobachteten Elongationen ordnen sich nach Paaren abwechselnd positiver und negativer Elongationen, aus denen die Mittel genommen werden, wenn sie wenig von einander verschieden sind, wie dies bei geringer Dämpfung der Fall ist. Die Unterschiede dieser auf einander folgenden positiven und negativen Mittelwerthe werden

nahe gleich gefunden und geben ein Maass für die Intensität des momentanen Stroms, welcher gemessen werden soll.

Hierbei wurde vorausgesetzt, dass nur eine geringe Dämpfung stattfände. Es lässt sich aber dieselbe Methode auch bei starker Dämpfung anwenden und es lässt sich dann sogar noch eine grössere Genauigkeit erreichen; es erleidet aber dann die Ableitung der Resultate aus den Beobachtungen eine wesentliche Modification.

Zunächst möge bemerkt werden, dass bei einer starken Dämpfung der erste momentane Strom nicht genau mehr die Hälfte des folgenden sein soll, sondern, wenn m das Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen bezeichnet, so soll der erste Strom der $\left(m + \frac{1}{m}\right)^{te}$ Theil des folgenden sein. Wenn aber auch dieses Verhältniss nicht genau eingehalten wird, so leiden darunter die Beobachtungen nicht wesentlich, sondern man braucht nur die ersten Beobachtungen von der Berechnung der Resultate auszuschliessen, weil bei den folgenden Beobachtungen der Einfluss jener anfänglichen Unregelmässigkeit durch die Dämpfung selbst sehr schnell verschwindet. Man sieht dann, dass die correspondierenden Beobachtungen (nämlich die 1ste, 5te, 9te u. s. w., oder die 2te, 6te, 10te u. s. w., oder die 3te, 7te, 11te u. s. w., oder die 4te, 8te, 12te u. s. w.) sich sehr schnell 4 Grenzwerthen nähern. Bezeichnet man sodann den Unterschied des ersten und dritten Grenzwerthes mit b, den Unterschied des zweiten und vierten mit a; so ist das Verhältniss von $a : b$ dem Verhältnisse zweier auf einander folgender Schwingungsbogen gleich, folglich:

$$\lambda = \log \text{nat} \frac{a}{b} \,.$$

Ferner ist die Geschwindigkeit c, welche der Nadel von jedem momentanen Strome, mit Ausnahme des ersten, ertheilt wird,

$$c = \frac{\pi}{2T} \frac{aa + bb}{\sqrt{ab}} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\lambda}{\pi}} \,,$$

wofür, wenn a und b wenig verschieden sind, d. h. bei geringerer Dämpfung,

$$c = \frac{\pi}{2T} \cdot \frac{aa + bb}{\sqrt{ab}}$$

und bei noch kleinerer Dämpfung

$$c = \frac{\pi}{2T} (a + b)$$

gesetzt werden kann. Der Beweis ergiebt sich ähnlich wie bei den



früheren Regeln. Rechnet man nämlich die Zeit t von dem Augenblicke an, wo der momentane Strom die Nadel nach der Seite der positiven Elongation zurückgeworfen hat, so ist x für die Dauer der beiden folgenden ungestörten Schwingungen

$$x = Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \sin \frac{\pi}{\tau} t \,.$$

Für die beiden beobachteten Elongationen x' und x'' ist $\frac{dx}{dt} = 0$ oder

$$0 = -\frac{\lambda}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \sin \frac{\pi}{\tau} t + \frac{\pi}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \cos \frac{\pi}{\tau} t$$

folglich für den ersten Beobachtungsmoment

$$t = \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}$$

für den zweiten

$$t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda} \,.$$

Substituiert man diese Werthe für t in der Gleichung für x, so erhält man

$$x' = + \frac{Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

$$x'' = - \frac{Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

Nach Verlauf der Zeit $t = 2\tau$ wird die Schwingung der Nadel durch Einwirkung des Stroms wieder geändert, nämlich es wird zur Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{\tau} Ae^{-2\lambda}$$

welche sie am Ende der Zeit $t = 2\tau$ haben würde, die Geschwindigkeit $-c$ hinzugefügt, woraus sich für die Dauer der folgenden beiden Schwingungen

$$x = \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - 2\tau)} \sin \frac{\pi}{\tau} t$$

ergiebt. Für die beiden während dieses Zeitraums von $t = 2\tau$ bis $t = 4\tau$ beobachteten Elongationen x''' und x'''' ist $\frac{dx}{dt} = 0$ oder

$$0 = -\frac{\lambda}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - 2\tau)} \sin \frac{\pi}{\tau} t$$

$$+ \frac{\pi}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - 2\tau)} \cos \frac{\pi}{\tau} t$$

folglich für den ersten Beobachtungsmoment

$$t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}$$

für den zweiten

$$t = 3\tau + \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda} .$$

Substituiert man diese Werthe für t in der neuen Gleichung für x, so erhält man

$$x''' = + \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}\, c\right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

$$x'''' = - \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}\, c\right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} . \text{arc tang } \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

Nach Verlauf der Zeit $t = 4\tau$ wird die Schwingung der Nadel durch erneuerte Einwirkung des momentanen Stroms wieder geändert, nämlich es wird zur Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{\tau} \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}\, c\right) e^{-2\lambda} ,$$

welche sie am Ende der Zeit $t = 4\tau$ haben würde, die Geschwindigkeit $+ c$ hinzugefügt und dadurch bewirkt, dass die Nadel von nun an dieselbe Bewegung wieder erhält, als von Anfang für $t = 0$. Nun war aber die Geschwindigkeit für $t = 0$

$$= \frac{\pi}{\tau} A$$

also

$$\frac{\pi}{\tau} A = c + \frac{\pi}{\tau} \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}\, c\right) e^{-2\lambda} ,$$

woraus

$$c = \frac{\pi}{\tau} A \left(1 + e^{-2\lambda}\right)$$

folgt. Substituiert man diesen Werth in obigen Ausdrücken für x''' und x'''', so findet man $x''' = - x'$, $x'''' = - x''$, folglich

$$a = x' - x''' = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

$$b = x'''' - x'' = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

folglich:

$$\frac{aa + bb}{\sqrt{ab}} = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}} \cdot \frac{1 + e^{-2\lambda}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda}} = \frac{2Ae^{\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\lambda}{\pi}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}} \cdot \left(1 + e^{-2\lambda}\right)$$

woraus sich ergiebt

$$c = \frac{\pi}{2\tau} \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}\, \frac{aa + bb}{\sqrt{ab}}\, e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\lambda}{\pi}} .$$

Nun ist oben S. 345 in der Note die Gleichung angeführt worden:

$$\frac{\pi\pi}{\tau\tau} = \frac{\pi\pi}{TT} - \frac{\lambda\lambda}{\tau\tau};$$

wonach folglich

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau}\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}$$

und

$$c = \frac{1}{2}\frac{\pi}{T}\cdot\frac{aa+bb}{\sqrt{ab}}\cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\text{ arc tang }\frac{\lambda}{\pi}}.$$

Zugleich ersieht man, dass

$$\frac{a}{b} = e^{\lambda} \text{ oder } \lambda = \log\text{ nat }\frac{a}{b},$$

woraus hervorgeht, dass man durch Messung von a und b zugleich eine genaue Bestimmung des auf die Schwingungsdauer reducierten Maasses der Dämpfung erhält, was besonders dann von Nutzen ist, wenn wegen zu schneller Abnahme der Schwingungsbogen aus Beobachtungen der letzteren keine genaue Bestimmung erhalten werden kann.

Zur Erläuterung der zuletzt entwickelten Beobachtungsmethode mögen diejenigen Beobachtungen dienen, welche zur Vergleichung der Widerstände zweier Copien des Jacobi'schen Grundmaasses nach dieser Methode gemacht und S. 251 schon erwähnt worden sind. Die erste Copie bestand aus einem nicht gefirnissten Drahte, welcher auf einem nicht gefirnissten Serpentincylinder aufgewunden war, während die zweite Copie aus einem gefirnissten Drahte bestand, welcher auf einer gefirnissten Glasröhre aufgewunden war. Die Versuche zerfallen in fünf Reihen. Bei allen waren die Enden des Inductordrahts mit den Enden des Multiplicatordrahts auf dieselbe Weise verbunden. In der ersten Reihe wurden die Drähte der beiden Copien und der Inductor- und Multiplicatordraht auf die S. 204 unter (8) beschriebene, mit D bezeichnete Weise combiniert; in der zweiten Reihe auf die unter (7) beschriebene, mit B bezeichnete Weise; in der dritten Reihe auf die unter (6) beschriebene, mit A bezeichnete Weise, wobei die erste Copie die Stelle des Grundmaasses vertrat; die vierte Reihe war die Wiederholung der zweiten; in der fünften endlich wurden die Drähte auf die unter (9) beschriebene, mit C bezeichnete Weise combiniert. Die Versuche wurden begonnen, wenn die Galvanometernadel in Ruhe war. Der erste positive Inductionsstoss setzte die Nadel in Schwingung: die erste positive Elongation wurde nicht beobachtet, und eben so wurde auch die zweite negative Elongation nicht beobachtet

In dem Augenblicke, wo die Nadel nach dieser zweiten Elongation in positiver Richtung zu der Stelle gelangte, welche dem Ruhestande entsprach, erfolgte der zweite negative Inductionsstoss, welcher die Nadel nicht allein mitten in ihrer positiven Bewegung hemmte, sondern sie sogar nach derselben Seite zurückwarf, von welcher sie gekommen war. Die darauf folgende dritte Elongation war daher wiederum eine negative und wurde, sowie auch die vierte positive Elongation, noch nicht beobachtet. In dem Augenblicke, wo die Nadel nach dieser vierten Elongation in negativer Richtung zu der ihrem Ruhestande entsprechenden Stelle gelangte, erfolgte der dritte positive Inductionsstoss, welcher die Nadel nicht allein mitten in ihrer negativen Bewegung hemmte, sondern sie sogar nach derselben Seite zurückwarf, von welcher sie gekommen war. Auf dieselbe Weise wurden die Versuche längere Zeit fortgesetzt und von jetzt an begonnen, die Elongationen der Nadel, wie sie an der Scale beobachtet wurden, der Reihe nach aufzuzeichnen. In den folgenden Tafeln sind die vier ersten aufgezeichneten Elongationen in horizontaler Linie neben einander gestellt worden, die 5te aber unter die 1ste, die 6te unter die 2te u. s. f. Endlich sind von den unter einander stehenden Beobachtungen die Mittelwerthe angegeben worden.

D.

775,8	436,6	199,6	538,2
775,7	436,3	199,5	537,9
775,0	435,9	198,9	537,3
774,6	435,4	198,5	537,2
774,6	435,4	198,3	537,2
774,2	435,3	198,5	537,1
774,0	435,1	198,2	536,8
773,8	434,7	197,9	536,6
773,5	434,4	197,6	536,6
774,0	434,0	197,5	536,0
774,52	435,31	198,50	537,09

B.

692,1	448,0	277,0	521,1
691,8	447,8	276,7	521,0
691,7	447,4	276,5	520,8
691,3	447,3	276,2	520,5
691,3	447,2	276,0	520,7
691,4	447,2	276,0	520,6
691,4	447,2	275,9	520,5
691,3	447,1	275,9	520,5
691,4	447,0	275,9	520,4
691,3	447,0	275,8	520,3
691,50	447,32	276,19	520,64

A.

691,9	447,7	276,9	521,0
691,6	447,7	276,8	520,9
691,7	447,7	276,8	521,0
691,8	447,6	276,7	521,1
691,8	447,8	276,8	521,0
691,8	447,8	277,0	521,1
691,8	447,8	276,9	521,1
691,6	447,6	276,8	520,8
691,3	447,3	276,4	520,7
691,0	446,9	275,9	520,1
691,63	447,59	276,70	520,88

B.

691,6	447,0	275,7	520,5
691,4	446,9	275,6	520,3
691,2	446,7	275,3	520,0
690,9	446,3	275,2	520,0
690,7	446,2	275,0	519,7
690,5	446,1	274,9	519,8
690,5	446,5	274,8	519,7
690,3	445,9	274,6	519,4
690,1	445,8	274,6	519,2
690,1	445,6	274,3	519,2
690,73	446,30	275,00	519,78

C.

615,8	459,3	350,2	506,2
615,6	459,2	350,1	506,1
615,2	459,0	349,8	505,8
615,1	458,8	349,4	505,6
614,8	458,4	349,2	505,3
614,4	458,1	349,1	505,2
614,2	458,1	348,8	505,0
614,1	458'0	348,8	504,9
613,9	457,8	348,7	504,8
613,8	457,6	348,2	504,3
614,69	458,43	349,23	505,32

Es ist hierbei noch zu bemerken, dass der horizontale Abstand des Spiegels von der Scale 2218 Scalentheile betrug. Ferner ist zu beachten, dass die hier gebrauchte Inductorrolle von der früheren, S. 206 gebrauchten, verschieden ist. Die neue Inductorrolle hatte eine weit geringere Zahl von Umwindungen, aber von weit stärkerem Drahte, sodass ihr Widerstand viel kleiner ist, als der Widerstand der ersten Inductorrolle. Dieser Umstand hat bedeutenden Einfluss auf das Verhältniss der Beobachtungen *A*, *B*, *C*, *D* unter einander.

In der folgenden Tafel sind die Mittelwerthe aus den obigen Beobachtungen übersichtlich zusammengestellt und in der letzten Columne die Differenz des ersten und dritten, sowie auch des zweiten und vierten Werthes für jede Versuchsreihe beigefügt, und es sind diese beiden Differenzen eben so wie S. 351 mit *a* und *b* bezeichnet worden.

D.	774,52 435,31 198,50 537,09	$a = 576,02$ $b = 101,78$
B.	691,50 447,32 276,19 520,64	$a = 415,31$ $b = 73,32$
A.	691,63 447,59 276,70 520,88	$a = 414,93$ $b = 73,29$
B.	690,73 446,30 275,00 519,78	$a = 415,73$ $b = 73,48$
C.	614,69 458,43 349,23 505,32	$a = 265,46$ $b = 46,89$

Die in dieser Tafel zusammengestellten Werthe von a und b bedürfen nun zunächst einer Correction, weil sie den katoptrischen Gesetzen gemäss den Tangenten der doppelten Elongationswinkel proportional sind. Mit Hülfe des gegebenen Abstandes des Spiegels von der Scale ist es leicht, sie auf Werthe zu reducieren, welche den Elongationswinkeln selbst proportional sind, und diese Reduction genügt bei der Kleinheit aller dieser Elongationen. Zu diesem Zwecke ist, wenn x den in Scalentheilen gegebenen Werth von a oder b bezeichnet, die Zahl x um

$$\frac{1}{3}\,\frac{x^3}{4436^2} = \frac{x^3}{59034288}$$

zu verkleinern. Nach dieser Reduction erhält man folgende Werthe für a und b.

	a	b
$D.$	572,78	101,76
$B.$	414,10	73,31
$A.$	413,72	73,28
$B.$	414,51	73,47
$C.$	265,14	46,89

Nimmt man nun die Mittel aus den beiden für B angeführten Werthen a und b, so erhält man folgende Zusammenstellung:

	a	b	$log.\ nat.\ \frac{a}{b} = \lambda$	$\frac{aa+bb}{\sqrt{ab}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\,\mathrm{arc\ tang}\,\frac{\lambda}{\pi}}$
$A.$	413,72	73,28	1,730902	768,22
$B.$	414,305	73,39	1,730814	769,23
$C.$	265,14	46,89	1,732454	492,44
$D.$	572,78	101,76	1,727884	1063,11

Die in der letzten Columne angegebenen Werthe können nun, wie S. 351 ff. gezeigt worden ist, als Maass der Stromstärke im Multiplicator dienen, d. h. als die S. 213 mit A, B, C, D bezeichneten Werthe betrachtet werden. Mit diesen Werthen erhält man dann endlich nach den daselbst aufgestellten Formeln:

$$\frac{AB - BC}{AB - AC} = 0{,}99765$$

$$\frac{AB - AD}{AB - BD} = 0{,}99762$$

Im Mittel hiernach verhält sich also der Widerstand der ersten Copie zu dem der zweiten:

$$= 0{,}99764 : 1$$

D.

Begründung der Regeln zur Berechnung des Widerstands eines Leiters aus den Beobachtungen.

Zur Begründung der Regeln zur Berechnung des Widerstands eines Leiters aus den Beobachtungen soll von folgenden beiden Fundamentalsätzen der Lehre vom Elektromagnetismus und der Lehre von der Magnetoelektricität ausgegangen werden.

Erster Satz. Das linearische Element eines galvanischen Stroms ds übt auf ein Element des magnetischen Fluidums μ eine bewegende Kraft aus, die dem Quadrate der Entfernung r umgekehrt proportional ist; aber es tritt dabei zugleich der ganz abweichende Umstand ein, dass die Richtung der Kraft nicht in der verbindenden geraden Linie, sondern senkrecht gegen die durch μ und die Richtung von ds gelegte Ebene ist, und dass ausserdem die Stärke der Kraft nicht von der Entfernung allein, sondern zugleich von dem Winkel abhängt, welchen r mit der Richtung von ds macht. Nennt man diesen Winkel θ, so ist

$$\frac{\sin\theta \,.\, \mu ds}{rr}$$

das Maass der bewegenden Kraft, welche ds auf μ ausübt, und eben so gross ist die von μ auf das Stromelement ds oder dessen ponderabeln Träger ausgeübte Kraft, deren Richtung der ersteren entgegengesetzt parallel ist.

Anmerkung. Unter dem mit ds bezeichneten Stromelemente ist das Product seiner Länge α in die Intensität i des durchgehenden Stroms verstanden, also $ds = \alpha i$. — Dieser Fundamentalsatz des Elektromagnetismus ist hier wörtlich so wiedergegeben, wie ihn Gauss in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839» S. 1. 2 ausgesprochen hat.

Zweiter Satz. Wird das Element des magnetischen Fluidums μ mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft bewegt, welche nach dem ersten Satze auf das Stromelement $ds = \alpha i$ wirkt, so wird auf das lineare Element des Leiters α eine der Richtung des Stroms i parallele elektromotorische Kraft ausgeübt, deren Stärke durch den im ersten Satze gegebenen Ausdruck $\frac{\sin\theta \, . \, \mu ds}{rr}$ dargestellt wird, wenn darin $ds = \alpha i$ mit αu vertauscht wird, also durch

$$\frac{\sin\theta \, . \, \mu \alpha u}{rr} .$$

Wird dagegen das Element des magnetischen Fluidums μ in einer andern Richtung bewegt, welche mit der oben bezeichneten den Winkel ψ macht, so ist dieser Ausdruck der Stärke der Kraft noch mit $\cos\psi$ zu multiplicieren.

Anmerkung. Führt man statt der beiden Winkel θ und ψ zwei andere Winkel ein, nämlich den Winkel φ, welchen die Richtung, nach welcher μ bewegt wird, mit r bildet, und den Winkel ε, welchen die Richtung von α mit der Normale einer durch r der Richtung, nach welcher μ bewegt wird, parallel gelegten Ebene macht, so verwandelt sich der Ausdruck $\frac{\sin\theta \, . \, \mu\alpha u}{rr} \cdot \cos\psi$ in $\frac{\sin\varphi \, . \, \mu\alpha u}{rr} \cos\varepsilon$. — Dieser letztere Ausdruck stimmt mit demjenigen überein, welchen man erhält, wenn man die in der ersten Abhandlung über »Elektrodynamische Maassbestimmungen« S. 345 angegebene elektromotorische Elementarkraft nach der Richtung des inducierten Elements α zerlegt. Der so erhaltene Ausdruck enthält zwar noch einen constanten Factor, dessen Werth aber von der Wahl des Maasses für die elektromotorische Kraft abhängt und für ein bestimmtes Maass $= 1$ ist.

Aus diesen beiden Sätzen werden folgende Bestimmungen abgeleitet.

1. Es findet eine solche Relation zwischen den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Kräften statt, dass, wenn zwei beliebig gelegene magnetische Elemente μ und μ' auf ein Stromelement $ds = \alpha i$ gleiche und gleichgerichtete elektromagnetische Kräfte ausüben, auch ihre elektromotorischen Kräfte auf das lineare Element des Leiters α, wenn es bewegt wird, gleich sind. Dasselbe gilt, wenn für μ und μ' eine Gesammtheit von beliebig vertheilten magnetischen Elementen gesetzt wird. Hieraus folgt, dass, wenn der Erdmagnetismus an einem Orte gleiche und gleichgerichtete elektromagnetische Kraft, wie ein entfernter Magnetstab, ausübt, die elektromotorische Kraft des Erdmagnetismus auf einen daselbst bewegten Inductor ebenfalls der des Magnetstabs gleich sei, wie auch der Magnetismus in der Erde vertheilt sein möge.

2. Wenn das Stromelement ds einem Kreisstrome angehört, so wird die auf der Kreisebene senkrechte Componente der elektromagne-



tischen Kraft, welche ds auf μ ausübt, erhalten, wenn $\frac{\sin\theta \,.\, \mu ds}{rr}$ mit dem Cosinus des Winkels multipliciert wird, welchen die Kreisebene mit der durch μ und die Richtung von ds gelegten Ebene bildet. Diese Componente heisse C.

Das Stromelement ds möge in seine Factoren zerlegt werden, nämlich in seine Stromintensität i und in seine Länge, welche als die Länge eines Kreiselements mit $ad\alpha$ bezeichnet wird, wenn a der Halbmesser des Kreises ist, dem es angehört, und α der Winkel, welchen der zugehörige Radius mit demjenigen Radius bildet, welcher mit μ in einer auf der Kreisebene senkrechten Ebene liegt. Bezeichnet man ferner mit b das von μ auf die Kreisebene gefällte Perpendikel und mit x den Abstand des Fusspunkts dieses Perpendikels vom Mittelpunkte, so ist

$$rr = aa + bb + xx - 2ax\cos\alpha$$

und man erhält für die ganze von ds auf μ ausgeübte Kraft den Ausdruck:

$$\frac{\sin\theta \,.\, i\mu \,.\, ad\alpha}{aa + bb + xx - 2ax\cos\alpha}.$$

Ferner ist der Cosinus des Winkels, welchen die Kreisebene mit der durch μ und die Richtung von ds gelegten Ebene bildet:

$$\frac{a - x\cos\alpha}{r\sin\theta} = \frac{a - x\cos\alpha}{\sin\theta \,.\, \sqrt{(aa + bb + xx - 2ax\cos\alpha)}}.$$

Das Product dieses Cosinus in obigen Ausdruck der ganzen Kraft giebt den Ausdruck für die gesuchte Componente C, nämlich:

$$C = i\mu \,.\, ad\alpha \frac{a - x\cos\alpha}{(aa + bb + xx - 2ax\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach dem vorausgeschickten zweiten Satze, dem Grundgesetze der Magnetoelektricität, ergiebt sich hieraus die elektromotorische Kraft, welche μ auf ds ausübt, wenn μ mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft C bewegt wird, durch Multiplication des Werthes, welchen C hat, wenn $i = -1$ ist, mit u, nämlich $-u\mu \,.\, ad\alpha \frac{a - x\cos\alpha}{(aa + bb + xx - 2ax\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}$; dagegen ergiebt sich, wenn ds mit der Geschwindigkeit u in der nämlichen auf der Kreisebene senkrechten Richtung bewegt wird, die elektromotorische Kraft, welche μ auf ds ausübt,

$$+ u\mu \,.\, ad\alpha \frac{a - x\cos\alpha}{(aa + bb + xx - 2ax\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Entwickelt man ferner den obigen Ausdruck von C nach Potenzen von $\cos\alpha$, so erhält man:



$$C = \frac{i\mu}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\Big\{aad\alpha + \Big(2aa - bb - xx\Big)\frac{ax}{aa+bb+xx}\cdot\cos\alpha d\alpha$$

$$+\tfrac{3}{2}\Big(3aa - 2bb - 2xx\Big)\frac{a^2x^2}{(aa+bb+xx)^2}\cdot\cos\alpha^2 d\alpha$$

$$+\tfrac{5}{2}\Big(4aa - 3bb - 3xx\Big)\frac{a^3x^3}{(aa+bb+xx)^3}\cdot\cos\alpha^3 d\alpha + \ldots\Big\}$$

3. Der Ausdruck für die auf der Kreisebene senkrechte elektromagnetische Kraft, welche der ganze Kreisstrom auf μ ausübt, ergiebt sich dann auf folgende Weise. Da der Halbmesser a und die Stromintensität i, wie auch b und x, für alle Kreiselemente gleich sind, so ist die gesuchte Kraft, oder die Summe aller auf die Kreisebene senkrechten elektromagnetischen Kräfte, welche alle Stromelemente auf μ ausüben,

$$i\mu\,.\,a\int_0^{2\pi}\frac{a - x\cos\alpha}{(aa+bb+xx-2ax\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,d\alpha$$

$$= \frac{i\mu}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\cdot\Big\{aa\int_0^{2\pi}d\alpha + \Big(2aa - bb - xx\Big)\frac{ax}{aa+bb+xx}\int_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha$$

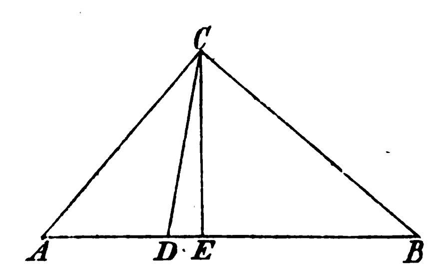
$$+\tfrac{3}{2}\Big(3aa - 2bb - 2xx\Big)\frac{a^2x^2}{(aa+bb+xx)^2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\alpha^2 d\alpha$$

$$+\tfrac{5}{2}\Big(4aa - 3bb - 3xx\Big)\frac{a^3x^3}{(aa+bb+xx)^3}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\alpha^3 d\alpha + \ldots\Big\}$$

das ist:

$$\frac{2\pi aa\,.\,i\mu}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\Big\{1 + \tfrac{3}{4}\Big(3aa - 2bb - 2xx\Big)\frac{xx}{(aa+bb+xx)^2} + \ldots\Big\}\text{I.}$$

Man kann sich übrigens leicht überzeugen, dass die Stromintensität hierin nach dem Art. 10 festgesetzten absoluten Maasse zu bestimmen ist, wenn man die Kreisebene $\pi aa = 1$ setzt, wo man findet, dass $i = 1$ sein muss, damit die in die Ferne (wo aa gegen $bb + xx$ verschwindet) auf μ senkrecht gegen die Kreisebene ausgeübte Kraft der in derselben Richtung von einem Magnete ausgeübten Kraft gleich werde, welcher das absolute Maass des Magnetismus besitzt und dessen Axe auf der Kreisebene normal ist. A sei der Mittelpunkt des Magnets, AB die Richtung seiner Axe, das Element μ befinde sich in C. ABC sei ein bei C rechtwinkeliges Dreieck und $AD = \frac{1}{3}AB$; so ist nach einem



bekannten Satze (»Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840« S. 33. 34) CD die Richtung der auf μ wirkenden Kraft und ihre Stärke ist $\frac{\mu}{AC^2} \cdot \frac{CD}{AD}$. Fällt man CE perpendicular auf AB so ist die der Axe des Magnets parallele Componente $\frac{\mu}{AC^2} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{ED}{CD} = \frac{\mu}{AC^2} \cdot \frac{ED}{AD}$. Nun sind AE und CE die oben mit b und x bezeichneten Linien, wonach $AC = \sqrt{(bb + xx)}$; $AD = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} \frac{AC^2}{AE} = \frac{bb + xx}{3b}$ und $ED = AE - AD = \frac{2bb - xx}{3b}$; folglich die gesuchte Kraft

$$\mu \cdot \frac{2bb - xx}{(bb + xx)^{\frac{5}{2}}}.$$

Wird dagegen in obigem Ausdrucke $\pi aa = 1$ und $\frac{aa}{bb + xx} = 0$ gesetzt, so erhält man

$$i\mu \cdot \frac{2bb - xx}{(bb + xx)^{\frac{5}{2}}},$$

woraus sich ergiebt, dass $i = 1$ sein müsse, wenn der die Flächeneinheit umlaufende Strom dem absoluten Maasse des Magnetismus gleich wirken soll. Diese Stromintensität ist aber das Art. 10 festgesetzte absolute Maass, woraus einleuchtet, dass bei den Anwendungen der obigen elektromagnetischen Gesetze die Stromintensitäten nach dem festgesetzten absoluten Maasse zu bestimmen sind.

4. Der Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche μ auf den ganzen Kreis ausübt, wenn es mit der Geschwindigkeit u in senkrechter Richtung auf die Kreisebene bewegt wird, ergiebt sich auf folgende Weise. Aus dem vorausgeschickten zweiten Satze ergab sich die elektromotorische Kraft, welche μ auf ds ausübt, wenn es mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft C bewegt wird, durch Multiplication von u in den Werth von C, wenn darin $i = -1$ gesetzt wird, nämlich:

$$-\frac{\mu u}{(aa + bb + xx)^{\frac{3}{2}}} \cdot \Big\{ aad\alpha + \left(2aa - bb - xx\right)\frac{ax}{aa + bb + xx} \cdot \cos \alpha d\alpha$$
$$+ \tfrac{3}{2}\left(3aa - 2bb - 2xx\right) \frac{a^2x^2}{(aa + bb + xx)^2} \cdot \cos \alpha^2 d\alpha$$
$$+ \tfrac{5}{2}\left(4aa - 3bb - 3xx\right) \frac{a^3x^3}{(aa + bb + xx)^3} \cdot \cos \alpha^3 d\alpha + \ldots \Big\}$$

Die Summe der von μ auf alle Kreiselemente ausgeübten elektromotorischen Kräfte folglich:

$$-\frac{\mu u}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\left\{aa\int_0^{2\pi}d\alpha+\left(2aa-bb-xx\right)\frac{ax}{aa+bb+xx}\int_0^{2\pi}\cos\alpha^2 d\alpha\right.$$

$$+\tfrac{3}{2}\left(3aa-2bb-2xx\right)\frac{a^2x^2}{(aa+bb+xx)^2}\int_0^{2\pi}\cos\alpha^2 d\alpha$$

$$\left.+\tfrac{5}{2}\left(4aa-3bb-3xx\right)\frac{a^3x^3}{(aa+bb+xx)^3}\int_0^{2\pi}\cos\alpha^3 d\alpha+\ldots\right\}$$

das ist:

$$-\mu u\frac{\pi aa}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{2+\tfrac{3}{2}\left(3aa-2bb-2xx\right)\frac{xx}{(aa+bb+xx)^2}+\ldots\right\}\text{II.}$$

Man kann sich übrigens leicht überzeugen, dass dieser Werth die elektromotorische Kraft nach dem Art. 10 festgesetzten absoluten Maasse ausdrückt. Setzt man nämlich in diesem Werthe $b=0$, so ist die lineare Geschwindigkeit u des Elements μ identisch mit einer Drehungsgeschwindigkeit $\gamma=\frac{u}{x}$ um den gegen x senkrechten Kreisdurchmesser, wofür dann wieder, ohne Aenderung der elektromotorischen Kraft, die entgegengesetzte Drehungsgeschwindigkeit des Kreises $-\gamma$ um die nämliche Axe gesetzt werden kann. Der Ausdruck der elektromotorischen Kraft von μ auf den mit der Geschwindigkeit $-\gamma$ gedrehten Kreis ist also

$$-\mu\gamma\frac{\pi aax}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}\left\{2+\tfrac{3}{2}\left(3aa-2xx\right)\frac{xx}{(aa+xx)^2}+\ldots\right\}$$

und ist daher auf den mit der Geschwindigkeit $+\gamma$ gedrehten Kreis, wenn μ aus der Ferne wirkt, wo aa gegen xx verschwindet, $-\mu\gamma\frac{\pi aa}{xx}$. Hieraus ergiebt sich die Summe der beiden elektromotorischen Kräfte, wenn erstens $\mu=+m$ und $x=R+e$ und zweitens $\mu=-m$ und $x=R-e$, d. i., die elektromotorische Kraft eines Magnets $M=2em$, welcher aus der Ferne R wirkt,

$$-m\gamma\frac{\pi aa}{(R+e)^2}+m\gamma\frac{\pi aa}{(R-e)^2}=M\gamma\frac{2\pi aa}{R^3}.$$

Macht man nun die Drehungsgeschwindigkeit γ des Kreises so gross, dass seine Projection auf eine gegen x normale Ebene in der Zeiteinheit um die Flächeneinheit sich ändert, d. i. $\gamma\pi aa=1$, so findet man, dass obiger Werth der elektromotorischen Kraft $=1$ sein müsse, damit

M den Stabmagnetismus bezeichne, welcher der Einheit des Erdmagnetismus, dessen Richtung mit x parallel ist, gleich wirkt. Wenn nämlich in der Richtung des Erdmagnetismus T eines Ortes in dem Abstande R ein gleich gerichteter Magnet M liegt, so ist nach magnetischen Maassbestimmungen die Wirkung von M der Wirkung von T an jenem Orte gleich, wenn

$$\frac{2M}{R^3} = T$$

ist. M bezeichnet also den der Maasseinheit des Erdmagnetismus gleich wirkenden Stabmagnetismus, wenn

$$\frac{2M}{R^3} = 1$$

ist, woraus hervorgeht, dass, wenn zugleich $\gamma\pi aa = 1$, der obige Werth der elektromotorischen Kraft auch $= 1$ sei. Diese elektromotorische Kraft ist aber selbst das Art. 10 festgesetzte absolute Maass, woraus einleuchtet, dass bei Anwendungen des hier entwickelten magnetoelektrischen Gesetzes die elektromotorische Kraft nach dem angegebenen absoluten Maasse bestimmt wird.

Wir haben bisher die Kräfte betrachtet, welche ein Element eines magnetischen Fluidums μ ausübt oder erleidet. Die Anwendung auf die Versuche fordert alle Elemente beider magnetischen Fluida, welche in einer Magnetnadel enthalten sind, in Rechnung zu bringen. Es leuchtet aber ein, dass man sich dabei nach Gauss an die Betrachtung der Elemente der idealen, an der Oberfläche vertheilten magnetischen Fluida halten könne, die gänzlich von einander geschieden sind. Ist die Summe der positiven Elemente $= +m$, so ist die Summe der negativen $= -m$; und bezeichnet man den Abstand des Mittelpunktes jener von dem Mittelpunkte dieser mit $2e$, so ist das Moment der Nadel $= 2em$ und die Linie e ist von einer messbaren Grösse. Auch leuchtet ein, dass, wenn alle positiven Elemente nahe beisammen liegen und eben so alle negativen, ihre Wirkung nahe dieselbe ist, wie wenn sie in ihren respectiven Mittelpunkten concentriert wären. Es wird dann in der gebrauchten Nadel nur die Wirkung zweier Punkte in Rechnung kommen, nämlich desjenigen, in welchem alles nordmagnetische, und desjenigen, in welchem alles südmagnetische Fluidum concentriert gedacht wird. Hiernach ergiebt sich

5. die Vergleichung des Drehungsmoments, welches der Multiplicator auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel ausübt, mit

demjenigen, welches er ausüben würde, wenn die Nadel **weit entfernt** wäre, folgendermassen. Die Meridianebene, in welcher die Nadel liegt, theilt den Multiplicator so, dass eine gleiche Zahl von Umwindungen zu beiden Seiten liegt. Zieht man in dieser Ebene eine horizontale Linie durch den Mittelpunkt des Multiplicators, so liege der Punkt, in welchem alles nordmagnetische Fluidum $+m$ concentriert gedacht wird, in dieser Linie und der Abstand desselben vom Mittelpunkte heisse $+e$; der Abstand des in derselben Linie liegenden Punktes, in welchem alles südmagnetische Fluidum $-m$ concentriert gedacht wird, heisse $-e$. a' und a'' seien der innere und äussere Durchmesser des Multiplicators und $2b'$ die Breite seines Querschnitts, welcher also $2(a''-a')b'$ ist. Der Theil von diesem Querschnitte des ganzen Ringes, welcher auf eine Umwindung kommt, deren Halbmesser a ist und deren Ebene im Abstande b vom Mittelpunkte des Multiplicators liegt, werde mit $d a d b$ bezeichnet: so ist nach (I.) das Product des Querschnitts einer Umwindung in die auf $+m$ von ihr ausgeübte **Kraft**:

$$+ im \frac{2\pi aa da db}{(aa+bb+ee)^{\frac{3}{2}}} \left\{1 + \frac{3}{4}\left(3aa - 2bb - 2ee\right)\frac{ee}{(aa+bb+ee)^2} + \ldots\right\}.$$

Multipliciert man dieses Product mit dem von der Drehungsaxe auf die Richtung der Kraft gefällten Perpendikel e, so erhält man das Product des Querschnitts der Umwindung in das von ihr ausgeübte **Drehungsmoment**. Setzt man endlich in diesem Ausdrucke $-m$ für $+m$ und $-e$ für $+e$, so erhält man einen gleichen Werth für das Product desselben Querschnitts in das von der nämlichen Umwindung auf das negative Fluidum ausgeübte Drehungsmoment. Folglich ist das Product des von jener Umwindung auf die ganze Nadel ausgeübten Drehungsmoments in ihren Querschnitt, wenn man mit $M = 2em$ den Nadelmagnetismus bezeichnet:

$$iM \frac{2\pi aa da db}{(aa+bb+ee)^{\frac{3}{2}}} \left\{1 + \frac{3}{4}\left(3aa - 2bb - 2ee\right)\frac{ee}{(aa+bb+ee)^2} + \ldots\right\}$$

Da e ein kleiner Bruchtheil von a ist, so können alle Theile, welche die vierte oder höhere Potenzen zum Factor haben, weggelassen werden und man erhält dann

$$iM \frac{2\pi aa da db}{(aa+bb)^{\frac{3}{2}}} \left\{1 + \frac{3}{4}\,\frac{aa-4bb}{(aa+bb)^2}\cdot ee\right\}$$

Hieraus folgt nun die Summe der Producte des Querschnitts jeder Umwindung in das von derselben ausgeübte Drehungsmoment

$$iM \cdot 2\pi \int_{a'}^{a''} aada \int_{-b'}^{+b'} \frac{db}{(aa+bb)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \; \frac{aa - 4bb}{(aa+bb)^2} ee \right\}$$

$$= iM \left\{ 4\pi b' \cdot \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{\pi}{b'} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot ee \right\}$$

Dividiert man diesen Ausdruck mit dem Producte aus dem Querschnitt einer Umwindung in die Zahl der Umwindungen, d. i. mit dem Querschnitte des ganzen Ringes $2(a''-a')b'$; so erhält man das mittlere Drehungsmoment, welches eine Umwindung auf die Nadel ausübt, woraus durch Multiplication mit der Zahl der Umwindungen n das Drehungsmoment des Multiplicators auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel hervorgeht, nämlich:

$$iM \,.\, 2n\pi \cdot \frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{ee}{b'b'} \right\}$$

Für den Fall, wo b' gegen a' verschwindet und a' von a'' wenig verschieden ist, ergiebt sich $iM \cdot \frac{2n\pi}{a'}$ und a' ist in diesem Falle der Halbmesser des Multiplicators. Versteht man nun im Allgemeinen unter Halbmesser des Multiplicators einer gegebenen Centralnadel den Ausdruck:

$$\frac{a'' - a'}{\log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{ee}{b'b'}}$$

und bezeichnet ihn mit r', so ist das Drehungsmoment

$$\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi \,.$$

Wird dagegen die Nadel vom Multiplicator weit entfernt, bleiben aber dabei $+m$ und $-m$ in derselben Geraden, in den Abständen $R+e$ und $R-e$ vom Mittelpunkte, so muss auf den Ausdruck C S. 362 für die gegen die Meridianebene senkrechte Kraft zurückgegangen werden, welche ein Element ds auf μ ausübt, indem darin $+m$ oder $-m$ für μ, und $R+e$ oder $R-e$ für x gesetzt wird. Man erhält dann für $+m$

$$im \,.\, ad\alpha \, \frac{a - (R+e) \cos \alpha}{(aa + bb + (R+e)^2 - 2a(R+e) \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

für $-m$

$$-\, im \,.\, ad\alpha \, \frac{a - (R-e) \cos \alpha}{(aa + bb + (R-e)^2 - 2a(R-e) \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} \,.$$

Die Summe des ersteren mit $+e$ multiplicierten und des letzteren mit $-e$ multiplicierten Werthes giebt das von ds auf die Nadel ausgeübte

Drehungsmoment, nämlich, wenn man M für $2em$ schreibt und beachtet, dass a, b und e gegen R verschwinden,

$$iM \,.\, a d\alpha \cdot \frac{a - R\cos\alpha}{(RR - 2aR\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{iM}{a}\left\{\frac{aa}{RR}\cos\alpha d\alpha + \frac{a^3}{R^3}\left(3\cos\alpha^2 - 1\right)d\alpha + ..\right\}$$

folglich ist das von dem ganzen Kreise, zu welchem ds gehört, auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment

$$-\frac{iM}{a}\left\{\frac{aa}{RR}\int_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha + \frac{a^3}{R^3}\int_0^{2\pi}(3\cos\alpha^2 - 1)\,d\alpha + ..\right\}$$

$$= -\frac{\pi aa}{R^3} \cdot Mi\,,$$

weil die folgenden Glieder, welche die vierte oder höhere Potenzen von $\frac{a}{R}$ enthalten, weggelassen werden können.

Integriert man diesen mit $da db$ multiplicierten Werth zwischen den Grenzen von $a = a'$ bis $a = a''$ und von $b = -b'$ bis $b = +b'$, so ist das Product dieses Integrals in $\frac{n}{2(a''-a')b'}$ das vom Multiplicator auf die entfernte Nadel ausgeübte Drehungsmoment

$$-\frac{1}{3}\frac{n\pi Mi}{R^3} \cdot \frac{a''^3 - a'^3}{a'' - a'} = -\frac{n\pi Mi}{R^3} \cdot \frac{a'a' + a'a'' + a''a''}{3}$$

Für den Fall, wo a' von a'' wenig verschieden ist, ergiebt sich

$$-\frac{n\pi a'a'}{R^3} \cdot Mi.$$

und a' ist in diesem Falle der Halbmesser des Multiplicators. Versteht man nun im Allgemeinen unter Halbmesser des Multiplicators einer e n t f e r n t e n N a d e l den Ausdruck

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}(a'a' + a'a'' + a''a'')}$$

und bezeichnet ihn mit r'', so ist das Drehungsmoment

$$-\frac{n\pi r''r''}{R^3} \cdot Mi\,.$$

Vergleicht man endlich den gefundenen Ausdruck des Drehungsmoments, welches der Multiplicator auf die in seinem M i t t e l p u n k t e befindliche Nadel ausübt, mit demjenigen, welches er ausüben würde, wenn die Nadel w e i t e n t f e r n t wäre; so ergiebt sich das Verhältniss

$$\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi : -\frac{n\pi r''r''}{R^3} \cdot Mi = 1 : -\frac{r'r''r''}{2R^3}\,.$$

Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den nach der ersten Methode Art. 14 ausgeführten Beobachtungen.



Die Gerade *NS* bezeichne die Richtung des horizontalen Erdmagnetismus, dessen Stärke an dem Orte $A = T'$, an dem Orte $B = T''$ sei. Eine geschlossene Kette bestehe aus zwei verticalen Ringen, deren Mittelpunkte *A* und *B* seien. Der Ring *B*, welcher den Multiplicator bildet, stehe fest, der Ring *A*, welcher den Inductor bildet, sei um seinen verticalen Durchmesser drehbar. Die Summe der Flächen, welche von allen Umwindungen des Ringes *A* begrenzt werden, sei *S*, und ψ bezeichne den Winkel, welchen die Normale der Ringebene mit der Richtung *NS* am Ende der Zeit *t* bildet; so ist die Projection von *S* auf eine auf *NS* senkrechte Ebene in diesem Augenblicke $= S \cos \psi$ und die Zunahme derselben in dem Zeitelemente dt ist $-S \sin \psi \,.\, d\psi$. Hieraus ergiebt sich der absolute Werth der vom Erdmagnetismus T' auf den Ring *A* ausgeübten elektromotorischen Kraft nach Art. 10

$$eE = - ST'. \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \cdot E\,.$$

Der Integralwerth hiervon von dem Augenblicke, wo $\psi = \pi$ war, bis zu dem Augenblicke, wo $\psi = 0$ geworden ist, werde durch $e'E$ bezeichnet, so ist

$$e' = 2ST'\,.$$

Der von dieser elektromotorischen Kraft in der ganzen geschlossenen Kette hervorgebrachte Strom, dessen Intensität am Ende der Zeit *t* mit iJ bezeichnet wird, geht durch den Multiplicatorring *B*, welcher, so durchströmt, auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel, deren magnetische Axe mit *NS* zusammenfällt, ein Drehungsmoment ausübt, welches nach S. 368 auf folgende Weise ausgedrückt wird:

$$\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi\,,$$

worin

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{ee}{b'b'} \right\}$$

Es bezeichnet hier *n* die Zahl der Umwindungen des Multiplicatorringes *B*, a' und a'' den kleinsten und grössten Halbmesser und

$2b'$ die Höhe desselben, M den Magnetismus der Nadel nach absolutem Maasse und $2e$ ist der Quotient $\frac{M}{m}$, wenn m die Menge des nordmagnetischen Fluidums ausdrückt, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet ist.

Bezeichnet K das Trägheitsmoment der Nadel, so ergiebt sich hieraus die Acceleration der Drehung der Nadel

$$= \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi}{K}.$$

Bezeichnet man ferner den Integralwerth der Stromintensität iJ für den Zeitraum von dem Augenblicke an, wo $\psi = \pi$ war, bis zu dem Augenblicke, wo $\psi = 0$ geworden ist, mit $i'J$, so ist der Integralwerth der Acceleration für den nämlichen Zeitraum, d. i. die durch den Inductionsstoss der Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi'}{K}$$

woraus durch Multiplication mit $\frac{t'}{\pi}$ die Elongationsweite α

$$\alpha = \frac{2nt'}{r'} \cdot \frac{i'M}{K}$$

folglich

$$i' = \frac{\alpha K r'}{2nMt'}$$

erhalten wird, wo t' die Schwingungsdauer der Nadel bezeichnet.

Ist $1 : (1 + \theta)$ das Verhältniss, in welchem die magnetische Directionskraft durch die Elasticität des Fadens, an welchem die Nadel hängt, vergrössert wird, und T'' die Stärke des horizontalen Erdmagnetismus am Orte des Multiplicators, so ist

$$t't' = \frac{\pi\pi K}{(1 + \theta) MT''}$$

oder

$$\frac{K}{Mt'} = \frac{(1 + \theta) T'' t'}{\pi\pi}$$

folglich

$$i' = \frac{(1 + \theta) T'' r' t'}{2n\pi\pi} \cdot \alpha.$$

Bezeichnet endlich wW den Widerstand der ganzen geschlossenen Kette, so ergiebt sich für die Berechnung des Coefficienten w die Regel

$$w = \frac{e'}{i'} = \frac{n}{1 + \theta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi\pi S}{\alpha r' t'}$$

was zu beweisen war.

Regel zur Berechnung des Widerstands aus den nach der zweiten Methode Art. 15 ausgeführten Beobachtungen.

Wird der feststehende dem magnetischen Meridiane parallele Ring B in sich geschlossen und die in seinem Mittelpunkte hängende Nadel in Schwingung gesetzt, so wird von dieser Nadel auf den Ring B eine elektromotorische Kraft ausgeübt, welche auf folgende Weise bestimmt werden kann.

Bezeichnet $+m$ das nordmagnetische Fluidum, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht wird, und $+e$ die Entfernung, in welcher der Mittelpunkt dieser magnetischen Masse von dem Mittelpunkte des Ringes B liegt; bezeichnet ferner $-m$ das südmagnetische Fluidum, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht wird, und $-e$ die Entfernung, in welcher der Mittelpunkt dieser magnetischen Masse von dem Mittelpunkte des Ringes B liegt; und ist folglich der Nadelmagnetismus

$$M = 2em;$$

so wird, wenn γ die Drehungsgeschwindigkeit der Nadel ist, für kleine Elongationsweiten der Nadel, die elektromotorische Kraft, welche die Nadel auf eine Umwindung des Ringes B ausübt, deren Halbmesser $= a$ ist und deren Ebene in der Entfernung b vom Mittelpunkte des Ringes B liegt, nach S. 365 durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$-\gamma M \frac{\pi aa}{(aa+bb+ee)^{\frac{3}{2}}} \left\{2 + \frac{3}{2}\left(3aa - 2bb - 2ee\right)\frac{ee}{(aa+bb+ee)^{2}}\right\}$$

indem dort erstens $\mu = +m$ und $u = +e\gamma$, zweitens $\mu = -m$ und $u = -e\gamma$ gesetzt und die Summe beider Werthe genommen wird. Die elektromotorische Kraft, welche die Nadel auf den ganzen Ring ausübt, dessen innerer und äusserer Halbmesser a' und a'' und dessen Höhe $2b'$ ist und der n Umwindungen besitzt, folgt hieraus $= eE$, wo $e =$

$$-\frac{n}{2(a''-a')b'}\cdot\gamma M\pi\int_{a'}^{a''} aada \int_{-b'}^{+b'} \frac{db}{(aa+bb+ee)^{\frac{3}{2}}}\left(2+\tfrac{3}{2}(3aa-2bb-2ee)\frac{ee}{(aa+bb+ee)^{2}}\right)$$

oder
$$e = -\gamma M \,.\, 2n\pi \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{ee}{b'b'} \right\}$$

oder
$$e = -\frac{2n\pi}{r'} \cdot M\gamma$$

wenn, wie oben,
$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{ee}{b'b'} \right\}$$

gesetzt wird.

Der im Multiplicatorringe hierdurch inducierte Strom, dessen Intensität mit $-\gamma iJ$ bezeichnet werde, wo iJ die Intensität desjenigen Stroms ist, welcher von der elektromotorischen Kraft $\frac{2n\pi}{r'} M$ hervorgebracht werden würde, übt rückwärts auf die schwingende Nadel wieder ein Drehungsmoment aus, welches nach S. 368 auf folgende Weise ausgedrückt wird:
$$-\frac{2n\pi}{r'} \cdot M\gamma i$$

Bezeichnet K das Trägheitsmoment der Nadel, so ergiebt sich hieraus eine Retardation der Drehungsgeschwindigkeit γ
$$= -\frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{M\gamma i}{K}.$$

Bezeichnet man endlich mit φ den kleinen Winkel, welchen die schwingende Nadel in irgend einem Augenblicke mit dem magnetischen Meridiane macht, also $\gamma = \frac{d\varphi}{dt}$, so ist das Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus T auf die Nadel ausübt,
$$= -MT\varphi$$

und dies verursacht eine Retardation der Geschwindigkeit γ
$$= -\frac{MT}{K}\varphi$$

wozu noch derjenige Theil der Retardation hinzuzufügen ist, welcher von der Elasticität des Aufhängungsfadens herrührt, und welcher, wenn θ die daraus entspringende Directionskraft der Nadel in Theilen ihrer magnetischen Directionskraft ausdrückt,
$$= -\frac{\theta MT}{K}\varphi$$

ist. Die ganze Retardation der Geschwindigkeit $\gamma = \frac{d\varphi}{dt}$ beträgt hiernach
$$-\frac{dd\varphi}{dt^2} = (1+\theta)\frac{MT}{K}\varphi + \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi}{K} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

woraus

$$\varphi = Ae^{-\frac{n\pi Mi}{Kr'}t} \sin t\sqrt{\left((1+\theta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2\right)}$$

folgt, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, t die von einem Durchgang der Nadel durch den Meridian gerechnete Zeit und

$$\frac{\pi}{\sqrt{\left((1+\theta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2\right)}}$$

die Schwingungsdauer der Nadel t', endlich

$$1 : e^{-\frac{n\pi Mit'}{Kr'}}$$

das Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen ist. Der natürliche Logarithmus dieses Verhältnisses oder das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen ist also

$$\lambda = \frac{n\pi Mit'}{Kr'} .$$

Aus dieser Gleichung folgt zur Bestimmung der Intensität iJ des von der elektromotorischen Kraft $e = \frac{2n\pi M}{r'}$ in dem geschlossenen Ringe B hervorgebrachten Stroms

$$i = \frac{Kr'}{n\pi Mt'} \cdot \lambda$$

und hieraus endlich zur Bestimmung des Widerstands wW des Ringes B

$$w = \frac{e}{i} = \left(\frac{n\pi M}{r'}\right)^2 \cdot \frac{2t'}{K\lambda} .$$

Dieser Ausdruck von w lässt sich in eine andere Form bringen, wenn man beachtet, dass die Schwingungsdauer der Nadel

$$t' = \frac{\pi}{\sqrt{\left((1+\theta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2\right)}}$$

und

$$\lambda = \frac{n\pi Mi}{Kr'} \cdot t'$$

war, woraus

$$\frac{MT}{K} = \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{(1+\theta)\,t't'}$$

sich ergiebt, und wenn man ausserdem beachtet, dass, wenn

$$\frac{2M}{Tr'^3} = \operatorname{tang} v_0$$

gesetzt wird, v_0 nach bekannter Methode aus magnetometrischen Ablenkungsversuchen bestimmt werden kann. Durch Multiplication dieser beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{2MM}{Kr'^2} = \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{(1+\theta)\,\iota'\iota} \cdot \text{tang}\, v_0$$

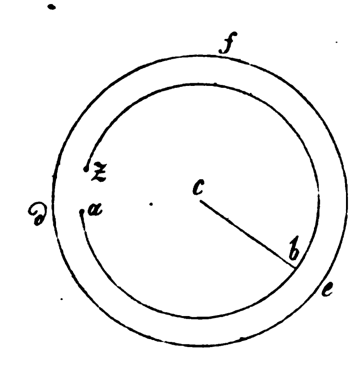
und folglich

$$w = \frac{nn\pi\pi}{1+\theta} \,.\, \text{tang}\, v_0 \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \frac{r'}{\iota}\,,$$

was zu beweisen war.

E.

Regeln zur Berechnung des von einem Strome mit Gleitstelle inducierten Stroms.

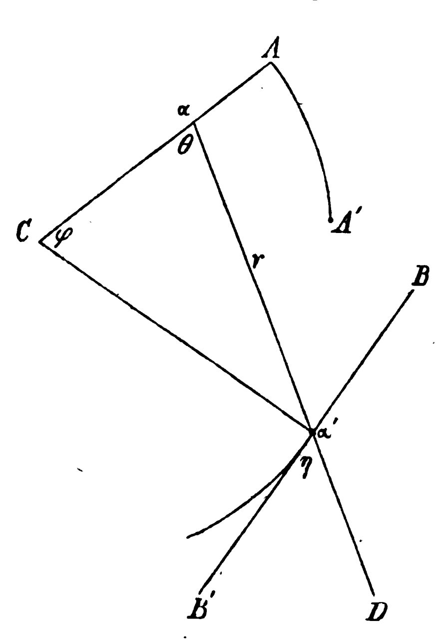


Es ist ein Strom von der constanten Intensität i gegeben, welcher bei a in den Kreisbogen ab eintritt und durch denselben bis zu der Stelle b fortgeht, von wo er durch den Halbmesser bc nach dem Mittelpunkte c und von c nach a zurückgeleitet wird. Es soll die elektromotorische Kraft berechnet werden, welche von diesem Strome auf einen oder mehrere concentrische Kreise def ausgeübt wird, während das bewegliche Stromstück bc einen Kreis um c beschreibt, oder genauer, während das Ende b des beweglichen Stromstücks bc den Bogen abz durchläuft, welcher um den beliebig kleinen Zwischenraum za kleiner ist, als die ganze Peripherie. Es sind hierbei dreierlei Arten von elektromotorischen Kräften zu unterscheiden, nämlich 1) diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche von den Elementen des beweglichen Stromstücks bc ausgeübt werden; 2) diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche die am Ende des Bogens ab in Folge des Fortrückens des beweglichen Stromstücks bc neu eintretenden Stromelemente ausüben; 3) diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche die an der Gleitstelle b von dem Bogen ab zu dem Halbmesser bc, oder von bc zu ba übergehende Elektricität in Folge der Aenderung ihrer Geschwindigkeit, welche sie daselbst erleidet, ausübt.

Was die erste Art von elektromotorischen Kräften betrifft, so wird nach Art. 30 S. 367 der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen die elektromotorische Kraft eines Elements α des beweglichen Stromstücks bc auf ein Element α' des inducierten Leiters def durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, i \left(\sin\theta \sin\eta \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\theta \cos\eta\right) .\, av \cos\theta'.$$

Die a. a. O. gegebene Erklärung der Buchstaben erhellt aus der Anwendung auf den vorliegenden Fall von selbst. Es sei nämlich C der Mittelpunkt des Kreisbogens $A'A$, durch welchen der inducierende Strom i von A' nach A geht, und der bewegliche Radius $CA = R$ bilde das bewegliche Stromstück, durch welches derselbe Strom i von A nach C geht. Das inducierende Element α liege in diesem Radius in der Entfernung ϱ vom Mittelpunkte C. Das inducierte Element α' sei ein Element eines concentrischen Kreises, dessen Halbmesser $= R'$ ist, und der bewegliche Radius CA bilde mit dem durch α' gelegten Radius den Winkel $\varphi = AC\alpha'$. r ist die von α nach α' gezogene Gerade, mit welcher die Richtung des Stroms in α, nämlich αC den Winkel $\alpha'\alpha C = \theta$ macht. Es leuchtet nun ferner ein, weil die Induction bloss von der relativen Bewegung der beiden Elemente α und α' gegen einander abhängt, dass statt der Drehung von α um den Mittelpunkt C, wobei α' unverrückt bliebe, eine im Bogenwerthe gleiche, der Richtung nach entgegengesetzte Drehung von α' um denselben Mittelpunkt C gesetzt werden kann, wobei α unverrückt bleibt. Man setze also hiernach, dass das Element α' nach der Richtung der negativen Tangente $\alpha'B'$ mit der Geschwindigkeit v bewegt werde. Diese Richtung bildet mit der verlängerten r, d. i. mit $\alpha'D$ den Winkel $D\alpha'B' = \eta$. Da ferner α' selbst ein Element des Kreises ist, dessen Richtung mit der positiven Kreistangente $\alpha'B$ zusammenfällt, so ist der Winkel, den seine Richtung mit der verlängerten r macht, $\theta' = \eta + \pi$. Der Winkel ε der beiden Ebenen endlich, welche durch r parallel der Stromrichtung in α und parallel der Richtung, in welcher α' verschoben wird, gelegt werden, ist $\varepsilon = 0$, wenn θ und η entweder beide kleiner oder beide grösser als π sind, oder $\varepsilon = \pi$, wenn der eine von den beiden Winkeln θ, η kleiner, der andere grösser als π ist. Setzt man daher für θ oder η, sobald sie grösser als π sind, ihre Ergänzungswinkel zu 2π, so wird immer $\cos \varepsilon = +1$. Man erhält hiernach für obi-



gen Ausdruck

$$+\frac{\alpha\alpha'}{rr}\,i\left(\sin\theta\sin\theta'-\tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).\,av\cos\theta',$$

worin der Werth von θ immer kleiner, der von θ' grösser als π ist, ferner:

$$rr = R'R' + \varrho\varrho - 2R'\varrho\cos\varphi$$
$$r\sin\theta = R'\sin\varphi$$
$$r\cos\theta = \varrho - R'\cos\varphi$$
$$r\sin\theta' = \varrho\cos\varphi - R'$$
$$r\cos\theta' = -\varrho\sin\varphi.$$

Setzt man ausserdem $\alpha = -d\varrho$ und $\alpha' = R'd\varphi$, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$+\tfrac{1}{2}\,avi\,.\,R'\sin\varphi^2 d\varphi\,.\left(1-\frac{3R'}{rr}(R'-\varrho\cos\varphi)\right)\frac{\varrho d\varrho}{r^3}\,.$$

Setzt man hierin $rr = R'R' + \varrho\varrho - 2R'\varrho\cos\varphi$, so findet man

$$\int\left(1-\frac{3R'}{rr}(R'-\varrho\cos\varphi)\right)\frac{\varrho d\varrho}{r^3} = -\frac{\varrho\varrho}{r^3} + \text{Const.}$$

Es ist daher die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche sämmtliche Elemente des beweglichen Stromstücks von $\varrho = R$ bis zu $\varrho = 0$ auf das inducierte Element α' ausüben, wenn $R'R' + RR - 2R'R\cos\varphi = r'r'$ gesetzt wird,

$$+\tfrac{1}{2}\,avi\,.\,R'RR\cdot\frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r'^3}\,;$$

endlich die Summe der elektromotorischen Kräfte für alle inducierten Elemente des Kreises *def*, d. h. für alle Elemente von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$:

$$+\tfrac{1}{2}\,avi\,.\,R'RR\,.\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r'^3}\,.$$

Das Product dieses Ausdrucks in die Zeit t ist der Integralwerth der Summe der elektromotorischen Kräfte für die Zeit t, oder für den vom Inducenten in dieser Zeit durchlaufenen Weg vt. Setzt man folglich $vt = 2n\pi R'$, d. h. gleich der n fachen Länge der Kreisbahn, so erhält man den Integralwerth der elektromotorischen Kraft für n Umdrehungen des Inducenten:

$$+\,ai\,.\,n\pi RRR'R'\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r'^3}\,.$$

Besteht der inducierte Leiter nicht bloss aus einer, sondern aus m Umwindungen, deren Halbmesser nicht merklich verschieden sind, so erhält

man die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche durch n Umdrehungen des Inducenten auf alle m Umwindungen des inducierten Leiters ausgeübt werden:

$$+ ai \,.\, mn\pi RRR'R' \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r'^3}$$

worin $r'r' = R'R'RR - 2R'R \cos\varphi$ zu setzen ist. Setzt man $R = kR'$, wo $k < 1$ ist, so erhält man

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{R'^3} \left\{ \frac{1}{(1+kk)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3k\cos\varphi}{(1+kk)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15}{2}\,\frac{kk\cos\varphi^2}{(1+kk)^{\frac{7}{2}}} + \frac{35}{2}\,\frac{k^3\cos\varphi^3}{(1+kk)^{\frac{9}{2}}} \right.$$
$$\left. + \frac{315}{8}\,\frac{k^4\cos\varphi^4}{(1+kk)^{\frac{11}{2}}} + \ldots \right\} .$$

folglich

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r'^3} = \frac{\pi}{(1+kk)^{\frac{3}{2}} R'^3} \left\{ 1 + \frac{15}{8}\cdot\frac{kk}{(1+kk)^2} + \frac{315}{64}\,\frac{k^4}{(1+kk)^4} + \ldots \right\}$$

Setzt man hierin wieder für k seinen Werth $\frac{R}{R'}$ und

$$R_0 = \frac{RRR'R'}{(RR+R'R')^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{ 1 + \frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^2 + \frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^4 + \ldots \right\}$$

so erhält man für die gesuchte elektromotorische Kraft den Ausdruck

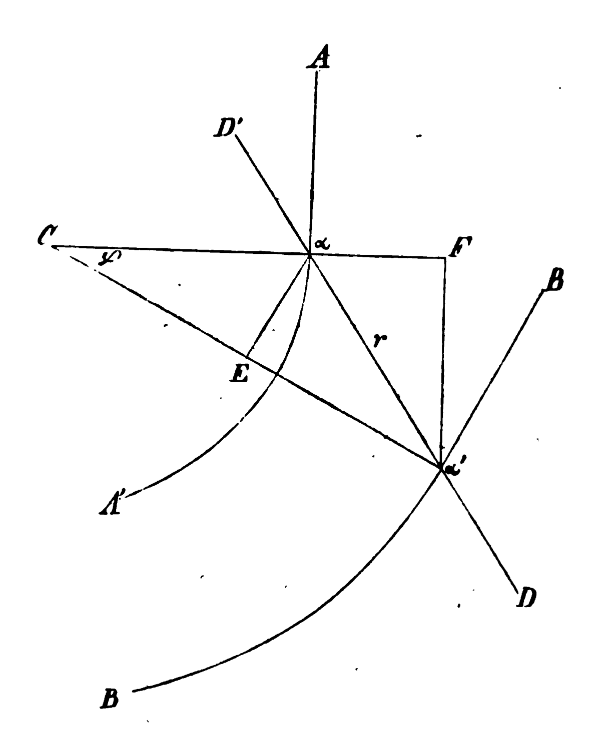
$$+ ai \,.\, mn\pi\pi R_0 ,$$

was zu beweisen war.

Was die zweite Art von elektromotorischen Kräften betrifft, so wird nach Art. 30, S. 367 der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen die elektromotorische Kraft, welche ein Element des unbeweglichen Stromstücks α, in welchem die Stromstärke im Zeitelemente dt um di wächst, auf ein induciertes Element α' ausübt, durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\alpha\alpha'}{r}\, a \cos\theta \cos\theta' \cdot \frac{di}{dt} \cdot$$

Es sind nun α und α' Elemente zweier Kreisbogen $A'\alpha$ und $B'\alpha'$, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt C und die Halbmesser R und R' haben. $A'\alpha$ ist das unbewegliche, αC das bewegliche Stück des inducierenden Stroms; der Winkel $\alpha C\alpha' = \varphi$ ist der Winkel, welchen das bewegliche Stromstück mit dem Halbmesser des inducierten Elements α' bildet; α ist das in die Stromkette neu eintretende Leiterelement, während das Ende des beweglichen Stromstücks um $Rd\varphi = \alpha$ fortschreitet. Die Stromrichtung αA im Elemente α macht mit der Richtung $\alpha\alpha' = r$



den Winkel $D'\alpha A + \pi = \theta$; die Richtung $\alpha' B$ des inducierten Elements α' macht mit der Richtung der verlängerten r, d. h. mit $\alpha' D$ den Winkel $\alpha\alpha' B + \pi = \theta'$. Fällt man von α auf $C\alpha'$ das Perpendikel αE, und von α' auf die verlängerte $C\alpha$ das Perpendikel $\alpha' F$, so ist $\alpha\alpha' F = D'\alpha A = \theta - \pi$ und $\alpha'\alpha E = \alpha\alpha' B = \theta' - \pi$; folglich die Perpendikel

$$\alpha' F = R' \sin\varphi = r\cos\alpha\alpha' F = -r\cos\theta$$
$$\alpha E = R\sin\varphi = r\cos\alpha'\alpha E = -r\cos\theta'.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\alpha\cos\theta\cos\theta' = \frac{RRR'}{rr}\sin\varphi^2 d\varphi.$$

Setzt man diesen Werth in den obigen Ausdruck der elektromotorischen Kraft, so erhält man dafür:

$$-\frac{\alpha'}{2}\frac{RRR'}{r^3}\sin\varphi^2 d\varphi\,.\,a\frac{di}{dt}\,.$$

Setzt man $\frac{di}{dt} = \frac{i}{t}$, wo t die Zeit bezeichnet, in welcher die Stromstärke im inducierenden Elemente $\alpha = Rd\varphi$ von 0 bis i wächst; so ist die elektromotorische Kraft des mit der Stromstärke i neu eintretenden Stromelements α das Product dieses Ausdrucks in die Zeit t:

$$-\frac{\alpha'}{2}ai\cdot\frac{RRR'}{r^3}\sin\varphi^2 d\varphi$$

und die Summe der elektromotorischen Kräfte für alle während einer Umdrehung des beweglichen Stromstücks neu eintretenden Stromelemente:

$$-\frac{\alpha'}{2}\,ai\,.\,RRR'\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r^3} = -\frac{\alpha'}{2}\,ai\,.\,\pi\,\frac{R_0}{R'}\,,$$

wenn

$$R_0 = \frac{RRR'R'}{(RR+R'R')^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{1+\frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^2+\frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^4+\ldots\right\}$$

gesetzt wird. Diese Summe ist für alle inducierten Elemente desselben Kreises, zu welchem α' gehört, ihrer Länge proportional. Bildet also der inducierte Leiter m Umwindungen, deren Halbmesser nahe $= R'$ sind, deren Länge folglich $= 2m\pi R'$ ist, so erhält man, wenn man diese Länge für α' in den obigen Ausdruck setzt, die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche von allen während einer Umdrehung des beweglichen Stromstücks neu eintretenden Stromelementen auf den ganzen inducierten Leiter ausgeübt werden, oder, wenn man noch mit n multipliciert, dieselbe Summe für n Umdrehungen des beweglichen Stromstücks, vorausgesetzt, dass die Wirkung des plötzlichen Verschwindens aller eingetretenen Stromelemente am Ende jeder Umdrehung durch Lösung der inducierten Kette in diesem Augenblicke aufgehoben werde. Die gesuchte elektromotorische Kraft ist also

$$-ai\,.\,mn\pi\pi R_0\,,$$

was zu beweisen war.

Es bleibt also nur noch die dritte Art von elektromotorischen Kräften zu betrachten übrig, nämlich diejenigen, welche die an der Gleitstelle von dem unbeweglichen zum beweglichen Stromstück übergehende Elektricität in Folge der Aenderung ihrer Geschwindigkeit, welche sie bei diesem Uebergange erleidet, ausübt. Alle hieraus sich ergebenden Elementarwirkungen sind aber, wie Art. 39 bewiesen worden ist, den aus der zweiten Art der elektromotorischen Kräfte sich ergebenden gleich; folglich findet diese Gleichheit auch für die Summe statt, für die also gleichfalls der soeben gefundene Ausdruck gültig ist.

Die ganze elektromotorische Kraft für die Dauer von n Umdrehungen des Inducenten ist die Summe der drei gefundenen Ausdrücke, von denen der erste den beiden letzten entgegengesetzt gleich ist, und ist also

$$-ai\,.\,mn\pi\pi R_0$$

Bezeichnet man endlich mit T die Dauer von n Umdrehungen des Inducenten und mit w den Widerstand des inducierten Leiters, so erhält man zur Berechnung der Stärke i' des inducierten Stroms, im Vergleich mit der Stärke i des inducierenden Stroms, welcher eine Gleitstelle hat, folgende Gleichung:

$$\frac{i'}{i} = -\frac{a}{w} \cdot mn\pi\pi \frac{R_0}{T},$$

wo das negative Vorzeichen des zweiten Gliedes bedeutet, dass die Richtung des inducierten Stroms der Richtung des inducierenden entgegengesetzt ist, vorausgesetzt, dass durch die Drehung des Inducenten dem unbeweglichen Stromstücke immer neue Elemente zugefügt werden. Bei umgekehrter Drehung des Inducenten dagegen, durch welche dem unbeweglichen Stromstücke Elemente entzogen würden, würde, wie von selbst einleuchtet, das zweite Glied der Gleichung den entgegengesetzten Werth erhalten.

Inhalt.

Beilagen.

NEUE
VERSUCHE MIT DER DREHWAAGE

VON

F. REICH.

1. Ueber die Differenz zwischen Baily's und meiner Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde.

Vor dem Bekanntwerden der von Baily (*Experiments with the torsion rod for determining the mean density of the Earth.* London 1843. 4.) und von mir (Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwaage. Freiberg 1838. 8.) angestellten Beobachtungen kannte man nur zwei Bestimmungen der mittleren Dichtigkeit der Erde, die einiger Maassen auf Zuverlässigkeit Anspruch machen konnten: die von Maskelyne und Hutton, welche 4,71, und die von Cavendish, welche 5,48 als Resultat gab. Die grosse Verschiedenheit dieser beiden Bestimmungen veranlasste mich, eine Wiederholung der Versuche von Cavendish zu unternehmen. Zu gleicher Zeit wurde eine solche Wiederholung von der Royal Astronomical Society beschlossen, und die Ausführung dem verstorbenen Baily übertragen. Wären diese Versuche in England etwas früher unternommen worden, ja hätte ich nur davon früher Kenntniss gehabt, mit welchen Hilfsmitteln, materiellen sowohl als geistigen, man dort den Gegenstand zu bearbeiten gedenke, so ist keinem Zweifel unterworfen, dass ich meine Versuche nicht unternommen haben würde; — da ich jedoch erst von den englischen Versuchen hörte, als die meinigen fast beendigt und die vielen Schwierigkeiten überwunden waren, die sich mir bei meinen geringen Hülfsmitteln anfänglich entgegenstellten, — so wird es einer Entschuldigung nicht bedürfen, dass ich meine Resultate veröffentlichte, wenn ich auch voraussehen musste, dass sie durch die in London zu erhaltenden ihren Werth grossentheils wieder verlieren würden.

Ich fand die mittlere Dichtigkeit der Erde 5,44; Baily fand sie 5,66.

Somit besteht wieder eine, wenn auch weit kleinere, als die frühere, doch nicht unbeträchtliche Differenz in der Bestimmung dieser

Grösse, und es dürfte nicht unnöthig sein, alles aufzusuchen, was vielleicht als Ursache davon angesehen werden kann.

Es kann mir nicht beifallen zu leugnen, dass die Versuche von Baily einen weit grösseren Werth haben, als die meinigen. Während jene 2153 Beobachtungen umfassen, aus denen 1652 einzelne Resultate abgeleitet wurden, bestehen die meinigen nur aus 57 Beobachtungen, aus denen auf ähnliche Weise, wie wir nachher sehen werden, 30 Resultate herzuleiten sind; — während Baily die Aufhängefäden mehrfach wechselte, und bald eiserne, bald kupferne, bald seidene Fäden einfach und bifilar anwendete, — ferner drei verschiedene Arme gebrauchte, und die Anziehung von 7 verschiedenen Kugeln, sowie auch des schweren kupfernen Armes allein beobachtete — habe ich nur denselben Kupferdraht, denselben Arm und einerlei Kugeln angewendet.

Indessen ist doch nicht zu verkennen, dass die Uebereinstimmung unter meinen Versuchen zu gross ist, um das von dem Baily'schen abweichende Resultat lediglich aus ihrer zu geringen Anzahl zu erklären, wie denn der wahrscheinliche Fehler, mit welchem meine Mittelzahl behaftet ist, nur 0,02 beträgt. Baily sagt S. 98: «Zur Zeit bin ich nicht im Stande die Quelle der Verschiedenheit anzugeben, ausser dass sie etwa in irgend einer Eigenthümlichkeit des Aufhängedrahtes zu suchen ist, indem es offenbar aus einigen Experimenten gegenwärtigen Werkes sich zu ergeben scheint, dass geringe Unterschiede zufällig entstehen, nicht allein aus diesem Grunde, sondern auch aus der Art der Aufhängung, wie sich aus der Classification in Tab. III ergiebt.»

Hier zeigen sich allerdings solche Differenzen, und es ist besonders das mittlere Resultat aus den mit einfachem Kupferdraht von 0,0219 Zoll Durchmesser erhaltenen Bestimmungen nur 5,548, also bedeutend niedriger, als das Hauptmittel; — dagegen sind S. 63 Versuche besprochen, die mit den zweizolligen Bleikugeln und der Aufhängung an bifilaren Seidenfäden in zwei verschiedenen Distanzen, an einfachem Kupferdraht und an bifilaren Kupfer- und Eisendrähten angestellt wurden, und die sämmtlich sehr gut mit einander übereinstimmen, weshalb ich nicht glauben kann, dass die Aufhängungsart die Ursache der fraglichen Differenz sei.

Ich bin genöthigt, den S. 38 von Baily ausgesprochenen Verdacht zurückzuweisen, als hätte ich dadurch eine bessere Uebereinstimmung unter meinen Resultaten herbeigeführt, dass ich einzelne Bestimmungen

wegen zu grosser Abweichung unterdrückt habe. Es ist dieser Verdacht aus der S. 64 meiner Schrift enthaltenen Bemerkung über einige Male beobachtete grössere Anomalien geschöpft worden. Schon a. a. O. ist gesagt, wie diese sich von den mit den Versuchen sonst verbundenen Unregelmässigkeiten leicht unterscheiden liessen, und deshalb zwar den Versuch störten, aber zu einem fehlerhaften Versuch gar keine Veranlassung gaben. Wenn ich nehmlich in diesen Fällen die mit dem Aufhängepunkte verbundene endliche Schraube drehte, um den Arm ins Schwingen zu versetzen, so beobachtete ich, dass derselbe, anstatt wie gewöhnlich regelmässig zu schwingen, entweder nur eine ganz kleine Bewegung machte, und deutlich durch ein Hinderniss festgehalten wurde, oder während seiner Bewegung plötzlich, und ohne vorher allmälig zur Ruhe gekommen zu sein, in die entgegengesetzte Richtung übergieng, woraus nothwendig auf ein Anstossen gefolgert werden musste. In diesen Fällen, die sich während der vom 10ten Juni bis 30ten Juli angestellten Hauptversuche zwei Mal ereigneten, war an die Anstellung einer Beobachtung nicht zu denken, und sie konnten daher auch zu Herleitung einer, wenn auch sehr abweichenden Bestimmung gar keine Veranlassung geben. Ueber die Ursache dieser Störungen habe ich a. a. O. eine Vermuthung ausgesprochen; nach späteren Erfahrungen scheint es mir wahrscheinlicher, dass ein Aufhängedraht der Kugeln, der oben und unten zu einem Oehr zusammengedreht war, sich etwas aufgedreht, und an das Gehäuse angestossen hat.

Ein, wenn auch geringer, Theil der Differenz der Hauptmittel ergiebt sich aus der Art der Ableitung des Resultates aus den gemachten Beobachtungen. Es ist in dieser Hinsicht von Baily ein anderes Verfahren als von mir in Anwendung gebracht. Wenn nemlich in einer Reihe von unmittelbar aufeinander folgenden Beobachtungen die Ruhelage des Armes bei abwechselnd verschiedenen Lagen der Massen bestimmt worden war, so zog ich das Resultat aus dem Mittel der beobachteten Armstellungen bei der einen und dem Mittel der gefundenen Stellungen bei der andern Lage der Masse. Baily dagegen, der S. 97 auf diese Verschiedenheit der Berechnungsart aufmerksam macht, zog jedes Mal ein Resultat aus der Vergleichung der 1sten und 3ten Ruhelage mit der 2ten, der 2ten und 4ten mit der 3ten u. s. f. Es ergiebt sich aber aus der Natur der Sache, dass das letztere Verfahren das richtigere ist. Es sollten eigentlich die Ruhelagen des Armes bei der 1sten,

3ten, 5ten u. s. w., und ebenso bei der 2ten, 4ten, 6ten u. s. w. Beobachtung dieselben sein; sie werden aber nicht gleich gefunden, weil die Lage des Armes durch geringe Störungen verändert wird, und hierin liegt überhaupt die Hauptursache, weshalb nicht alle Resultate gleich sind. Diese Aenderungen erfolgen aber in der Regel während der Dauer einer Beobachtungsreihe stetig nach ein und derselben Seite hin, und sind annähernd der Zeit proportional. Wären sie es genau, so entspräche das Mittel aus der 1sten und 3ten Beobachtung auch genau der Zeit, in welcher die 2te Beobachtung angestellt wurde, und man muss die Beobachtungen also auch so combiniren. Diese verschiedene Berechnungsart ist besonders von Einfluss, wenn eine gerade Anzahl von Beobachtungen angestellt wurde, denn hat man davon z. B. 4 gemacht, so ist es fehlerhaft, wie ich gethan habe, das Mittel aus der 1sten und 3ten mit dem Mittel aus der 2ten und 4ten zu vergleichen; richtiger dagegen nach Baily ein Resultat aus der Vergleichung der 1sten und 3ten Beobachtung mit der 2ten, und ein anderes aus der Vergleichung der 2ten und 4ten Beobachtung mit der 3ten abzuleiten. Deshalb habe ich meine Beobachtungen demgemäss umgerechnet, wodurch folgende Werthe erhalten werden.

Es bezeichnet dabei

N die Schwingungszeit des Armes,

corrigirt wegen der Einwirkung der Masse und wegen des Uhrfehlers;

B die Ablenkung des Armes durch die Anziehung der Masse nach beobachteten Skalentheilen;

E die Entfernung des Mittelpunktes der Masse von dem Mittelpunkte der Kugel.

Wegen der Berechnung verweise ich auf meine Abhandlung.

Tag 1837.	No.	Lage der Masse.	*N.*		Ruhe-lage.	*E.*	Mittel.			*D.*		Bemerkungen.
			beob.	corrig.			*N.*	*B.*	*E.*	einzeln.	Mittel.	
Juni 10	1	O —	406,319	404,775	46,8750	170,182						
	2	0	404,194	404,396	54,0625	—	404,761	7,01875	170,1505	5,7086		
	3	O —	406,659	405,112	47,2125	170,169	404,688	7,03125	170,1690	5,6951	5,6489	
	4	0	404,355	404,557	54,4250	—	404,884	7,28125	170,1670	5,5431		
	5	O —	406,530	404,984	47,1750	170,165						
Juni 12	6	O —	405,000	403,461	74,1750	173,152						
	7	0	401,356	401,557	81,4125	—	403,913	6,93750	173,1850	5,5545	5,5545	
	8	O —	408,275	406,722	74,7750	173,218						
Juni 22	9	O +	404,040	402,504	47,7000	180,136						
	10	0	403,440	403,642	41,7000	—	402,634	6,07500	180,1280	5,8233	5,7270	
	11	O +	403,290	401,757	47,8500	180,120	403,467	6,30000	180,1200	5,6807		
	12	0	403,900	404,102	41,4000	—						

Tag 1837.	No.	Lage der Masse.	*N.*		Ruhelage.	*E.*	Mittel.			*D.*		Bemerkungen.
			beob.	corrig.			*N.*	*B.*	*E.*	einzeln.	Mittel.	
Juli 3	13	0	409,337	409,542	51,1625	—						
	14	O +	410,775	409,214	58,2750	178,966	409,387	6,94375	178,966	5,3357	5,3479	
	15	0	409,200	409,405	51,5000	—	409,299	6,98750	178,965	5,3000		
	16	O +	410,840	409,278	58,3000	178,964						
Juli 5	17	O +	412,567	410,998	71,6625	177,485						
	18	0	408,140	408,344	64,5500	—	409,668	6,94375	177,5035	5,4314		
	19	O +	411,225	409,662	71,3250	177,522	409,020	6,82500	177,5220	5,5073	5,5065	
	20	0	408,850	409,054	64,4500	—	409,314	6,74875	177,5365	5,5808		
	21	O +	410,787	409,226	71,0625	177,551						
Juli 15	22	0	409,293	409,498	39,5700	—						
	23	W —	410,620	409,058	31,6500	168,585	408,862	7,74125	168,5850	5,3797	5,3797	
	24	0	407,827	408,031	39,2125	—						
Juli 15	25	0	409,477	409,682	70,2688	—						
	26	W —	411,272	409,709	62,8083	172,033	409,517	7,60735	172,0330	5,2740	5,2642	
	27	0	408,956	409,160	70,5625	—	409,155	7,62085	172,0475	5,2545		
	28	W —	410,155	408,595	63,0750	172,062						
Juli 18	29	W —	411,797	410,231	24,7938	167,827	409,596	7,73750	167,8270	5,4512	5,4512	Unvollständige Beobachtung.
	30	0	408,756	408,960	32,5313	—						
Juli 18	31	W —	—	—	26,8500	168,054						
	32	0	409,040	409,245	34,8500	—	407,623	7,96875	168,0575	5,2272		
	33	W —	407,540	406,001	26,9125	168,061	407,416	7,76250	168,0610	5,3602	5,4840	
	34	0	406,800	407,003	34,5000	—	407,079	7,40000	168,0820	5,6123		
	35	W —	409,791	408,233	27,2875	168,103	407,942	7,26875	168,1030	5,7865		
	36	0	408,386	408,590	34,6125	—						
Juli 24	37	W +	410,657	409,095	40,0687	190,104						
	38	0	405,092	405,295	34,0500	—	407,195	5,87840	190,1195	5,5255	5,5032	Mangelhafte Zeitbestimmung.
	39	W +	—	—	39,7875	190,135	407,195	5,92500	190,1350	5,4809		
	40	0	—	—	33,6750	—						
Juli 26	41	0	409,703	409,908	57,8125	—						
	42	W +	409,280	407,724	64,1000	187,445	408,632	6,09375	187,4450	5,5219	5,6226	
	43	0	408,060	408,264	58,2000	—	408,270	5,86875	187,4485	5,7233		
	44	W +	410,384	408,823	64,0375	187,452						
Juli 26	45	W +	410,200	408,640	46,5875	189,383						
	46	0	407,930	408,134	40,0875	—	408,429	6,27500	189,4075	5,2466		
	47	W +	410,073	408,514	46,1375	189,432	408,422	6,10000	189,4320	5,3956	5,3304	
	48	0	408,415	408,619	39,9875	—	408,429	6,08750	189,4405	5,4064		
	49	W +	409,712	408,154	46,0125	189,449	408,315	6,23750	189,4490	5,2729		
	50	0	407.979	408,183	39,5625	—						
Juli 27	51	0	409,790	409,995	47,9583	—						
	52	W +	410,012	408,453	53,9125	188,572	408,739	6,15835	188,5720	5,4017	5,4017	
	53	0	407,565	407,769	47,5500							
Juli 30	54	W +	410,854	409,292	74,9583	186,244						
	55	0	407,388	407,592	68,7125	—	408,472	6,10445	186,2595	5,5785	5,5753	
	56	W +	410,092	408,533	74,6750	186,275	408,126	6,10000	186,2750	5,5722		
	57	0	408,050	408,254	68,4875	—						

Mittel 5,4843

Wahrscheinlicher Fehler 0,020

Mit Berücksichtigung der Centrifugalkraft erhält man daher als mittleres Resultat für die mittlere Dichtigkeit der Erde

5,49.

Der Unterschied von der früheren Berechnung zeigt sich besonders bei den letzten Beobachtungsreihen mit westlich-positivem Stand der Masse,



und dem aufmerksamen Leser wird aus den Zahlen selbst einleuchten, dass die jetzige Berechnungsart die richtigere ist.

Sollte Jemandem auffallen, dass auch in den Fällen, in welchen nur 3 Beobachtungen angestellt wurden, das hier gezogene Resultat von dem früheren etwas abweicht, so will ich nur darauf hindeuten, dass das seinen Grund in einer etwas abgeänderten Herleitung der mittleren Schwingungszeit (N) aus den einzelnen Bestimmungen hat, übrigens seiner Geringfügigkeit wegen unerheblich ist.

Eine Weglassung der beiden wegen Unvollständigkeit und wegen mangelhafter Zeitbestimmung unbefriedigenden Beobachtungsreihen ändert das abzuleitende Mittel so gut wie gar nicht.

Andere Ursachen, die auf die Verschiedenheit des Resultates von Einfluss gewesen wären, habe ich nicht aufzufinden vermogt. Baily hat die grösste Sorgfalt angewendet, jede schnelle Temperaturänderung zu verhindern, und hat zugleich die Temperatur beobachtet. Die Grösse derselben hat einen Einfluss nicht gezeigt, und die mehrfachen Umhüllungen des Apparates haben nicht zu verhindern vermogt, dass einige Male Anomalien vorgekommen sind, und so abweichende Resultate erhalten wurden, wie sie bei mir nicht vorkommen. Es ist zwar wahrscheinlich, dass der abgeschlossene feuchte Kellerraum, in welchem ich beobachtete, günstig gewesen sei, und die Entstehung schädlicher Luftströmungen verhindert habe; indessen ist doch auch nicht zu bezweifeln, dass wenn ich so viele Beobachtungen gemacht, und dabei auch so leichte Kugeln angewendet hätte, wie Baily, gewiss auch einzelne mehr von dem Mittel abweichende Resultate vorgekommen sein würden.

Die Messung der Entfernung der Massen geschah von Baily weit vollkommner als bei mir; indessen bürgen doch auch bei mir die Uebereinstimmungen in wiederholten Messungen dafür, dass keine Unsicherheit von Belang in dieser Hinsicht zurückblieb.

Das Trägheitsmoment der Kugeln wurde von Baily (S. 108) genauer berechnet, während ich ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt angenommen habe; indessen würde diese Verbesserung mein eben gefundenes Mittel nur um 0,002 vermindern.

Der Halbmesser der Erde wird nach den Airy'schen Formeln (S. 110) mit Berücksichtigung der Centrifugalkraft anders berechnet, es folgt daraus für meinen Fall, dass das Resultat um das 0,00031 fache zu vermehren ist, anstatt dass ich nach S. 66 das 0,00137fache berechnet habe.

Die von Baily (S. 113) angewendete Reduction der Gewichte auf den luftleeren Raum dürfte unrichtig sein, da nicht bloss das Gewicht der von dem Körper verdrängten Luftmasse seinem Gewichte zuzurechnen, sondern auch das Gewicht der von den Gewichtseinheiten, mit denen gewogen wurde, verdrängten Luftmasse abzuziehen ist; doch auch diese Correction ist ohne wesentlichen Einfluss.

Dagegen ist auf einen Umstand aufmerksam zu machen, der allerdings dafür zu sprechen scheint, dass das von Baily gefundene Mittel etwas zu gross sei. Nimmt man nemlich aus Tab. V (pag. CCXLV) das arithmetische Mittel aus den Resultaten für jede Art von Kugeln in der dort angenommenen Ordnung von den schwersten anfangend, so erhält man für die

2½zölligen		Bleikugeln	5,595
2	-	-	5,634
2½	-	(hohlen) Kupferkugeln	5,658
1½	-	Platinkugeln	5,627
2	-	Zinkkugeln	5,666
2	-	Glaskugeln	5,768
2	-	Elfenbeinkugeln....	5,775
den kupfernen Arm allein			6,024

Eine genauere Berechnung der Mittelzahlen mit Berücksichtigung des Werthes der einzelnen Reihen würde keine wesentliche Aenderung bewirken.

Man erhält also ein um so grösseres Resultat, je leichter die angewendeten Kugeln waren. Hinsichtlich des kupfernen Armes hat Baily (S. 81) selbst hervorgehoben, dass er ein zu grosses Resultat giebt, und man die Versuche damit mit den Uebrigen in guten Einklang setzen würde, wenn man die Anziehung der Masse auf den kupfernen Arm um $^1/_{20}$ vermindern wollte.

Ist es nun nicht vielleicht anzunehmen erlaubt, dass überhaupt die Anziehung der Masse auf den Arm, oder auch wohl das Trägheitsmoment des letztern, etwas unrichtig geschätzt wurde, was um so weniger von schädlichem Einflusse wird, je schwerer die Kugeln sind, so dass die Resultate mit den schwersten Kugeln sich der Wahrheit am meisten nähern, jedoch immer noch zu gross sein würden?

2. Neue Aufstellung der Drehwaage.

Meine Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde waren in einem wohlverschlossenen Kellerraume angestellt; die Holztheile des Apparates fingen nach Beendigung der beschriebenen Versuche an, in Fäulniss überzugehen; ich stellte daher, um ihn aufzubewahren, den zum Theil neu hergestellten Apparat im zweiten Stockwerke auf, ohne zu hoffen, dort weitere Versuche anstellen zu können, indem ähnliche Vorsichtsmaassregeln, wie sie Baily gegen Temperaturveränderungen und Luftströmungen getroffen hatte, anzubringen, mir nicht gestattet war. Der Erfolg hat jedoch gezeigt, dass der Apparat auch ohne diese ängstliche Vorsorge zu Vermeidung des Einflusses äusserer Temperaturveränderungen recht gute Resultate zu geben im Stande ist.

Die Drehwaage wurde an einem sehr starken, nahe an der Decke des Zimmers mittelst zweier durchgehenden dicken eisernen Bolzen und einer eisernen Stossplatte an einer massiven Mauer befestigten eisernen Arm durch ihren Draht aufgehängt. Der Draht war ein versilberter Kupferdraht von 0,5^{mm} Durchmesser, und 2270^{mm} Länge. Mit ihr ausser aller Verbindung stand das sie umgebende Gehäuse aus Fichtenholz; nur oben am Aufhängepunkte ist der Zwischenraum zwischen der durch eine unendliche Schraube drehbaren Axe und dem Gehäuse zu Abwendung des Luftzuges mit einem mit Baumwolle gefütterten Beutel ausgefüllt. Die Isolirung der so leicht beweglichen Drehwaage von dem sie umschliessenden Gehäuse ist vollkommen genug, um absichtlich auf letzteres ausgeübte Erschütterungen durchaus ohne Einfluss auf den Arm zu lassen. Nur bei heftigem Winde wird die den eisernen Arm tragende Mauer so erschüttert, dass man eine geringe Erzitterung des Apparates bemerken kann.

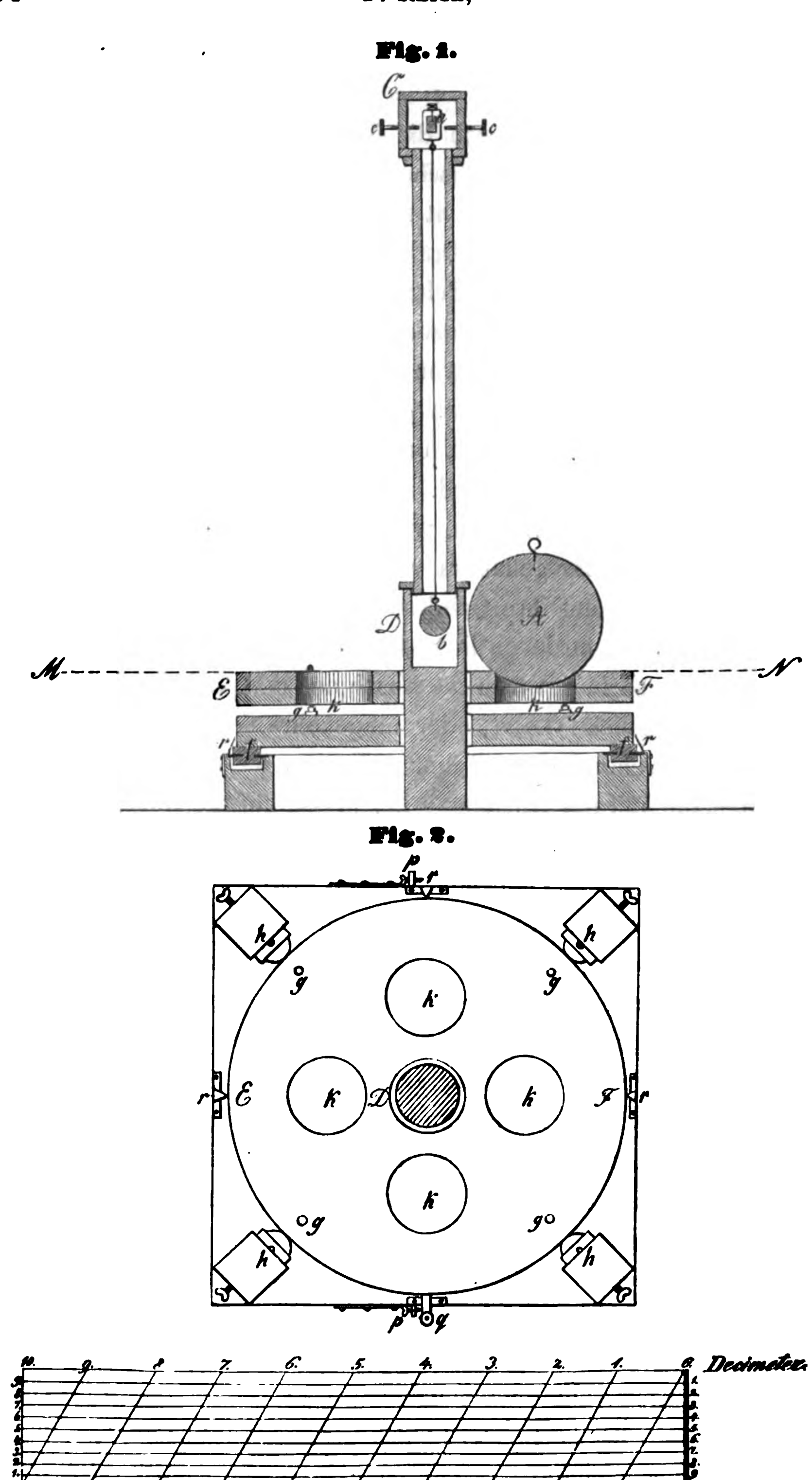
Bei meiner ganzen Aufstellung war ich schon früher bemüht gewesen, dem Apparate eine solche Einrichtung zu geben, dass vorzugsweise nur die Anziehung der Masse auf eine Kugel einwirkte, alle übrigen Theile aber möglichst wenigen Einfluss ausübten, um die immer mehr oder weniger unsicheren Correctionen thunlichst klein, und daher die dadurch etwa entstehenden Fehler unschädlich zu machen. Eine solche Correction liess sich noch beseitigen, nemlich die Anziehung des die Masse tragenden Drahtes auf die Kugel, so dass zugleich der Apparat dadurch compendieuser und leichter zu handhaben wurde.

Diese jetzt von mir gewählte Einrichtung ist in den Fig. 1 und 2 (s. umstehend) dargestellt. Fig. 1 ist ein Vertikaldurchschnitt normal auf die Länge des Armes durch die Mittelpunkte der Kugel und der Masse, Fig. 2 ein Horizontaldurchschnitt nach der Linie *MN* in Fig. 1. — Man hat in *a* Fig. 1 die Stirnansicht des Armes, auf dessen Stift der Bügel ruht, der durch einen feinen Draht die Kugel, *b*, trägt. In dem umgebenden Gehäuse *CD* sind die Schrauben, *cc*, angebracht, welche die Schwingungen des Armes begrenzen. Der untere Theil, *D*, dieses Gehäuses ist cylindrisch, und wird von einer Drehscheibe umgeben, deren oberer Theil durch die Schrauben *gggg* horizontal eingestellt werden kann, die auf den Walzen *ff* läuft, und durch die verstellbaren Walzen *hhhh* in ihrer Lage gehalten wird. Durch den Griff *q* kann die Drehscheibe um 180° gedreht werden, was durch die Anschlagschrauben *pp* mit Hülfe der Marken *rrr* genau zu reguliren ist. Der obere Theil der Drehscheibe hat vier auf ihre Quadranten vertheilte, kreisförmige Ausschnitte, *kkkk*, in einem davon liegt die Masse *A*. Dreht man die Drehscheibe um 180°, so bringt man die Masse aus der positiven (westlichen) in die negative (östliche) Lage, oder umgekehrt, ohne dadurch irgend einen andern anziehenden Theil hinzuzufügen oder wegzunehmen; man hat es daher nur mit der Anziehung der Masse auf die Kugel, und, was sehr wenig beträgt, auf die zweite Kugel, den dünnen die Kugel tragenden Draht, und den sehr entfernten Arm zu thun.

Immer habe ich nur Eine Masse einwirken lassen, weil ich es für hinreichend erachtete; obwohl, wenn neben der zweiten Kugel eine ähnliche Vorrichtung mit einer zweiten Masse angebracht worden wäre, man eine doppelt grössere Wirkung erhalten haben würde.

Eine wichtige Verbesserung scheint mir der von Baily auf den Rath von Forbes (Baily S. 41) angewendete metallische Ueberzug des Gehäuses, weshalb ich das letztere inwendig und auswendig mit Zinnfolie belegte. Baily sagt, dass er dadurch vorzüglich die grössten, vorher beobachteten Anomalien beseitigt habe, und ich bin überzeugt, obwohl ich directe Versuche darüber nicht anstellte, dass ich ohne diese Einrichtung keine befriedigenden Resultate erlangt haben würde. Dass das früher der Fall war, liegt in dem damals angewendeten abgeschlossenen feuchten Kellerraume von sehr constanter Temperatur. Auf welche Weise dieser metallische Ueberzug des Gehäuses die anomalen Bewegungen des Armes bald nach der einen, bald nach der andern Seite,

Fig. 1.


C
c
c
D
b
A
M
N
E
F
g
h
h
g
r
r
Fig. 2.
p
r
h
h
g
g
k
k
k
k
D
E
F
r
r
g
g
h
h
p
q
10.
9.
8.
7.
6.
5.
4.
3.
2.
1.
0.
Decimeter.

welche die Hauptursache der Differenzen der einzelnen Resultate sind, und mit denen Cavendish sich schon vielfach beschäftigt hat, aufhebt oder doch wenigstens sehr verringert, bleibt wohl noch zweifelhaft. Man hat diese anomalen Bewegungen eines leicht beweglichen, von einem Gehäuse umschlossenen Körpers, wie einer Drehwaage oder auch einer gewöhnlichen empfindlichen Waage, mehrfach beobachtet, und ich erinnere deshalb nur an die Beobachtungen von Munke und die zwischen ihm und Lenz gewechselten Streitschriften. (Pogg. Ann. Bd. 17. S. 162. Bd. 18. S. 240. Bd. 20. S. 417. Bd. 22. S. 210. Bd. 25. S. 241. Bd. 29. S. 381. Bd. 35. S. 72.), sowie an die ganz kürzlich in der Pariser Akademie von Despretz und Pouillet, der die früheren französischen Untersuchungen des Gegenstandes historisch zusammenstellt, gemachten Mittheilungen. (*Comptes rendus T. XXIX.* pag. 225. 245.) Nach Lesung derselben kann man nicht zweifelhaft bleiben, dass die an einer empfindlichen Drehwaage beobachteten Bewegungen bei Annäherung eines erwärmten oder erkälteten Körpers ausserhalb des Gehäuses ihren Grund in verursachten Luftströmungen haben, wie ich mich denn selbst überzeugte, dass eine solche Drehwaage von einem warmen Körper angezogen oder abgestossen wird, je nachdem sich ihr Arm nahe am Boden oder nahe an der Decke des Gehäuses befindet; — indessen ist es nicht allein eben so wahr als begreiflich, dass die leisesten Spuren von Elektricität, die man auf dem Gehäuse erregt, sogleich eine sehr merkliche Anziehung des Armes zur Folge haben, — sondern es ist auch nicht wahrscheinlich, dass die Annäherung einer nur sehr wenig wärmeren Masse an das ziemlich dicke hölzerne Gehäuse so schnell Temperaturveränderungen durch das Holz hindurch bewirken könne, um Luftströmungen hervorzurufen; — es ist ferner nicht wahrscheinlich, dass der metallische Ueberzug durch Verminderung der Wärmeabsorbtion so günstig wirke; — wogegen sich die Erscheinungen genügend erklären, wenn man annimmt, dass auf dem nackten hölzernen Gehäuse durch übrigens unbekannte Ursachen an einzelnen Stellen Spuren von Elektricität erregt werden, was an dem mit Metallüberzuge versehenen nicht geschehen kann. Auch Baily (S. 19) hat dergleichen Elektricitätsentwickelungen angedeutet. Auch hat mir der hiesige Hr. Bergmechanikus Lingke versichert, dass die schon mehrfach beobachteten Anomalien an feinen, leicht beweglichen Waagen beseitigt werden könnten, wenn man ein Gefäss mit Wasser in das Gehäuse stelle, was auch für

elektrische Wirkungen spricht. Sei dem übrigens, wie ihm wolle, so scheint es immer vortheilhaft, sehr bewegliche Apparate in metallische Gehäuse einzuschliessen, wie auch Hr. Kohlrausch mit dem von ihm verbesserten Dellmannschen Elektrometer gethan hat (Pogg. 72. S. 353), allerdings, wie er sagt, um Luftströmungen zu verhindern.

Die übrigen Veränderungen, die der Apparat gegen früher erhielt, welche die Aufstellung der Skala und des Fernrohrs, und die Beleuchtung der ersteren theils durch Tages- theils durch Lampenlicht betreffen, beziehen sich ganz auf das Lokal und haben kein allgemeines Interesse. Die Oeffnung im Gehäuse, durch welche der Spiegel gesehen wird, ist mit einer Spiegelscheibe verschlossen. Als Mire musste aus Mangel an Raum ein neben dem Gehäuse befestigter Spiegel benutzt werden; ist auch die Unveränderlichkeit seiner Stellung nicht vollkommen sicher, so hat das doch auf die Beobachtungen keinen Einfluss.

Die oben angegebene Art der Aufstellung der Masse bedingte nothwendig eine andere Beobachtungsart, als ich früher befolgt hatte. Damals wurde eine der Massen abwechselnd ganz ausser Wirksamkeit gesetzt und einer der Kugeln auf der positiven oder negativen Seite genähert. Man erhielt dadurch immer die Ablenkung des Armes durch die einseitige Anziehung Einer Masse auf Eine Kugel. Bei der jetzigen Einrichtung kann man die Masse von der Kugel nicht entfernen, sondern nur in verschiedene Lagen gegen dieselbe bringen, und es musste daher immer wie bei Cavendish und Baily die doppelte Ablenkung beobachtet werden, indem die Masse aus der positiven Lage in die negative oder umgekehrt gebracht wurde. — Dabei braucht man, da die Kugel sich immer sehr angenähert in der Mitte zwischen beiden Lagen der Masse befindet, auf die durch eine veränderte Ruhelage des Armes veränderte Entfernung zwischen Masse und Kugel nicht Rücksicht zu nehmen, und man kann, wie Baily gethan hat, die unmittelbar beobachteten Schwingungszeiten in Rechnung bringen, ohne die S. 37 von mir angegebene Correction anzuwenden. Wirklich wird zwar die Schwingungszeit durch die Nähe der Masse vergrössert, allein dafür setzt man auch in die Formel für die Entfernung der Masse von der Kugel die halbe Entfernung des Mittelpunktes der Masse in beiden Lagen, anstatt davon die Grösse abzuziehen, um wieviel die Kugel durch die Anziehung der Masse genähert wird; beides aber hebt sich genau auf. In der Formel haben wir nemlich die Grösse $\frac{N^2}{E^2}$; bedeutet hier N die Schwingungszeit des Armes

bei genäherter Masse, E die halbe Entfernung des Mittelpunktes der Masse in der positiven von demselben in der negativen Lage, und ist A die Grösse der Ablenkung der Kugel durch die Masse, so sollte für N, $N\left(1-\frac{A}{E}\right)$, dagegen für E, $E-A$ gesetzt werden, welche Correctionen sich gegenseitig aufheben; denn $\frac{N^2\left(1-\frac{A}{E}\right)^2}{(E-A)^2}=\frac{N^2}{E^2}$. Ich verdanke der Güte des Herrn Prof. Weisbach, mich hierauf aufmerksam gemacht zu haben.

3. Bestimmung der Constanten.

Zu Herleitung der mittleren Dichtigkeit der Erde aus den Beobachtungen mit der Drehwaage haben wir die Formel:

$$D=\frac{3\,.\,M\,.\,l\,.\,\mu}{4\,.\,\pi\,.\,R\,.\,r\,.\,w}\cdot\frac{m}{m+m'+m''}\cdot\frac{1}{E^2}\cdot\frac{N^2}{B}$$

Es ist hier

M das Gewicht einer Masse $=$ 45031$^{gr.}$ nach einer Wägung vom 1sten September 1846 mit Hilfe des Herrn Bergmechanikus Lingke mit von Herrn Mechanikus Hoffmann in Leipzig angefertigten Messinggewichten, auf den luftleeren Raum reducirt. Die kleine Differenz gegen die frühere Angabe dürfte den angewendeten Gewichten beizumessen sein.

l die Länge des einfachen Sekundenpendels zu Freiberg $=$ 993,95$^{mm.}$

μ die Entfernung der Skale von dem Spiegel $+\,^2/_3$ der Spiegeldicke nach wiederholter Messung vom 21. November 1846 $=$ 4282,7$^{mm.}$

R der Halbmesser der Erde nach der Airy'schen Formel (Baily S. 110) und mit Berücksichtigung der Meereshöhe für Freiberg berechnet, wobei der Einfluss der Centrifugalkraft berücksichtigt ist $=$ 6363052000$^{mm.}$

r die Entfernung des Aufhängepunktes der Kugel von der Umdrehungsaxe der Drehwaage nach einer Messung vom 26sten October 1846, wobei der hölzerne Arm ebenso, wie bei den Versuchen belastet war, $=$ 1000,5$^{mm.}$

w das Gewicht eines Cubikmillimeters Wasser $=$ 0,001$^{gr.}$

m das Gewicht einer Kugel aus Zinn mit 10 Procent Wismuth und wenig Blei nach einer Wägung vom 17. October 1846 $=$ 484,19$^{gr.}$

m' das Gewicht eines Bügels und des die Kugel tragenden Drahtes $=$ 2,27$^{gr.}$

m'' die auf den Aufhängepunkt der Kugeln reducirte halbe Masse des Armes nebst Aufhängevorrichtung und Spiegel ist durch neue Ver-

suche, ähnlich wie S. 25 angegeben, am 2ten September und 3ten October 1846 bestimmt worden. Das Gewicht der dazu gebrauchten Hilfsgewichte wurde zu 486,39^gr. bestimmt. — An den äussern Stiften hängend war die Schwingungszeit des Armes 340,7495 Sekunden

und 339,1065 -

im Mittel 339,93 Sekunden

an den innern Stiften hängend 184,5120 Sekunden

182,6980 -

184,3020 -

im Mittel 183,84 Sekunden.

Die Entfernung der äussern Stifte ist $= 2001,0^{mm}$, und die der innern $= 1000,1^{mm}$ bei entsprechender Belastung des Armes; daraus ergiebt sich

$$m'' = \frac{[183{,}84^2 - 339{,}93^2\,(\frac{10001}{20010})^2]\,.\,486{,}39}{339{,}93^2 - 183{,}84^2} = 29{,}34^{gr.}$$

Die hier gefundene Grösse ist etwas geringer, als die für denselben Arm früher (S. 29 meiner Abhandlung) angegebene; theils ist jedoch ein leichterer Spiegel als früher angewendet worden, theils ist der jetzige Beobachtungsraum trockner, und daher der Arm aus Fichtenholz leichter. — Es wird also $m + m' + m'' = 515{,}80^{gr.}$

Die Grösse E, oder die Entfernung des Mittelpunktes der Masse von dem Mittelpunkte der Kugel wurde früher für jede Beobachtungsreihe besonders gemessen; jetzt wird sie als constant, und zwar als die Hälfte der Entfernung des Mittelpunktes der Masse in der positiven von demselben in der negativen Lage angenommen. Diese Entfernungen sind theils mit Hilfe eines eigens vorgerichteten doppelten Tasterzirkels, theils mit einem zu einem Cathetometer eingerichteten eisernen, mit einem Diopter versehenen Lineale gemessen worden, und zwar fand sich E

1847 Oktober	22	mit dem Taster	152,4750^mm.
-	23	desgl.	152,0250 -
November	1	mit dem Cathetometer	152,7875 -
-	2	desgl.	152,7125 -
-	3	mit dem Taster	152,4375 -
		im Mittel	152,4875^mm.

Diese Bestimmung lässt allerdings zu wünschen übrig, doch hat die Unsicherheit von 0,2 oder höchstens 0,3^mm. keinen wesentlichen Einfluss auf das Resultat.

Man erhält nach diesen Bestimmungen

$$D = 7{,}18824 \,.\, 0{,}938717 \,.\, 0{,}0000430062 \,.\, \frac{N^2}{B} = 0{,}000290194 \frac{N^2}{B} = a \,.\, \frac{N^2}{B}$$

$$\log.\ a = 0{,}8566227 + 0{,}9725345 - 1 + 0{,}6235314 - 5$$
$$= 0{,}4626886 - 4.$$

Ein Theil der Versuche wurde angestellt, während die nördliche, nur zum Gegengewicht dienende Zinnkugel durch eine Kugel aus reinem Wismuth ersetzt wurde, deren Gewicht nur 484,15gr. war. Dieses hat nur Einfluss auf die Grösse $m + m' + m''$, welche dadurch $= 515{,}78$ wird, und man erhält $a = 0{,}000290233$ ($\log.\ a = 0{,}4627475 - 4$). Die mit diesem Coefficienten berechneten Versuche sind in der zweiten Columne der ersten der beiden folgenden Tabellen mit x bezeichnet.

4. Neue Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde.

In Folgendem theile ich die neuen Resultate mit, welche ich mit der beschriebenen Drehwaage erhielt. Es sind drei Beobachtungsreihen mit drei verschiedenen Aufhängedrähten angestellt.

Die 1ste, 3te und 5te dieser Tabellen enthalten die Originalbeobachtungen, die 2te, 4te und 6te die daraus abgeleiteten Werthe von 2 *B* und 2 *N*; letzteres ist auf dieselbe Weise berechnet, wie in meiner früheren Abhandlung auseinandergesetzt wurde; es war ausserdem noch wegen des Fehlers der Uhr zu corrigiren.

Tabelle 1.

Originalbeobachtungen mit der Zinnkugel und dem längern, dickern Kupferdrahte.

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
1	1847 Oktbr. 12	O	27,4 50,6 29,8 48,3 31,5	39,00 40,20 39,05 39,90	39,600 39,625 39,475	38,5 VIII 30 2,8 36 13,6 41 31,6 47 43,2	39,5 VIII 30 12,4 36 2,4 41 43,6 47 29,6	———	Die anfängliche Schwingung des Armes wird durch wiederholtes Nähern und Entfernen eines Magneten, der die Zinnkugel diamagnetisch abstösst, bewirkt.
2		W	31,5 70,2 35,2 65,8 38,0 62,4	50,85 52,70 50,50 51,90 50,20	51,775 51,600 51,200 51,050	51,5 VIII 53 24,8 59 14,8 IX 5 0,0 10 40,4 16 35,2	52,5 VIII 53 30,8 59 8,8 IX 5 8,0 verfehlt 16 44,4	———	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes	Zweites	Zeit bei			Bemerkungen.
				Mittel.					
3		O	62,4	39,45	38,275	38,6	39,5	—	
			16,5	37,10	38,300	IX 22 17,2	IX 22 12,0		
			57,7	39,50	38,550	28 4,8	28 10,0		
			21,3	37,60	38,500	33 50,0	33 43,6		
			53,9	39,40		39 34,0	39 40,8		
			24,9			45 22,4	45 14,0		
4		W	24,9	49,85	51,100	50,5	51,5	—	
			74,8	52,35	51,075	IX 51 6,8	IX 51 11,2		
			29,9	49,80	50,825	56 59,6	56 54,8		
			69,7	51,85		X 2 39,6	X 2 44,8		
			34,0			8 28,8	8 23,2		
5	1847 Oktbr. 19	O	9,6	47,55	49,550	48,5	49,5	—	Die anfängliche Bewegung durch Drehen des Aufhängepunktes hervorgebracht. Das Zimmer war geheizt worden und noch ziemlich warm.
			85,5	51,55	49,575	VIII 15 23,6	VIII 15 20,4		
			17,6	47,60	49,250	20 57,6	21 1,2		
			77,6	50,90	49,400	26 46,0	26 41,6		
			24,2	47,90	49,200	32 21,6	32 26,4		
			71,6	50,50		38 11,2	38 5,6		
			29,4						
6		W	29,4	59,70	61,125	60,5	61,5	—	
			90,0	62,55	60,850	verfehlt.			
			35,1	59,15	60,400	VIII 49 38,0	VIII 49 34,0		
			83,2	61,65	60,400	55 22,0	55 26,4		
			40,1	59,15		IX 1 4,4	IX 0 59,6		
			78,2			6 54,0	6 59,6		
7		O	78,2	49,30	47,725	48,5	49,5	—	
			20,4	46,15	47,750	IX 12 40,0	IX 12 36,0		
			71,9	49,35	48,225	18 33,2	18 37,6		
			26,8	47,10		24 14,0	24 8,8		
			67,4			30 4,8	30 10,0		
8		W	67,4	61,35	60,875	59,5	60,5	—	Die Zeitbestimmung ist wegen der kleinen Schwingungsbögen etwas unsicher.
			55,3	60,40	60,525	IX 36 7,2	IX 35 48,0		
			65,5	60,65	60,350	41 0,0	41 22,0		
			55,8	60,05		47 32,4	47 9,2		
			64,3			52 38,0	53 4,0		
9	1847 Oktbr. 21	W	26,3	48,70	49,925	49,5	50,5	—	Die Bewegung des Arms durch zweimalige Veränderung der Lage der Masse hervorgebracht.
			71,1	51,25	50,225	VIII 16 22,0	VIII 16 16,4		
			31,4	49,20	50,175	22 0,0	22 6,0		
			67,0	51,15	50,300	27 55,6	27 48,4		
			35,3	49,45	50,225	33 30,0	33 38,4		
			63,6	51,00	50,300	39 28,8	39 19,6		
			38,4	49,60		44 59,2	45 11,2		
			60,8						
10		O	60,8	38,90	37,600	37,5	38,5	—	
			17,0	36,30	37,325	VIII 51 8,0	verfehlt		
			55,6	38,35	37,350	56 46,0	VIII 56 51,2		
			21,1	36,35	37,150	IX 2 32,4	IX 2 26,0		
			51,6	37,95		8 20,0	8 27,2		
			24,3			14 1,2	13 52,0		
11		W	24,3	48,30	49,600	49,5	50,5	—	
			72,3	50,90	49,725	IX 19 53,6	IX 19 58,8		
			29,5	48,55	49,575	25 40,0	25 35,2		
			67,6	50,60	49,675	31 24,0	31 30,0		
			33,6	48,75		37 12,0	37 5,6		
			63,9			42 56,0	43 3,6		

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
12		O	63,9 13,2 58,1 18,1 58,6	38,55 35,65 38,10 35,85	37,400 36,875 36,975	36,5 IX 48 48,8 54 29,2 X 0 19,6 5 59,6	37,5 IX 48 44,4 54 34,4 X 0 14,0 6 6,0	—	
13	1847 Oktbr. 27	O	64,4 20,4 59,7 24,6 56.2 27,9	42,40 40,05 42,15 40,40 42,05	41,225 41,100 41,275 41,225	40,5 VII 34 11,6 39 48,8 45 48,2 51 18,4 57 15,2	41,5 VII 34 6,4 39 54,4 45 37,2 51 25,2 57 7,6	—	Die ersten Schwingungen durch veränderte Lage der Masse.
14		W	27,9 77,4 33,5 73,1 38,2 69,5	52,65 55,45 53,30 55,65 53,85	54,050 54,375 54,475 54,750	53,5 VIII 2 54,0 8 46,0 14 23,6 20 22,0 25 54,4	54,5 VIII 2 58,8 8 40,8 14 29,6 20 15,6 26 2,0	—	
15		O	69,5 17,5 63,6 22,2 58,8 26,1	43,50 40,55 42,90 40,50 42,45	42,025 41,725 41,700 41,475	41,5 VIII 31 54,8 37 37,6 43 29,2 49 14,0 55 1,6	42,5 VIII 31 50,8 37 42,4 43 23,6 49 20,0 54 54,8	—	
16		W	26,1 78,7 31,9 74,5 36,9 70,6	52,40 55,30 53,20 55,70 53,75	53,850 54,250 54,450 54,725	53,5 IX 0 49,6 6 41,2 12 20,0 18 18,8 23 51,2	54,5 IX 0 54,0 6 36,0 12 25,6 18 12,4 23 58,0	—	
17	1847 Nov. 5	O	32,7 69,1 36,7 65,6 39,6	50,90 52,90 51,15 52,60	51,900 52,025 51,875	51,5 VII 52 3,2 57 59,2 VIII 3 42,0 9 40,4	52,5 VII 52 9,6 57 52,0 VIII 3 49,6 9 31,2	—	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
18		W	39,6 87,1 44,6 82,5 49,1 79,0	63,35 65,85 63,55 65,80 64,05	64,600 64,700 64,675 64,925	63,5 VIII 15 25,6 21 28,0 27 5,6 33 12,0 38 43,2	64,5 VIII 15 30,0 21 22,0 27 11,6 33 5,2 38 50,4	—	
19		O	79,0 27,9 73,6 32,8 68,6 36,6	53,45 50,75 53,20 50,70 52,60	52,100 51,975 51,950 51,650	51,5 verfehlt. VIII 50 35,2 56 27,2 IX 2 19,6 8 14,4	52,5 VIII 50 40,0 56 21,6 IX 2 26,0 8 7,2	—	
20		W	36,6 89,4 42,5 84,5 47,5	63,00 65,95 63,50 66,00	64,475 64,725 64,750	63,5 IX 14 0,0 20 0,0 25 40,0 31 46,4	64,5 IX 14 4,8 19 55,2 25 45,6 31 40,0	—	
21	1847 Dec. 3	O	56,6 34,5 54,4 36,8 52,5 38,8	45,55 44,45 45,60 44,65 45,65	45,000 45,025 45,125 45,150	43,5 VII 50 1,6 55 28,0 VIII 2 6,8 7 19,2 14 16,0	44,5 VII 49 50,8 55 39,2 VIII 1 53,6 7 34,0 13 59,2	—	Die anfänglichen Schwingungen durch Drehen des Aufhängepunktes.

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
22		W	38,8 76,6 43,0 72,6 46,5	57,70 59,80 57,80 59,55	58,750 58,800 58,675	57,5 VIII 49 38,4 25 55,2 31 38,4 37 59,2	58,5 VIII 19 44,4 25 48,4 31 46,0 37 50,3	—	
23		O	70,1 23,4 64,3 28,3 60,3 31,9	46,75 43,85 46,30 44,30 46,10	45,800 45,075 45,300 45,200	44,5 VIII 50 34,6 56 24,0 IX 2 34,6 8 21,6 14 33,2	45,5 VIII 50 26,8 56 30,0 IX 2 24,8 8 29,2 14 25,2	—	
24		W	31,9 82,7 37,7 78,1 42,5 74,2	57,30 60,20 57,90 60,30 58,35	58,750 59,050 59,400 59,325	58,5 verfehlt. IX 26 28,0 32 22,0 38 31,6 44 21,2	59,5 IX 26 22,4 32 28,0 38 24,8 44 28,8	—	
25	1847 Dec. 4	W	43,0 71,8 46,6 69,4 49,7 67,7	57,40 59,20 58,00 59,55 58,70	58,300 58,600 58,775 59,125	56,5 VII 26 26,8 32 57,6 38 46,0 44 53,2 50 18,2	57,5 VII 26 34,8 32 48,0 38 26,0 44 44,0 50 25,6	—	Die anfänglichen Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
26		O	67,7 26,5 62,6 30,2 58,4 32,9	47,40 44,55 46,40 44,30 45,65	45,825 45,475 45,350 44,975	45,5 VII 56 44,6 VIII 2 38,0 8 39,2 14 48,2 20 32,4	46,5 VII 56 36,0 VIII 2 44,8 8 31,6 14 51,2 20 23,2	—	
27		W	32,9 80,7 38,5 76,3 42,8 72,7	56,80 59,60 57,40 59,55 57,75	58,200 58,500 58,475 58,650	57,5 verfehlt. VIII 32 42,8 38 34,6 44 45,6 50 29,2	58,5 VIII 32 37,6 38 37,6 44 38,8 50 36,8	—	
28		O	72,7 20,5 66,2 25,4 61,3	46,60 43,35 45,80 43,35	44,975 44,575 44,575	45,5 VIII 56 37,2 IX 2 42,4 8 32,4 14 45,6	46,5 VIII 56 33,2 IX 2 47,6 8 27,2 14 51,6	—	
29	1849 Sept. 12 X	O	76,7 28,2 71,4 32,5	52,45 49,80 51,95	51,125 50,875	49,5 IX 4 40,4 9 40,8 15 42,4	50,5 IX 4 5,6 9 46,0 15 36,8	51,5 IX 4 1,2 9 51,6 15 31,2	Sowohl der Aufhängepunkt gedreht, als auch die Lage der Masse verändert.
30		W	32,5 91,0 38,5 85,2	61,75 64,75 61,85	63,250 63,300	62,5 IX 21 17,6 27 10,4 32 49,6	63,5 IX 21 21,6 27 6,0 32 54,4	64,5 IX 21 25,6 27 1,6 32 59,2	
31		O	85,2 19,8 78,6 26,0	52,50 49,20 52,30	50,850 50,750	49,5 IX 38 43,6 44 23,2 50 16,4	50,5 IX 38 40,0 44 26,8 50 12,0	51,5 IX 38 36,8 44 31,2 50 8,0	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
32	.	W	26,0 96,7 33,5 89,9	61,35 65,10 61,70	63,225 63,400	62,5 IX 55 55,6 X 1 47,2 7 26,8	63,5 IX 55 58,8 verfehlt. X 7 30,8	64,5 IX 56 2,0 X 7 34,4	
33	1849 Sept. 17 X	W	38,2 83,8 42,4 78,3	61,00 63,40 60,35	62,050 61,725	60,5 III 14 8,0 20 8,0 25 45,6	61,5 III 14 12,8 20 2,0 25 51,6	62,5 III 14 18,0 19 56,8 25 57,6	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
34		O	78,3 22,1 71,8 27,0	50,20 46,95 49,40	48,575 48,175	48,5 III 31 44,0 37 32,4 43 16,8	49,5 III 31 40,0 37 36,4 43 12,0	50,5 III 31 36,0 37 40,8 43 6,8	
35		W	27,0 90,7 33,6 84,6	58,85 62,15 59,10	60,500 60,625	60,5 III 49 5,2 54 53,6 IV 0 40,4	61,5 III 49 9,2 54 49,6 IV 0 44,8	62,5 III 49 12,4 54 45,6 IV 0 49,2	
36		O	84,6 15,1 72,0 21,3	49,85 43,55 46,65	46,700 45,100	47,5 IV 6 28,0 12 12,0 18 0,0	48,5 IV 6 24,8 12 15,6 17 56,0	49,5 IV 6 21,2 12 19,2 17 52,0	Es ist wahrscheinlich, dass das 3te beobachtete Extrem, welches eine ganz ungewöhnlich grosse Abnahme des Schwingungsbogens anzeigt, 77,0 heissen sollte.
37	1849 Sept. 19 X	O	74,4 28,6 68,5 32,2	51,50 48,55 50,35	50,025 49,450	49,5 II 51 7,2 56 52,0 III 2 40,4	50,5 II 51 1,6 56 57,2 III 2 34,4	51,5 II 50 57,6 57 3,2 III 2 28,0	Die anfänglichen Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
38		W	32,2 88,0 37,2 81,8	60,10 62,60 59,50	61,350 61,050	61,5 III 8 28,0 14 14,0 20 8,8	62,5 III 8 31,6 14 10,0 20 14,0	63,5 III 8 35,6 14 5,6 20 18,8	
39		O	81,8 18,4 74,8 24,3	50,10 46,60 49,55	48,350 48,075	49,5 III 25 51,2 31 47,2 37 23,6	50,5 III 25 47,6 31 51,6 37 19,2	51,5 III 25 44,0 31 55,2 37 14,4	
40		W	24,3 93,2 31,4 86,2	58,75 62,30 58,80	60,525 60,550	59,5 III 43 14,8 49 10,4 54 51,2	60,5 III 43 18,4 49 6,8 54 55,2	61,5 III 43 21,6 49 3,2 54 59,2	
41	1849 Sept. 30 X	O	72,0 26,6 66,9 30,3	49,30 46,75 48,60	48,025 47,675	46,5 VIII 9 18,4 14 52,0 20 53,6	47,5 VIII 9 13,2 14 57,6 20 47,6	48,5 VIII 9 8,8 15 3,2 20 41,6	Eben so.
42		W	30,3 86,8 36,1 81,2	58,55 61,45 58,65	60,000 60,050	58,5 VIII 26 32,0 32 34,0 38 9,6	59,5 VIII 26 36,0 32 29,6 38 14,4	60,5 VIII 26 40,0 32 25,2 38 19,6	
43		O	81,2 16,7 74,3 22,7	48,95 45,50 48,50	47,225 47,000	46,5 VIII 44 8,8 49 32,4 55 46,4	47,5 VIII 44 5,2 49 56,4 55 42,4	48,5 VIII 44 1,6 50 0,4 55 38,0	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
44		W	22,7 92,9 30,2 86,4	57,80 61,55 38,30	59,675 59,925	58,5 IX 1 30,4 7 28,8 13 8,0	59,5 IX 1 33,6 7 24,8 13 12,0	60,5 IX 1 36,8 7 21,2 13 16,0	
45	1849 Oktbr. 8 X	W	35,8 81,4 40,7 76,9	58,45 60,90 58,80	59,675 59,850		59,5 II 59 56,4 III 5 50,0 11 38,0	60,5 III 0 1,6 5 44,8 11 44,4	Anfängliche Bewegung durch Veränderung der Lage der Masse.
46		O	76,9 20,4 70,8 26,0	48,65 45,60 48,40	47,125 47,000	46,5 III 47 31,6 23 16,8 29 13,2	47,5 III 47 27,6 23 20,8 29 8,4	48,5 III 47 23,6 23 26,0 29 3,2	
47		W	26,0 90,2 32,7 83,5	58,10 61,45 58,10	59,775 59,775	58,5 III 34 57,6 40 59,2 46 40,8	59,5 III 35 1,2 40 55,2 46 45,6	60,5 III 35 4,4 40 51,2 46 50,0	
48		O	83,5 13,7 75,8 20,4 69,8	48,60 44,75 48,10 45,10	46,675 46,425 46,600	46,5 III 52 37,6 58 27,6 IV 10 8,0	47,5 III 52 34,4 58 31,2 verfehlt. IV 10 12,4	48,5 III 52 31,2 58 34,8 IV 10 16,8	

Tabelle 2.

Berechnete Resultate mit der Zinnkugel und dem längern, dickern Kupferdraht.

No.	Ruhelage.	$2B$	$2N$ einzeln.	$2N$ Mittel.	$2N$ corrig.	D einzeln.	D Mittel.	Bemerkungen.
1 2 3 4	39,56667 51,40625 38,40625 51,00000	12,41979 12,79688	689,275 695,462 691,495 691,055	691,977 692,574	692,023 692,617	5,5948 5,4390	5,5169	Grosse Veränderung der Ruhelage, grosse Differenzen der Schwingungszeiten.
5 6 7 8	49,39500 60,69375 47,90000 60,58333	12,04622 12,73854	683,512 689,090 693,057 691,075	688,553 691,074	688,599 691,120	5,7414 5,4406	5,5760	Eben so.
9 10 11 12	50,49167 37,35625 49,64375 36,98333	12,56146 12,47896	691,968 691,587 691,497 690,562	691,684 691,215	691,730 691,261	5,5270 5,5587	5,5428	Die Veränderung der Ruhelage zwar beträchtlich, aber ziemlich gleichförmig; die Zeitbestimmungen gut.
13 14 15 16	41,20625 54,41250 41,73125 54,31875	12,94375 12,63243	690,765 692,642 694,250 693,332	692,552 693,425	692,598 693,471	5,3773 5,5237	5,4505	Beträchtliche und unregelmässige Veränderung der Ruhelage, grosse Differenzen in der Zeitbestimmung.
17 18 18 20	51,93333 64,72500 54,91875 64,65000	12,79896 12,76875	699,828 701,350 705,930 702,650	702,369 703,310	702,415 703,356	5,5933 5,6216	5,6074	Die Ruhelage sehr constant, die Zeitbestimmungen beträchtlich variirend und gegen früher gross.

No.	Ruhelage.	2 *B*	2 *N*			*D*		Bemerkungen.
			einzeln.	Mittel.	corrig.	einzeln.	Mittel.	
21	45,07500		720,582					Auffallend grosse Schwingungszeiten.
22	58,74167	13,59480	722,030	720,875	720,921	5,5470	5,5324	
23	45,21875	13,68021	720,012	721,222	721,268	5,5177		
24	59,05625		721,625					
25	58,70000		716,760					Vorzüglich die einzelnen Zeitbestimmungen differiren sehr stark.
26	45,40625	13,17188	718,712	718,577	718,623	5,6880	5,6463	
27	58,45625	13,39896	720,260	719,412	719,458	5,6046		
28	44,70833		719,265					
29	51,00000		690,650					Diese Beobachtungen sind sowohl wegen der Constanz der Ruhelage, als auch wegen übereinstimmender Zeitbestimmungen zufriedenstellend.
30	63,27500	12,37500	692,620	691,677	691,969	5,6149	5,5915	
31	50,80000	12,49375	691,760	692,083	692,375	5,5681		
32	63,31250		691,869					
33	61,88750		699,149					Die Veränderlichkeit der Ruhelage ist so gross, dass die Beobachtungen wenig Werth haben.
34	48,37500	12,85000	692,913	695,766	696,058	5,4715	5,3391	
35	60,56250	13,42500	695,237	693,757	694,049	5,2067		
36	45,90000		693,120					
37	49,73750		692,986					Ebenfalls grosse Veränderlichkeit, doch die der Ruhelage ziemlich gleichmässig.
38	61,20000	12,22500	700,380	695,642	695,934	5,7452	5,6594	
39	48,21250	12,65625	693,559	696,922	697,214	5,5737		
40	60,53750		696,826					
41	47,85000		693,910					Ziemlich gut.
42	60,02500	12,54375	698,977	696,760	697,052	5,6211	5,5772	
43	47,11250	12,80000	697,394	698,327	698,619	5,5334		
44	59,80000		698,640					
45	59,76250		701,915					Ziemlich gut.
46	47,06250	12,70625	701,094	702,580	702,872	5,6423	5,5830	
47	59,77500	12,92084	704,730	702,078	702,370	5,5237		
48	46,56667		700,410					

Mittel 5,5519
Wahrscheinlicher Fehler 0,0152

Wennn man aber die beiden aus No. 33 bis 36 abgeleiteten Resultate weglässt, weil wahrscheinlich ein Fehler in die Beobachtungen gekommen ist, so erhält man

Mittel 5,5712
Wahrscheinlicher Fehler 0,0113

Obwohl diese Versuche in Bezug auf die Uebereinstimmung der Grösse der einzelnen Mittel und daher den wahrscheinlichen Fehler des Endresultates zufriedenstellend genannt werden können, so befriedigten sie mich doch nicht hinsichtlich der einzelnen Beobachtungen, indem die Ruhelage des Armes sowohl als seine Schwingungszeiten noch zu grosse Differenzen zeigten. In der Meinung, dass diese Veränderlichkeiten vielleicht davon herrühren mögten, dass der Aufhängedraht zu dick sei, um von dem Gewichte des Armes völlig grade gezogen zu werden, versuchte ich jetzt

einen dünneren, versilberten Kupferdraht Nr. 10 von 0,4mm Durchmesser. Derselbe musste aber beträchtlich verkürzt werden, um nicht eine zu grosse Schwingungszeit zu erhalten. Der Aufhängepunkt wurde daher mittelst eines eisernen, in der Mauer befestigten Armes tiefer angebracht, so dass der Draht nur 620 mm lang war.

Bisher gieng der Aufhängedraht oben nur über einen Einschnitt in einer kleinen, an der drehbaren Axe befestigten Messingplatte. Um ihn hier sicherer zu befestigen, wurde unter dieser Platte eine Klemme angebracht, in welcher er festgeschraubt werden konnte.

Merkliche Unterschiede in den Resultaten haben sich aus diesen Veränderungen nicht ergeben, wie die nachfolgenden Versuche zeigen werden.

Auch dieses Mal hatte man zu beobachten Gelegenheit, dass ein solcher Draht längere Zeit hindurch die Tendenz behält, nach einer Seite hin sich zu drehen; die Aufhängung geschah 1849 Oktober 13; der Arm drehte sich immer der positiven Lage zu, und die Axe musste wiederholt gedreht werden, um die Lage des Armes ohngefähr im Mittel zu erhalten; vom 25. bis 27. Oktober betrug die Drehung in 24 Stunden noch 18 und 20 Skalentheile. Dessenohngeachtet wurde zu den Beobachtungen geschritten, welche in Tab. 3 und 4 verzeichnet und berechnet sind.

An dem nördlichen Arme hing fortwährend die Wismuthkugel, weshalb
$$\log a = 0{,}4627475 - 4.$$

Tabelle 3.

Originalbeobachtungen mit der Zinnkugel und dem kürzern, dünnern Kupferdraht.

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
49	1849 Oktbr. 27	W	42,8 67,4 44,7 65,5	55,10 56,05 55,10	55,575 55,575	54,5 X 58 44,8 XI 3 12,0 7 40,0	55,5 X 58 51,2 XI 3 4,4 7 18,0	56,5 X 58 58,0 XI 2 57,6 7 25,6	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
50		O	65,5 33,4 62,7 35,3	49,45 48,05 49,00	48,750 48,525	46,5 XI 11 46,4 15 37,6 20 12,8	47,5 XI 11 41,2 15 42,4 20 6,4	48,5 XI 11 36,0 15 48,0 20 0,4	
51		W	35,3 73,2 38,2 70,4	54,25 55,70 54,30	54,975 55,000	54,5 XI 24 15,2 28 32,8 32 41,6	55,5 XI 24 20,0 28 28,0 32 46,4	56,5 XI 23 24,0 28 23,6 32 51,6	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
52		O	70,4 28,5 67,0 31,2	49,45 47,75 49,10	48,600 48,425	Zeitbestimmung nicht gemacht.			
53	1849 Oktbr. 29	O	15,5 72,3 20,0 68,3 23,7	43,90 46,15 44,15 46,00	45,025 45,150 45,075	44,5 X 36 44,0 41 0,0 45 9,6 49 27,2	45,5 X 36 46,8 40 56,8 45 13,2 49 23,2	46,5 X 36 49,6 40 53,6 45 16,4 49 19,6	Anfängliche Schwingungen durch Drehung des Aufhängepunktes.
54		W	23,7 79,1 28,3 75,5	51,40 53,70 51,90	52,550 52,800	50,5 X 53 33,2 57 58,4 XI 1 57,2	51,5 X 53 36,0 57 55,2 XI 2 0,0	52,5 X 53 38,8 57 52,0 XI 2 4,0	
55		O	75,5 19,3 71,1 23,4	47,40 45,20 47,25	46,300 46,225	44,5 XI 6 24,0 10 26,8 14 51,6	45,5 XI 6 21,2 10 30,0 14 47,6	46,5 XI 6 18,0 10 33,2 14 44,4	
56		W	23,4 80,4 28,1 76,6	51,90 54,25 52,35	53,075 53,300	51,5 XI 18 56,8 23 19,6 27 21,6	52,5 XI 18 59,6 23 16,4 27 25,2	53,5 XI 19 2,4 23 13,2 27 28,8	
57	1849 Nov. 4	W	88,6 11,7 82,8 17,2 77,8	50,15 47,25 50,00 47,50	48,700 48,625 48,750	48,5 V 28 38,4 32 50,0 37 2,0 41 13,2	49,5 V 28 36,4 32 52,4 36 59,6 41 16,0	50,5 V 28 34,0 32 54,8 36 56,8 41 18,8	Anfängliche Schwingungen durch Drehung des Aufhängepunktes.
58		O	77,8 9,1 72,5 14,1	43,45 40,80 43,30	42,125 42,050	41,5 V 45 27,6 49 36,4 53 52,4	42,5 V 45 25,2 49 39,2 53 49,6	43,5 V 45 22,8 49 41,6 53 46,8	
59		W	14,1 80,9 19,1 76,2	47,50 50,00 47,65	48,750 48,825	48,5 V 58 2,4 VI 2 15,6 6 26,4	49,5 V 58 4,8 VI 2 12,8 6 29,2	50,5 V 58 7,2 VI 2 10,0 6 32,0	
60		O	76,2 10,6 71,2 15,4	43,40 40,90 43,30	42,150 42,100	41,5 VI 10 42,0 14 50,8 19 6,0	42,5 VI 10 39,6 14 53,2 19 2,8	43,5 VI 10 37,2 14 56,0 19 0,4	
61	1849 Nov. 5	O	62,2 37,4 60,6 39,8	49,80 49,00 50,20	49,400 49,600	48,5 XI 21 10,8 25 14,0 29 44,8	49,5 XI 21 4,4 25 20,8 29 36,8	50,5 XI 20 57,6 25 28,0 29 29,2	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
62		W	39,8 72,0 42,6 69,9	55,90 57,30 56,25	56,600 56,775	55,5 XI 33 58,8 38 25,2 42 26,0	56,5 XI 34 4,0 38 19,6 42 32,4	57,5 XI 34 9,6 38 14,4 42 38,8	
63		O	69,9 32,1 67,1 34,9	51,00 49,60 51,00	50,300 50,300	48,5 XI 46 58,0 50 57,2 55 29,2	49,5 XI 46 53,6 51 2,0 55 24,0	50,5 XI 46 49,2 51 6,8 55 19,2	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei						Bemerkungen.
64		W	39,4 77,8 38,7 74,8	56,85 58,25 56,75	57,300 57,500	 XI XII	55,5 59 28,8 8 57,2 7 55,2	 XI XII	56,5 59 32,8 8 52,8 7 59,6	 XI XII	57,5 59 36,0 8 49,2 8 4,0	
65	1849 Nov. 5	W	36,5 75,1 39,4 72,4	55,80 57,25 55,90	56,525 56,575	 V	54,5 47 23,2 51 58,4 55 47,2	 V	55,5 47 28,0 41 53,6 55 52,4	 V	56,5 47 32,0 41 49,2 55 57,6	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
66		O	72,4 29,8 69,4 32,4	50,85 49,20 50,60	50,025 49,900	 VI	48,5 0 16,0 4 18,0 8 41,2	 VI	49,5 0 12,0 4 22,0 8 36,8	 VI	50,5 0 8,8 4 26,0 8 32,4	
67		W	32,4 78,6 35,5 75,5	55,85 57,05 55,50	56,200 56,275	Zeitbestimmung verfehlt.						
68		O	75,5 25,9 71,5 29,7	50,70 48,70 50,60	49,700 49,650	 VI	48,5 25 29,6 29 33,2 33 53,6	 VI	49,5 25 26,4 29 37,6 33 50,0	 VI	50,5 25 23,2 29 41,2 33 46,4	
69	1849 Nov. 10	W	31,0 73,2 34,7 70,4	52,40 53,95 52,55	53,025 53,250	 XI	51,5 2 46,4 7 18,2 11 12,4	 XI	52,5 2 50,0 7 8,8 11 16,8	 XI	53,5 2 54,0 7 4,8 11 21,6	Anfängliche Schwingungen durch Drehung des Aufhängepunktes und Veränderung der Lage der Masse.
70		O	70,4 25,4 67,6 28,9	47,75 46,35 48,25	47,050 47,300	 XI	45,5 15 39,6 19 42,8 24 12,0	 XI	46,5 15 36,4 19 46,4 24 8,0	 XI	47,5 15 32,8 19 50,4 24 4,0	
71		W	28,9 77,8 33,3 74,6	53,35 55,55 53,95	54,450 54,750	 XI	52,5 28 13,6 32 41,6 36 39,6	 XI	53,5 28 16,8 32 37,6 36 43,6	 XI	54,5 28 20,0 32 34,0 36 47,6	
72		O	74,6 23,9 70,7 27,7	49,25 47,30 49,20	48,275 48,250	 XI	46,5 41 8,0 45 11,2 49 38,8	 XI	47,5 41 4,8 45 14,4 49 35,2	 XI	48,5 41 1,6 45 18,0 49 31,2	
73	1849 Nov. 12	W	32,0 70,2 35,1 67,6	51,40 52,65 51,35	51,875 52,000	 V	51,5 28 47,6 33 2,8 37 9,6	 V	52,5 28 52,0 32 58,4 37 14,0	 V	53,5 28 56,0 32 54,0 37 18,4	Anfängliche Schwingungen durch Drehung des Aufhängepunktes und Veränderung der Lage der Masse.
74		O	67,6 24,8 64,6 27,8	46,20 44,70 46,20	45,450 45,450	 V	45,5 41 27,2 45 40,4 49 51,6	 V	46,5 41 23,6 45 44,4 49 47,6	 V	47,5 41 20,0 45 48,8 49 43,2	
75		W	27,8 74,7 31,3 71,4	51,25 53,00 51,35	52,125 52,175	 V VI	51,5 54 2,4 58 18,8 2 26,0	 V VI	52,5 54 5,6 58 15,2 2 30,0	 V VI	53,5 54 9,2 58 11,6 2 34,0	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
76		O	71,4 21,4 67,7 25,0	46,40 44,55 46,35	45,475 45,450	45,5 VI 6 42,0 10 54,4 15 6,0	46,5 VI 6 38,8 10 58,0 15 2,4	47,5 VI 6 35,6 11 1,6 14 58,4	
77	1849 Nov. 19	W	29,5 81,0 33,7 78,1	55,25 57,35 55,90	56,300 56,625	53,5 IX 52 34,0 57 5,2 X 0 56,0	54,5 IX 52 37,2 57 1,6 X 0 59,2	55,5 IX 52 40,4 56 58,1 X 1 3,6	Anfängliche Schwingungen durch Drehung des Aufhängepunktes und Veränderung der Lage der Masse.
78		O	78,1 24,9 74,7 29,0	51,50 49,80 51,85	50,650 50,825	48,5 X 5 27,6 9 27,6 13 56,8	49,5 X 5 24,4 9 30,8 13 53,2	50,5 X 5 21,6 9 34,4 13 49,6	
79		W	29,0 84,2 33,5 80,7	56,60 58,85 57,10	57,725 57,975	55,5 X 17 57,6 22 24,4 26 21,6	56,5 X 18 0,4 22 21,2 26 24,8	57,5 X 18 3,6 22 18,0 26 28,0	
80		O	80,7 24,7 76,6 28,7	52,70 50,65 52,65	51,675 51,650	50,5 X 30 48,4 34 54,8 39 16,0	51,5 X 30 45,6 34 57,6 39 12,8	52,5 X 30 42,8 35 0,8 39 9,2	
81	1849 Dec. 2	O	67,6 18,6 64,0 22,3	43,10 41,30 43,15	42,200 42,225	43,5 IV 18 17,6 22 39,2 26 43,2	44,5 IV 18 14,0 22 42,8 26 39,2	45,5 IV 18 10,4 22 46,8 26 35,2	Anfängliche Schwingungen durch Drehung des Aufhängepunktes und Veränderung der Lage der Masse.
82		W	22,3 73,6 26,3 69,7	47,95 49,95 48,00	48,950 48,975	49,5 IV 31 3,2 35 12,0 39 29,6	50,5 IV 31 6,4 35 8,8 39 33,2	51,5 IV 31 9,6 35 5,6 39 36,8	
83		O	69,7 16,9 65,8 21,1	43,30 41,35 43,45	42,325 42,400	43,5 IV 43 37,6 47 58,0 52 3,6	44,5 IV 43 34,4 48. 1,2 52 0,0	45,5 IV 43 31,2 48 4,4 51 56,4	
84		W	21,1 75,0 25,3 70,8	48,05 50,15 48,05	49,100 49,100	49,5 IV 56 21,6 V 0 32,0 4 47,6	50,5 IV 56 24,4 V 0 28,8 4 51,2	51,5 IV 56 27,6 V 0 25,6 4 54,8	
85	1849 Dec. 7	W	36,3 61,3 39,0 60,4	48,80 50,15 49,70	49,475 49,925	48,5 V 21 31,2 25 56,4 29 47,2	49,5 V 21 37,6 25 49,6 29 54,4	50,5 V 21 44,4 25 42,0 30 2,8	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
86		O	60,4 28,4 58,1 30,4	44,40 43,25 44,25	43,825 43,750	42,5 V 34 22,0 38 20,0 42 46,4	43,5 V 34 17,2 38 25,6 42 40,8	44,5 V 34 12,0 38 31,2 42 34,8	
87		W	30,4 68,3 33,2 65,6	49,35 50,75 49,40	50,050 50,075	48,5 V 46 45,6 51 11,2 55 8,8	49,5 V 46 49,6 51 6,8 55 14,0	50,5 V 46 54,4 51 2,0 55 18,8	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
88		O	65,6 22,7 62,3 25,5	44,15 42,50 43,90	43,325 43,200	42,5 V 59 34,0 VI 3 39,2 7 58,4	43,5 V 59 30,4 VI 3 43,2 7 54,0	44,5 V 59 26,8 VI 3 47,6 7 49,6	
89	1849 Dec. 15	W	47,3 83,2 49,6 79,9	65,25 66,40 64,75	65,825 65,575	65,5 IV 51 41,6 55 48,4 V 0 2,8	66,5 IV 51 47,6 55 43,6 V 0 8,4	67,5 IV 51 52,4 55 38,8 V 0 13,6	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
90		O	79,9 38,8 76,2 41,5	59,35 57,50 58,85	58,425 58,175	58,5 V 4 17,6 8 33,6 12 45,2	59,5 V 4 13,6 8 38,0 12 40,4	60,5 V 4 9,6 8 42,4 12 35,6	
91		W	41,5 86,3 44,5 82,5	63,90 65,40 63,50	64,650 64,450	65,5 V 17 6,8 21 14,8 25 38,0	66,5 V 17 10,0 21 11,2 25 42,0	67,5 V 17 14,0 21 7,2 25 47,2	
92		O	82,5 34,5 78,9 37,9	58,50 56,70 58,40	57,600 57,550	58,5 V 29 43,2 34 4,0 38 14,6	59,5 V 29 39,6 34 7,6 38 7,6	60,5 V 29 36,4 34 11,6 38 3,2	
93	1849 Dec. 16	W	48,1 83,9 50,5 81,1	66,00 67,20 65,80	66,600 66,500	65,5 V 41 46,0 46 11,2 50 16,0	66,5 V 41 50,4 46 6,0 50 21,2	67,5 V 41 55,2 46 1,2 50 26,4	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
94		O	81,1 39,7 77,5 42,5	60,40 58,60 60,00	59,500 59,300	59,5 V 54 38,0 58 54,0 VI 3 6,4	60,5 V 54 34,0 58 58,4 3 1,6	61,5 V 54 30,0 59 2,4 2 57,2	
95		W	42,5 87,5 45,5 83,9 48,3 80,9	65,00 66,50 64,70 66,10 64,60	65,750 65,600 65,400 65,350	65,5 VI 11 36,8 15 51,2 20 4,8 24 21,6	66,5 verfehlt. VI 11 33,2 15 55,6 20 0,4 24 26,0	67,5 VI 11 29,6 16 0,0 19 56,0 24 30,8	
96		O	80,9 37,6 77,3 40,7	59,25 57,45 59,00	58,350 58,225	59,5 VI 28 33,6 32 57,6 37 1,2	60,5 VI 28 29,6 33 2,0 36 57,2	61,5 VI 28 26,0 33 6,0 36 52,8	

Tabelle 4.

Berechnete Resultate mit der Zinnkugel und dem kürzeren, dünneren Drahte.

No.	Ruhelage.	2 *B*	2 *N* einzeln.	2 *N* Mittel.	2 *N* corrig.	*D* einzeln.	*D* Mittel.	Bemerkungen.
49	55,57500		506,890					Ziemlich gut.
50	48,63750	6,643750	504,276	505,904	506,438	5,5955	5,6907	
51	54,98750	6,412500	506,546	503,411	505,645	5,7860		
52	48,51250		fehlt.					

No.	Ruhelage.	2 B	2 N einzeln.	2 N Mittel.	2 N corrig.	D einzeln.	D Mittel.	Bemerkungen.
53	45,08333		506,391					Grosse Veränderlichkeit der Ruhelage.
54	52,67500	7,00209	505,357	506,078	506,307	5,3127	5,4446	
55	46,26250	6,66875	506,471	505,998	506,227	5,5767		
56	53,18750		506,150					
57	48,69167		503,405					Gut.
58	42,08750	6,65208	504,565	504,028	504,260	5,5471	5,5358	
59	48,78750	6,68125	504,415	504,102	504,334	5,5245		
60	42,12500		503,625					
61	49,50000		512,600					Grosse, aber gleichförmige Veränderlichkeit der Ruhelage, grosse Veränderlichkeit der Schwingungszeiten.
62	56,68750	6,78750	508,587	510,429	510,665	5,5754	5,5763	
63	50,30000	6,74375	510,100	508,862	509,097	5,5772		
64	57,40000		507,900					
65	56,55000		505,650					Ziemlich gut.
66	49,96250	5,43125	504,138	504,894	505,127	5,7574	5,7508	
67	56,28750	6,41875	verfehlt	503,834	504,057	5,7442		
68	49,67500		503,530					
69	58,13750		507,310					Grosse, aber ziemlich gleichförmige Veränderlichkeit der Ruhelage, grosse Veränderlichkeit der Schwingungszeiten.
70	47,17500	6,69375	511,862	508,784	509,019	5,6176	5,5494	
71	54,60000	6,88125	507,680	509,603	509,838	5,4817		
72	48,26250		509,766					
73	51,93750		502,044					Gut.
74	45,45000	6,59375	504,425	503,508	503,741	5,5847	5,5502	
75	52,15000	6,69375	504,055	504,166	504,399	5,5157		
76	45,46250		504,019					
77	56,46250		504,066					Sehr grosse Veränderlichkeit der Ruhelage.
78	50,73750	6,41875	507,834	505,445	505,679	5,7812	5,6914	
79	57,85000	6,65000	504,435	506,418	506,652	5,6016		
80	51,66250		506,986					
81	42,21250		506,115					Sehr gut.
82	48,96250	6,67500	506,185	506,252	506,486	5,5770	5,5782	
83	42,36250	6,66875	506,455	506,120	506,354	5,5793		
84	49,10000		505,720					
85	49,70000		497,040					Schlecht, wegen ziemlich grosser, vorzüglich aber unregelmässiger Veränderlichkeit der Ruhelage. Auch sehr ungleiche Schwingungszeiten.
86	43,78750	6,09375	503,370	504,678	501,910	5,9935	5,8152	
87	50,06250	6,53750	504,625	503,928	504,161	5,6369		
88	43,26250		503,790					
89	65,70000		504,160					Sehr grosse, aber ziemlich gleichförmige Veränderlichkeit der Ruhelage, grosse Ungleichheiten in den Schwingungszeiten.
90	58,30000	6,82500	507,760	506,422	506,656	5,4584	5,5740	
91	64,55000	6,61250	510,345	509,020	509,255	5,6910		
92	57,57500		508,955					
93	66,55000		510,830					Sehr grosse, indessen gleichförmige Veränderlichkeit der Ruhelage.
94	59,40000	6,63750	508,470	509,498	509,733	5,6806	5,6510	
95	65,52500	6,68125	509,194	508,502	508,737	5,6214		
96	58,28750		507,842					

Mittel 5,6473

Wahrscheinlicher Fehler 0,0181

Diese Versuche bestätigen die Erwartung, dass der dünnere, kürzere Draht regelmässiger sich verhalten würde, nicht, indem in der zweiten Versuchsreihe noch grössere Abweichungen vom Mittel vorkommen, als in der ersten.

Es wurde deshalb eine **bifilare** Aufhängung eingerichtet; unten in der Klemme, mit welcher bisher der Spiegel und Arm am Draht befestigt war, wurde ein Rädchen mit concaver Peripherie von $4{,}2^{mm}$ Durchmesser befestigt, um welches ein feiner Eisendraht gelegt war, dessen beiden Enden oben zwischen der Klemme fest- und durch ein zwischengelegtes Plättchen um 5^{mm} auseinandergehalten wurden. Dabei wählte ich wieder den ersten an der Mauer befestigten Arm zum Aufhängen, so dass der Draht wieder 2270^{mm} lang war. — 1849 December 23 wurde diese Einrichtung getroffen, und schon von December 24 bis 26 änderte sich die Ruhelage des Armes nur um 0,9 und 0,3 Skalentheile in 24 Stunden. Es ergiebt sich hieraus, wie weit schneller eine bifilar aufgehängte Drehwaage einen constanten Stand annimmt, was ein bedeutender Vorzug dieser Aufhängung ist. — Auch in der Folge hat sich bei den verschiedensten Temperaturen die Ruhelage des Armes nur wenig geändert.

Die Tabellen 5 und 6 enthalten die nun gemachten Beobachtungen und die daraus berechneten Resultate.

An dem nördlichen Ende des Armes hieng fortwährend die Wismuthkugel, und es ist

$$\log. a = 0{,}4627475 - 4.$$

Tabelle 5.

Originalbeobachtungen mit der Zinnkugel und dem bifilaren Eisendraht.

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
97	1849 Dec. 26	W	36,9 94,1 44,1 89,1	65,50 69,10 66,60	67,300 67,850	65,5 X 38 37,6 45 24,8 51 34,4	66,5 X 38 42,0 45 49,6 51 40,0	67,5 X 38 46,4 45 14,4 51 45,6	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
98		O	89,1 18,7 81,3 26,5	53,90 50,00 53,90	51,950 51,950	50,5 X 58 23,2 XI 4 48,4 11 38,4	51,5 X 58 19,6 XI 4 52,4 11 34,0	52,5 X 58 16,0 XI 4 56,8 11 29,6	



No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
99		W	26,5 105,7 37,3 99,5 45,5 93,7	66,40 71,50 68,40 72,50 69,60	68,800 69,950 70,450 71,050	65,5 XI 48 0,0 24 56,4 38 18,4 44 0,4	66,5 XI 18 3,2 24 52,4 verfehlt. 38 13,6 44 6,0	67,5 XI 18 6,4 24 49,2 38 8,8 44 11,2	
400		O	93,7 20,5 84,7 27,7	57,10 52,60 56,20	54,850 54,400	52,5 XI 51 43,6 57 36,0 XII 4 30,8	53,5 XI 51 40,0 57 39,6 XII 4 26,0	54,5 XI 51 6,4 57 44,0 XII 4 21,6	
401	1849 Dec. 26	O	77,5 21,9 70,9 26,0	49,70 46,40 48,45	48,050 47,425	46,5 V 49 34,4 55 47,6 VI 2 26,4	47,5 V 49 30,0 55 52,8 VI 2 20,4	48,5 V 49 25,6 55 57,6 VI 2 15,2	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
402		W	26,0 94,4 33,1 87,5 39,0 81,3	60,20 63,75 60,30 63,25 60,15	61,975 62,025 61,775 61,700	62,5 VI 8 54,0 15 17,6 21 51,6 28 13,6 34 53,2	63,5 VI 8 57,6 15 13,6 21 55,6 28 8,8 34 58,8	64,5 VI 9 1,6 15 9,2 22 0,0 28 3,6 35 4,8	
403		O	81,3 14,1 73,4 20,4	47,70 43,75 46,90	45,725 45,325	46,5 VI 41 14,8 47 51,2 54 10,0	47,5 VI 41 11,2 47 55,2 54 5,6	48,5 VI 41 7,6 47 59,6 54 1,2	
404		W	20,4 96,6 29,3 89,6	58,50 62,95 59,45	60,725 61,200	60,5 VII 0 46,4 7 16,4 13 40,8	61,5 VII 0 49,6 7 12,8 13 45,2	62,5 VII 0 52,8 7 9,2 13 49,6	
405	1849 Dec. 27	W	35,2 92,0 40,8 85,5	63,60 66,40 63,15	65,000 64,775	65,5 IV 43 52,0 50 20,4 57 4,4	66,5 IV 43 56,0 50 15,6 57 9,6	67,5 IV 44 0,4 50 10,8 57 15,6	Wie vorher.
406		O	85,5 14,9 76,7 21,1	50,20 45,80 48,90	48,000 47,350	47,5 V 3 35,6 10 7,6 16 42,0	48,5 V 3 32,0 10 11,6 16 37,6	49,5 V 3 28,4 10 15,6 16 33,2	
407		W	21,1 100,1 30,0 92,4	60,60 65,05 61,20	62,825 63,125	63,5 V 23 22,4 29 51,2 36 30,0	64,5 V 23 25,6 29 47,6 36 34,0	65,5 V 23 28,8 29 44,0 36 38,4	
408		O	92,4 7,3 81,6 15,5	49,85 44,45 48,55	47,150 46,500	47,5 V 43 2,8 49 40,4 56 9,2	48,5 V 43 0,0 49 43,6 56 5,6	49,5 V 42 57,2 49 47,2 56 1,6	
409	1849 Dec. 29	O	77,9 21,5 70,6 26,2	49,70 46,05 48,40	47,875 47,225	47,5 V 18 6,8 24 33,2 30 59,6	48,5 V 18 2,4 24 38,4 30 54,0	49,5 V 17 58,0 24 43,2 30,48,4	Wie vorher.
410		W	26,2 94,3 33,1 87,2	60,25 63,70 60,15	61,975 61,925	63,5 V 37 37,2 43 54,0 50 38,0	64,5 V 37 40,4 43 50,0 50 42,4	65,5 V 37 44,4 43 45,6 50 47,2	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei						Bemerkungen.
111		O	87,2 9,5 77,9 17,0	48,35 43,70 47,45	46,025 45,575	 V VI	45,5 57 3,6 3 29,6 9 59,2	 V VI	46,5 57 0,4 3 33,6 9 55,2	 V VI	47,5 56 57,2 3 47,2 9 51,2	
112		W	17,0 99,8 26,0 91,6	58,40 62,90 58,80	60,650 60,850	 VI	61,5 16 32,0 22 54,4 29 28,0	 VI	62,5 16 35,2 22 50,8 29 31,6	 VI	63,5 16 38,0 22 47,6 29 35,2	
113	1849 Dec. 31	W	33,6 88,0 38,8 81,6	60,80 63,40 60,20	62,400 61,800	 V	61,5 25 34,8 32 7,6 38 34,8	 V	62,5 25 39,6 32 2,8 38 40,4	 V	63,5 25 44,0 31 58,0 38 46,0	Wie vorher.
114		O	81,6 13,6 72,8 19,5	47,60 43,20 46,15	45,400 44,675	 V	44,5 45 12,0 51 33,6 58 4,0	 V	45,5 45 8,4 51 38,0 57 59,2	 V	46,5 45 4,8 51 42,0 57 54,4	
115		W	19,5 95,8 27,9 88,5	57,65 61,85 58,20	59,750 60,025	 VI	60,5 4 37,6 10 59,6 17 31,6	 VI	61,5 4 40,8 10 56,0 17 35,6	 VI	62,5 4 44,0 10 52,4 17 39,6	
116		O	88,5 5,7 78,5 13,6	47,10 42,10 46,05	44,600 44,075	 VI	42,5 24 5,2 30 19,2 36 59,6	 VI	43,5 24 2,4 30 22,4 36 56,0	 VI	44,5 23 59,6 30 26,0 36 52,0	
117	1850 Jan. 2	O	76,8 20,1 69,1 24,6	48,45 44,60 46,85	46,525 45,725	 IV	45,5 40 34,4 46 55,6 53 29,6	 IV	46,5 40 30,0 47 0,4 53 24,0	 IV	47,5 40 26,0 47 6,0 53 18,4	Wie vorher.
118		W	24,6 93,6 31,9 87,2	59,10 62,75 59,55	60,925 61,150	 IV V	60,5 59 59,2 4 34,0 13 3,2	 V	61,5 0 3,2 6 30,0 13 7,6	 V	62,5 0 6,8 6 26,0 13 12,4	
119		O	87,2 8,7 77,7 16,6	47,95 43,20 47,15	45,575 45,175	 V	45,5 19 44,4 26 17,6 32 48,0	 V	46,5 19 41,2 26 21,2 32 44,0	 V	47,5 19 38,0 26 24,8 32 40,0	
120		W	16,6 99,8 25,9 91,9	58,20 62,85 58,90	60,525 60,875	 V	60,5 39 20,0 45 49,2 52 17,6	 V	61,5 39 23,2 45 46,0 52 21,2	 V	62,5 39 26,0 45 42,4 52 24,8	
121	1850 Jan. 4	W	32,6 87,8 38,0 82,0	60,20 62,90 60,00	61,550 61,450	 V	60,5 31 2,4 37 42,8 44 8,0	 V	61,5 31 6,8 37 38,0 44 12,8	 V	62,5 31 11,6 37 33,2 44 18,0	Wie vorher.
122		O	82,0 12,8 73,2 19,3	47,40 43,00 46,25	45,200 44,625	 V VI	45,5 50 42,8 57 17,2 3 38,4	 V VI.	46,5 50 39,6 57 21,2 3 34,0	 V VI	47,5 50 36,0 57 25,6 3 29,6	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
123		W	19,3 96,8 27,8 89,3	57,80 62,05 58,55	59,925 60,300	60,5 VI 40 11,6 46 33,2 23 2,0	61,5 VI 40 14,8 46 29,6 23 6,0	62,5 VI 40 18,0 46 26,0 23 10,0	
124		O	89,3 6,1 79,5 14,5	47,70 42,80 47,00	45,250 44,900	43,5 VI 29 36,0 35 50,0 42 34,4	44,5 VI 29 33,2 35 53,2 42 30,8	45,5 VI 29 30,0 35 56,4 42 26,8	
125	1850 Febr. 9	O	72,4 11,5 64,9 18,4	41,95 38,20 41,65	40,075 39,925	39,5 IV 45 53,6 52 34,8 59 27,6	40,5 IV 45 49,2 52 39,6 59 21,6	41,5 IV 45 45,2 52 44,4 59 16,0	Wie vorher.
126		W	18,4 92,4 27,3 84,0	55,25 59,70 55,65	57,475 57,675	55,5 V 6 7,2 13 7,2 19 35,2	56,5 V 6 10,4 13 3,2 19 39,6	57,5 V 6 14,0 12 59,2 19 44,0	
127		O	84,0 2,5 73,2 11,3	43,25 37,85 42,25	40,550 40,050	39,5 V 26 31,2 33 8,8 40 0,0	40,5 V 26 28,0 33 12,8 39 55,6	41,5 V 26 25,2 33 16,4 39 51,6	
128		W	11,3 97,7 21,9 88,4	54,50 59,80 55,00	57,150 57,400	55,5 V 46 38,4 53 30,0 VI 0 4,6	56,5 V 46 41,6 53 26,8 VI 0 5,6	57,5 V 46 44,4 53 23,6 VI 0 9,6	
129	1850 Febr. 11	W	28,3 84,8 33,6 78,3	56,55 59,20 55,95	57,875 57,575	57,5 V 14 19,2 20 59,6 27 37,2	58,5 V 14 23,6 20 54,8 27 42,8	59,5 V 14 28,4 20 50,0 27 48,8	Wie vorher.
130		O	78,3 verfehlt. 62,6 20,8 57,5 24,6	44,70 39,15 41,05	40,425 40,400	43,5 VI 0 27,2 7 44,4 13 32,4	44,5 VI 0 20,8 7 51,2 13 24,4	46,5 VI 0 14,4 7 59,6 13 16,0	
131		W	24,6 84,3 31,2 78,0	54,45 57,75 54,60	56,400 56,175	53,5 VI 20 25,2 27 28,0 33 39,6	54,5 VI 20 30,0 27 23,2 33 45,2	55,5 VI 20 34,8 27 18,0 33 50,4	
132		O	78,0 5,7 verfehlt. 43,3 64,5	41,85 37,40	39,625	40,5 VI 40 27,6 47 12,4 53 38,0 VII 0 29,6	41,5 VI 40 23,6 47 16,4 53 33,6 VII 0 34,8	42,5 VI 40 20,0 47 20,4 53 29,2 VII 0 40,0	
133	1850 April 21	O	66,9 9,0 58,8 14,3	37,95 33,90 36,55	35,925 35,225	35,5 VII 51 51,6 58 23,2 VIII 4 55,6	36,5 VII 51 47,6 58 28,0 VIII 4 50,0	37,5 VII 51 43,2 58 32,8 VIII 4 44,8	Wie vorher.
134		W	14,3 83,5 22,4 75,9 28,5 70,3	48,90 52,80 49,00 52,20 49,40	50,850 50,900 50,600 50,800	51,5 VIII 11 34,4 18 7,6 24 47,6 31 13,6 37 56,0	52,5 VIII 11 38,0 18 3,6 24 52,8 31 8,0 38 2,0	53,5 VIII 11 41,6 17 59,6 24 57,2 31 2,8 38 8,0	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
135		O	70,3 3,1 61,0 10,5	36,70 32,05 35,75	34,375 33,900	34,5 VIII 44 19,6 50 54,8 57 23,6	35,5 VIII 44 16,0 50 59,2 57 18,8	36,5 VIII 44 12,0 51 3,6 57 14,0	
136		W	10,5 85,3 19,9 77,7	47,90 52,60 48,80	50,250 50,700	49,5 IX 3 56,4 10 34,8 17 0,0	50,5 IX 4 0,0 10 30,4 17 4,4	51,5 IX 4 3,2 10 27,2 17 8,8	
137	1850 April 22	W	50,3 107,0 56,0 100,6	78,65 81,50 78,30	80,075 79,900	79,5 VII 55 25,2 VIII 2 2,4 8 30,0	80,5 VII 55 29,6 VIII 1 57,2 8 36,0	81,5 VII 55 34,0 VIII 1 52,4 8 42,0	Wie vorher. Der Arm war Tags vorher etwas nach + gedreht worden.
138		O	100,6 30,2 92,0 36,6 85,2 41,6	65,40 61,10 64,30 60,90 63,40	63,250 62,700 62,600 62,150	62,5 VIII 15 7,6 21 35,2 28 8,4 34 40,0 41 8,8	63,5 VIII 15 4,0 21 38,8 28 4,0 34 45,2 41 3,6	64,5 VIII 15 0,8 21 42,8 27 59,6 34 50,4 40 58,0	
139		W	41,6 108,5 50,6 102,8 56,7 97,9	Anstossen. 76,70 79,75 77,30	 78,225 78,525	77,5 VIII 59 45,2 IX 6 24,8 12 44,4	78,5 VIII 59 49,6 IX 6 19,6 12 50,4	79,5 VIII 59 54,8 IX 6 14,0 12 56,4	
140		O	97,9 31,2 90,0 37,5	64,55 60,60 63,75	62,575 62,175	60,5 IX 19 32,8 25 48,4 32 35,2	61,5 IX 19 29,2 25 52,8 32 30,4	62,5 IX 19 25,6 25 56,8 32 25,6	
141	1850 Mai 8	O	92,5 33,7 84,7 39,1	63,10 59,20 61,90	61,150 60,550	59,5 VII 57 10,4 VIII 3 34,0 10 21,6	60,5 VII 57 6,0 VIII 3 38,8 10 16,0	61,5 VII 57 2,0 VIII 3 44,0 10 10,8	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
142		W	39,1 109,6 45,0 103,1 51,1 96,5	Anstossen. 74,05 77,10 73,80	 75,575 75,450	76,5 VIII 29 15,6 35 41,6 42 29,2	77,5 VIII 29 20,0 35 36,8 42 34,4	78,5 VIII 29 24,0 35 32,0 42 40,0	
143		O	96,5 25,7 88,0 32,8 81,3 38,5	61,10 56,85 60,40 57,05 59,90	58,975 58,625 58,725 58,475	59,5 VIII 48 54,0 55 34,4 IX 2 2,0 8 44,8 15 8,0	60,5 VIII 48 50,4 55 38,4 IX 1 57,6 8 50,0 15 1,6	61,5 VIII 48 47,2 55 42,4 IX 1 52,8 8 55,6 14 56,0	
144		W	38,5 106,8 46,2 99,4	72,65 76,50 72,80	74,575 74,650	74,5 IX 21 45,6 28 19,6 34 51,6	75,5 IX 21 49,6 28 15,2 34 56,4	76,5 IX 21 53,6 28 11,2 35 1,2	

Tabelle 6.

Berechnete Resultate mit der Zinnkugel und dem bifilaren Eisendrahte.

No.	Ruhelage.	2 *B*	2 *N*			*D*		Bemerkungen.
			einzeln.	Mittel.	corrig.	einzeln.	Mittel.	
97	67,57500		779,290					Grosse, wiewohl gleichförmige Veränderlichkeit der Ruhelage, grosse Veränderlichkeit der Schwingungszeiten.
98	54,95000	16,86875	794,040	787,929	788,367	5,3468	5,3978	
99	70,06250	16,77500	790,496	793,495	793,635	5,4487		
100	54,62500		795,088					
101	47,73750		770,815					Grosse Veränderlichkeit der Ruhelage und Schwingungszeit.
102	61,86875	15,23750	778,087	774,794	775,226	5,7235	5,6168	
103	45,52500	15,89062	775,980	776,341	776,774	5,5102		
104	60,96250		774,955					
105	64,88750		791,604					Die Ruhelage stark veränderlich, die Schwingungszeiten weniger.
106	47,67500	16,25625	786,260	788,331	788,770	5,5589	5,6366	
107	62,97500	15,72500	787,128	786,799	787,237	5,7192		
108	46,82500		787,008					
109	47,55000		772,740					Grosse Veränderlichkeit der Ruhelage.
110	61,95000	15,27500	779,095	775,732	776,164	5,7233	5,6796	
111	45,80000	15,55000	775,360	776,693	777,126	5,6360		
112	60,75000		775,625					
113	61,95000		780,405					Eben so.
114	45,03750	15,88125	771,355	775,090	775,522	5,4957	5,5995	
115	59,88750	15,20000	773,510	772,481	772,912	5,7034		
116	44,38750		772,579					
117	46,12500		774,388					Geringere Veränderlichkeit der Ruhelage, grosse der Schwingungszeit.
118	61,08750	15,28750	784,322	780,803	781,237	5,7936	5,7631	
119	45,37500	15,49375	783,700	781,907	782,342	5,7326		
120	60,70000		777,700					
121	61,50000		786,000					Unregelmässige Veränderlichkeit der Ruhelage, grosse Veränderlichkeit der Schwingungszeit.
122	44,91250	15,89375	776,246	777,445	777,878	5,5248	5,6444	
123	60,11250	15,11875	770,090	774,492	774,923	5,7639		
124	45,07500		777,140					
125	40,00000		813,200					Geringe, aber unregelmässige Veränderlichkeit der Ruhelage, grosse Veränderlichkeit der Schwingungszeit.
126	57,57500	17,42500	810,068	810,369	810,818	5,4751	5,5042	
127	40,30000	17,12500	807,840	807,620	808,068	5,5333		
128	57,27500		804,952					
129	57,72500		798,270					Grosse Veränderlichkeit der Ruhelage, ziemlich grosse der Schwingungszeit.
130	40,26250	16,66875	790,704	794,964	795,405	5,5080	5,5774	
131	56,13750	16,49375	795,919	793,372	793,813	5,6469		
132	39,62500		793,494					
133	35,57500		783,895					Die Ruhelage sehr veränderlich.
134	50,78750	15,93125	789,017	785,770	786,207	5,6304	5,5358	
135	34,13750	16,49375	784,499	785,964	786,401	5,4411		
136	50,47500		784,477					
137	79,98750		785,580					Grosse und wenig regelmässige Veränderlichkeit der Ruhelage.
138	62,67500	16,50625	781,970	782,658	783,093	5,3913	5,4900	
139	78,37500	15,85000	780,425	780,848	781,282	5,5886		
140	62,37500		780,150					

No.	Ruhelage.	2 *B*	2 *N*			*D*		Bemerkungen.
			einzeln.	Mittel.	corrig.	einzeln.	Mittel.	
141	60,85000		789,580					Die Ruhelage sehr, die Schwingungszeiten weniger veränderlich.
142	75,51250	15,73750	792,612	790,237	790,676	5,7647	5,6464	
143	58,70000	16,36250	788,519	789,074	789 513	5,5282		
144	74,61250		786,090					

Mittel 5,5910
Wahrscheinlicher Fehler 0,0169

Diese Beobachtungen entsprachen in sofern nicht den Erwartungen, als bei dem nahe constanten Stande, welchen der Arm im Allgemeinen beibehielt, gehofft wurde, auch während jeder Beobachtung nur geringe Aenderungen der Ruhelage zu erhalten. Diese Aenderungen sind aber mindestens eben so gross gewesen, als in den früheren Beobachtungsreihen.

Wir haben die mittlere Dichtigkeit der Erde gefunden durch die Beobachtungen mit dem

dickeren längeren Draht	5,5519	mit dem wahrscheinlichen Fehler 0,0152
dünneren kürzeren Draht	5,6173	„ „ „ „ 0,0181
Bifilar-Draht	5,5910	„ „ „ „ 0,0169

woraus das Mittel

5,5832

mit dem wahrscheinlichen Fehler 0,0149 folgt.

5. Ueber den Einfluss des Magnetismus und des Diamagnetismus der Kugeln.

In einer der Royal Society vorgelegten Abhandlung (Philosophical Transact. 1847. P. 2. pag. 212) hat Herr G. Whitehead Hearn die Ansicht zu begründen gesucht, dass die von Baily beobachteten Anomalien ihren Grund in geringen magnetischen oder diamagnetischen Einwirkungen hätten, die zwischen Masse und Kugel Statt fänden. Herr Hearn findet die von ihm vermuthete magnetische Wirkung sehr gross, zum Theil weit grösser als die zu messende Wirkung der Gravitation, indem er annimmt, der Arm müsste, wenn keine anziehende Masse ihn ablenkte, genau auf dem Nullpunkt gestanden haben, und er die Abweichung, die der Arm bei entfernten Massen von der mittleren oder normalen Lage zeigte, oder gezeigt haben würde, als eine Folge dieser

magnetischen Wirkung ansieht. Allein bei der Einstellung des Armes beabsichtigte Baily gar nicht, ihm genau diese mittlere Lage zu geben, was auch sehr schwierig zu erreichen gewesen sein würde, sondern er wurde nur so nahe wie möglich dieser Lage gebracht (Baily pag. 51).

Wenn ich daher auch den Folgerungen, die Herr Hearn aus seinen Betrachtungen zieht, nicht beistimmen kann, so versuchte ich doch, ob eine längere Einwirkung eines Magneten auf die Masse ihr einen Magnetismus mittheilen könne. Nachdem ein starker, aus mehreren Stäben gebildeter Nordpol Tage lang neben der Masse gelegen hatte, drehte ich dieselbe in ihrem Lager um 180°, aber es wurde dadurch nicht die geringste Einwirkung auf die Kugel wahrgenommen, mogte der Magnet vorher entfernt worden sein oder nicht. — Zu weiterer Prüfung, ob dergleichen magnetische Wirkungen anzunehmen und auf die Resultate störend gewesen seien, habe ich einige Versuche mit einer Wismuth-, und einige mit einer Eisenkugel angestellt in der Meinung, dass wenn schon zwischen der, allerdings etwas Wismuth enthaltenden Zinnkugel und der Bleimasse merkliche diamagnetische Wirkungen vorhanden sind, diese noch in weit stärkerem Maasse bei einer Kugel aus reinem Wismuth der Fall sein werde, und dass die Eisenkugel noch mehr die magnetischen Einflüsse zeigen müsse. — Bei beiden Kugeln geschah die Aufhängung des Armes an dem längern dickern einfachen Draht.

Die Wismuthkugel wiegt 484,15$^{gr.}$, es ist daher

$$D = a\,\frac{N^2}{B} = \frac{3\,.\,45031\,.\,993{,}95\,.\,4282{,}7\,.\,484{,}15}{4\,.\,\pi\,.\,6363052000\,.\,1000{,}5\,.\,0{,}001\,.\,515{,}78}\cdot\frac{1}{152{,}4875^2}\cdot\frac{N^2}{B}$$

$$\log.\,a = 0{,}8566227 + 0{,}9725154 - 1 + 0{,}6335314 - 5$$
$$= 0{,}4626695 - 4.$$

Die Eisenkugel wiegt 484,19$^{gr.}$, und am nördlichen Ende des Armes hieng die Wismuthkugel, es ist daher

$$D = \frac{3\,.\,45031\,.\,993{,}95\,.\,42827}{4\,.\,\pi\,.\,6363052\,.\,10005}\cdot\frac{484{,}19}{515{,}78}\cdot\frac{1}{152{,}4875^2}\cdot\frac{N^2}{B}$$

$$\log.\,a = 0{,}8566227 + 0{,}9725513 - 1 + 0{,}6335314 - 5$$
$$= 0{,}4627054 - 4.$$

Tabelle 7.

Originalbeobachtungen mit der Wismuthkugel und dem längern, dickern Kupferdrahte.

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei	Zeit bei		Bemerkungen.
145	1847 April 11	W	17,8 80,9 24,4 74,8 29,9 70,1	49,35 52,65 49,60 52,35 50,00	51,000 51,125 50,975 51,175	49,5 IX 20 30,8 26 33,6 32 12,8 38 20,0 43 51,6	50,5 IX 20 34,4 26 29,6 32 17,2 38 15,2 43 57,6	———	Anfängliche Schwingungen durch Drehung des Aufhängepunktes.
146		O	70,1 9,8 64,0 15,5 58,6 19,9	39,95 36,90 39,75 37,05 39,25	38,425 38,325 38,400 38,150	38,5 IX 49 51,2 verfehlt. X 1 29,6 7 19,6 13 8,8	39,5 IX 49 47,2 X 1 25,2 7 26,4 13 2,8	———	
147		W	19,9 79,2 26,4 73,6	49,55 51,80 50,00	50,675 50,900	50,5 X 19 1,6 25 0,0 30 44,8	51,5 X 19 5,2 24 55,6 30 49,6	———	
148		O	73,6 7,3 66,0 13,2 60,1 18,2 55,7	40,45 36,65 39,60 36,65 39,15 36,95	38,550 38,125 38,125 37,900 38,050	37,5 X 36 46,8 42 29,2 48 26,4 54 11,2 XI 0 8,0 5 52,8	38,5 X 36 43,6 42 32,8 48 22,0 54 15,6 0 2,4 5 58,8	———	
149	1847 April 12	O	96,8 46,4 92,7 51,8 88,6 55,8	71,60 69,55 72,25 70,20 72,20	70,575 70,900 71,225 71,200	68,5 IX 56 17,2 X 1 48,0 8 2,8 13 23,6 19 51,2	69,5 IX 56 12,8 X 1 52,8 7 57,6 13 29,6 19 48,6	———	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse und durch Näherung eines Magnetstabes.
150		W	58,8 108,2 61,6 106,4 67,2 102,7	Anstossen. 84,00 86,80 84,95	 85,400 85,875	82,5 IX 30 4,0 35 30,0 41 50,4 47 2,4	83,5 IX 29 59,6 35 35,6 41 44,8 47 8,8	———	
151		O	102,7 46,5 96,5 51,2 91,9 55,2 86,8 58,1	74,60 71,50 73,85 71,55 73,55 71,00 72,45	73,050 72,675 72,700 72,550 72,275 71,725	73,5 IX 53 16,0 59 12,4 X 4 57,6 11 2,8 16 39,6 22 58,6 28 21,6	74,5 IX 53 11,6 59 17,2 X 4 52,0 11 8,8 16 33,2 23 1,2 28 13,6	———	
152		W	58,1 108,2 64,0 104,1 68,6 100,4 72,4	Anstossen. 84,05 86,35 84,50 86,40	 85,200 85,425 85,450	84,5 X 45 42,4 51 43,6 57 22,8 XI 3 28,8	85,5 X 45 48,4 51 37,2 57 30,0 XI 3 20,0	———	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei			Bemerkungen.
153	1847 April 18	W	103,6 82,6 95,7 39,4 89,5	68,40 64,15 67,55 64,45	66,125 65,850 66,000	64,5 VIII 42 33,2 48 21,2 54 24,0 IX 0 5,6	65,5 VIII 42 34,6 48 25,2 54 19,6 IX 0 10,4	—	Anfängliche Schwingungen durch Näherung eines Magnetstabes.
154		O	89,5 19,4 80,8 25,1 74,3 29,7	54,30 49,95 52,95 49,70 52,00	52,125 51,450 51,325 50,850	52,5 IX 6 6,8 12 4,0 17 50,4 23 57,2 verfehlt.	53,5 IX 6 3,6 12 7,6 17 46,4 24 1,6	—	
155		W	29,7 93,6 37,0 87,8 42,6 83,4	61,65 65,30 62,40 65,20 63,00	63,475 63,850 63,800 64,100	64,5 IX 35 42,8 41 30,0 47 30,8 53 20,4 59 20,0	65,5 IX 35 46,4 41 25,6 47 35,6 53 15,2 59 26,0	—	
156		O	83,4 28,6 75,9 27,9 70,4	53,50 49,75 51,90 49,15	51,625 50,825 50,525	51,5 X 5 13,2 11 11,2 16 58,4 23 4,4	52,5 X 5 9,2 11 15,6 16 58,6 23 9,6	—	
157	1847 April 19	W	50,5 74,7 51,7 71,2 53,1 68,7	62,60 63,20 61,45 62,15 60,90	62,900 62,325 61,800 61,525	68,5 III 4 14,4 9 59,6 16 19,2 21 34,8 28 25,2	64,5 III 4 24,4 9 49,2 verfehlt 21 22,4 28 41,2	—	Der Arm schon selbst in Bewegung; die sehr kleinen Schwingungen werden durch einmalige Veränderung der Lage der Masse vermehrt.
158		O	68,7 29,5 64,8 33,9 62,4 37,4	49,10 47,15 49,35 48,15 49,90	48,125 48,250 48,750 49,025	49,5 III 33 40,0 39 53,2 45 32,8 51 39,6 57 28,4	50,5 III 33 34,0 40 0,0 45 26,0 51 48,4 57 18,8	—	
159		W	37,4 84,5 41,6 79,7 45,4 75,6	60,95 63,05 60,65 62,55 60,50	62,000 61,850 61,600 61,525	62,5 verfehlt. IV 9 19,6 15 23,6 21 10,0 27 20,0	63,5 IV 9 14,4 15 30,0 21 3,2 27 27,6	—	
160	1847 April 21	O	60,1 35,5 56,6 37,5 54,0 39,1	47,80 46,05 47,05 45,75 46,55	46,925 46,550 46,400 46,150	46,5 II 52 31,2 58 15,6 III 4 8,0 10 2,0 15 42,0	47,5 II 52 22,0 58 26,0 3 56,8 10 15,2 15 26,8	—	Anfängliche Schwingungen durch Veränderung der Lage der Masse.
161		W	39,1 76,3 42,6 72,8 46,5 70,0	57,70 59,45 57,70 59,65 58,25	58,575 58,575 58,675 58,950	58,5 III 21 32,4 27 23,2 33 12,0 39 8,0 44 50,0	59,5 III 21 38,0 27 16,4 33 20,0 38 59,6 44 59,6	—	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei					Bemerkungen.
162		O	70,0 24,8 65,1 29,0 61,0 32,5	47,40 47,95 47,05 45,00 46,75	46,175 46,000 46,025 45,875	 III IV	46,5 50 45,2 56 39,2 2 22,8 8 18,8 14 2,4	 III IV	47,5 50 40,0 56 44,4 2 16,4 8 26,0 13 54,0	——	
163		W	32,5 82,7 38,2 78,0 42,5 74,6	57,60 60,45 58,10 60,25 58,55	59,025 59,275 59,175 59,400	 IV	58,5 19 54,0 25 51,6 31 35,6 37 35,2 43 15,2	 IV	59,5 19 59,2 25 46,4 31 42,0 37 28,4 43 23,2	——	
164		O	74,6 20,9 68,2 25,4 63,0 29,5 59,6	47,75 44,55 46,80 44,20 46,25 44,55	46,150 45,675 45,500 45,225 45,400	 IV V	46,5 49 10,4 55 6,4 0 50,0 6 55,2 12 30,4 18 40,4	 IV V	47,5 49 6,4 55 11,6 0 44,8 7 1,2 12 24,0 18 48,4	——	

Tabelle 8.

Berechnete Resultate mit der Wismuthkugel und dem längern, dickern Kupferdraht.

No.	Ruhelage.	2 *B*	2 *N*			*D*		Bemerkungen.
			einzeln.	Mittel.	corrig.	einzeln.	Mittel.	
145 146 147 148	51,06875 38,32500 50,78750 38,15000	 12,60312 12,55000	703,243 699,005 703,545 704,110	 701,931 701,220	 701,972 701,261	 5,6728 5,6853	5,6791	Ziemlich constante Ruhelage und constante Schwingungszeiten.
149 150 151 152	70,97500 85,63750 72,49583 85,85833	 13,90208 13,00209	704,458 698,915 705,590 702,162	 701,988 702,222	 702,029 702,263	 5,1436 5,5033	5,3234	Grosse und unregelmässige Veränderlichkeit der Ruhelage.
153 154 155 156	65,99167 51,43750 63,80625 50,99167	 13,46146 12,59467	705,075 703,240 708,825 708,960	 707,380 708,675	 707,421 708,716	 5,3939 5,7876	5,5908	Eben so.
157 158 159	62,43750 48,53750 61,74375	 13,40312	713,567 711,855 713,458	 712,960	 713,001	 5,5032	 5,5032	Ziemlich gut.
160 161 162 163 164	46,50625 58,69875 46,01875 59,21875 45,59000	 12,43125 12,93750 13,41438	699,105 700,960 699,140 701,893 703,241	 699,735 700,664 701,425	 699,776 700,705 701,466	 5,7158 5,5063 5,3551	5,5146	Mässige, aber unregelmässige Veränderlichkeit der Ruhelage.

Mittel 5,5233

Wahrscheinlicher Fehler 0,0403

Tabelle 9.

Originalbeobachtungen mit der Eisenkugel und dem längern, dickern Kupferdraht.

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes	Zweites	Zeit bei			Bemerkungen.
				Mittel.					
165	1849	W	85,2			57,5	58,5	59,5	Anfängliche Schwingungen
	Juni		34,5	59,85	58,425	IX 17 38,0	IX 17 33,6	IX 17 29,6	durch Drehung des Auf-
	3		79,5	57,00	58,250	23 16,4	23 20,8	23 26,4	hängepunktes.
			39,5	59,50	58,375	29 10,8	29 5,2	28 59,6	
			75,0	57,25		34 47,6	34 53,6	34 59,6	
166		O	75,0			45,5	46,5	47,5	
			20,1	47,55	45,925	IX 40 44,4	XI 40 40,4	IX 40 36,4	
			68,5	44,30	45,650	46 27,2	46 31,6	46 36,4	
			25,5	47,00	45,750	52 14,8	52 10,0	52 4,8	
			63,5	44,50	45,525	57 59,2	58 5,2	58 11,2	
			29,6	46,55		X 3 46,0	X 3 39,6	X 3 32,8	
167		W	29,6			57,5	58,5	59,5	
			82,8	56,20	57,650	verfehlt.			
			35,4	59,10	57,800	X 15 20,8	X 15 16,4	X 15 11,2	
			77,6	56,50	57,725	21 3,6	21 9,6	21 14,4	
			40,3	58,95	57,925	26 53,2	26 47,2	26 41,2	
			73,5	56,90		32 35,6	32 42,4	32 49,2	
168		O	73,5			45,5	46,5	47,5	
			20,8	47,15	45,650	X 38 28,0	X 38 23,6	X 38 19,2	
			67,5	44,15	45,500	44 12,4	44 17,6	44 22,4	
			26,2	46,85	45,625	49 58,4	49 53,2	49 48,0	
			62,6	44,40		55 43,2	55 49,6	55 55,6	
169	1849	O	65,4			40,5	41,5	42,5	Anfängliche Schwingungen
	Juni		21,4	43,40	42,200	X 0 8,0	X 0 3,2	IX 59 58,4	durch Veränderung der
	4		60,6	41,00	42,150	5 36,0	5 41,2	X 5 46,8	Lage der Masse.
			26,0	43,30	42,300	11 42,8	11 36,8	11 30,4	
			56,6	41,30	42,175	17 4,0	17 11,2	17 18,0	
			29,5	43,05		23 17,2	23 8,8	23 0,8	
170		W	29,5			53,5	54,5	55,5	
			77,2	53,25	54,700	X 28 45,6	X 28 50,4	X 28 55,2	
			34,9	56,05	54,850	34 44,4	34 38,4	34 33,6	
			72,4	53,65	54,725	40 16,0	40 21,6	40 28,0	
			39,2	55,80	54,825	46 17,6	46 10,4	46 3,6	
			68,5	53,85		51 44,4	51 52,4	52 0,0	
171		O	68,5			40,5	41,5	42,5	
			19,5	44,00	42,575	X 57 54,4	X 57 50,0	X 57 44,8	
			62,8	41,15	42,325	XI 3 20,8	XI 3 26,0	XI 3 31,2	
			24,2	43,50	42,425	9 26,4	9 20,8	9 15,2	
			58,5	41,35	42,350		verfehlt.		
			28,2	43,35		20 59,6	20 52,4	20 45,6	
172		W	28,2			53,5	54,5	55,5	
			78,5	53,35	54,725	XI 26 25,2	XI 26 29,6	XI 26 34,0	
			33,7	56,10	54,850	32 23,2	32 18,4	32 13,2	
			73,5	53,60	54,750	37 55,2	38 0,8	38 6,0	
			38,3	55,90		43 55,2	43 49,2	43 42,8	
173	1849	W	45,6			68,5	69,5	70,5	Anfängliche Schwingung
	Aug.		90,2	67,90	69,150	IV 37 31,6	IV 37 36,4	IV 37 41,6	durch Veränderung der
	29		50,6	70,40	69,175	43 26,8	43 20,4	43 15,2	Lage der Masse.
			85,3	67,95	68,900	49 5,2	49 11,6	49 18,4	
			54,4	69,85	69,150	54 56,8	54 49,2	54 42,4	
			82,5	68,45		V 0 30,8	V 0 38,8	V 0 46,8	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei						Bemerkungen.
174		O	32,5				56,5		57,5		58,5	
			84,7	58,60		V	6 32,8	V	6 28,4	V	6 24,0	
			77,7	56,20	57,400		12 9,6		12 14,8		12 19,6	
			39,5	58,60	57,400		18 4,4		17 58,8		17 53,2	
			73,5	56,50	57,550		23 36,8		23 43,2		23 49,6	
			42,8	58,15	57,325		29 35,2		29 27,6		29 20,8	
175		W	42,8				68,5		69,5		70,5	
			93,2	68,00		V	35 12,4	V	35 16,4	V	35 20,8	
			48,0	70,60	69,300		41 4,8		41 0,0		40 54,8	
			88,4	68,20	69,400		46 41,6		46 46,8		46 52,4	
			52,4	70,40	69,300		52 34,8		52 28,8		52 22,4	
			84,6	68,50	69,450		58 9,2		58 16,0		58 22,8	
176		O	84,6				56,5		57,5		58,5	
			33,0	58,80		VI	4 5,2	VI	4 0,8	VI	3 56,4	
			79,3	56,15	57,475		9 41,6		9 46,4		9 51,2	
			38,2	58,75	57,450		15 35,2		15 30,0		15 24,8	
			75,6	56,90	57,825		21 5,6		21 11,6		21 18,0	
177	1849 Aug. 30	O	79,8				55,5		56,5		57,5	Eben so.
			35,3	57,55		X	58 36,8	X	58 31,6	X	58 26,8	
			74,5	54,90	56,225	XI	4 16,0	XI	4 21,6	XI	4 27,2	
			39,5	57,00	55,950		10 7,2		10 1,2		9 54,8	
178		W	39,5				67,5		68,5		69,5	
			94,5	67,00		XI	15 48,0	XI	15 52,0	XI	15 56,0	
			45,8	70,15	68,575		21 43,6		21 38,8		21 34,0	
			89,7	67,75	68,950		27 16,8		27 22,0		27 26,8	
179		O	89,7				55,5		56,5		57,5	
			27,5	58,60		XI	33 20,0	XI	33 16,4	XI	33 13,2	
			82,6	55,05	56,825				verfehlt.			
			34,6	58,60	56,825		44 56,4		44 52,0		44 47,6	
180		W	34,6				67,5		68,5		69,5	
			101,2	67,90		XI	50 34,0	XI	50 37,2	IX	50 40,4	
			40,9	71,05	69,475		56 33,6		56 30,0		56 26,4	
			94,4	67,65	69,350	XII	2 8,8	XII	2 12,8	XII	2 17,2	
181	1849 Sept. 1	W	48,4				66,5		67,5		68,5	Eben so.
			88,6	66,00		III	46 42,0	III	46 47,2	III	46 52,4	
			48,2	68,40	67,200		52 38,4		52 32,8		52 27,2	
			84,1	66,15	67,275		58 20,0		58 26,4		58 32,8	
			51,9	68,00	67,075	IV	4 18,4	IV	4 11,2	IV	4 4,0	
			80,5	66,20	67,100		10 1,2		10 8,8		10 17,6	
182		O	80,5				53,5		54,5		55,5	
			30,7	55,60		IV	16 1,2	IV	15 56,4	IV	15 52,0	
			75,1	52,90	54,250		21 46,8		21 51,6		21 57,2	
			35,7	55,40	54,150		27 47,2		27 41,2		27 35,6	
			70,9	53,30	54,350		33 29,6		33 36,4		33 43,2	
			39,7	55,30	54,300		39 36,0		39 28,0		30 20,8	
183		W	39,7				66,5		67,5		68,5	
			91,4	65,55		IV	45 21,2	IV	45 26,0	IV	45 30,0	
			44,6	68,00	66,775		51 17,6		51 12,4		51 7,6	
			84,3	64,45	66,225		57 14,4		57 20,0		57 26,0	
			47,4	65,85	65,150				verfehlt.			
			79,3	63,35	64,600	V	9 12,8	V	9 19,2	V	9 28,4	
184		O	79,5				51,5		52,5		53,5	
			23,1	51,30		V	26 19,6	V	26 14,8	V	26 10,0	
			69,2	48,65	49,975		32 37,6		32 43,2		32 48,8	
			33,3	51,25	49,950		37 59,6		37 53,2		37 46,8	
			64,5	48,90	50,075		44 13,2		44 20,0		44 27,6	
			38,0	51,25	50,075		49 42,8		49 34,8		49 26,8	

No.	Datum.	Lage der Masse.	Extreme.	Erstes Mittel.	Zweites Mittel.	Zeit bei						Bemerkungen.
485	1849 Sept. 10	W	29,4 74,2 34,2 69,6	51,80 54,20 51,90	58,000 58,050	III	51,5 20 2,4 26 6,8 31 40,0	III	52,5 20 7,2 26 1,2 31 46,8	III	53,5 20 12,0 25 55,6 31 53,2	Eben so.
486		O	69,6 15,0 63,8 20,2	42,30 39,40 42,00	40,850 40,700	III	39,5 37 42,0 43 19,6 49 23,2	III	40,5 37 37,6 43 24,0 49 17,6	III	41,5 37 33,6 43 28,8 49 12,4	
487		W	20,2 82,4 26,6 75,8	51,30 54,50 51,20	52,900 52,850	III IV	51,5 55 8,2 1 5,6 6 46,8	III IV	52,5 55 6,8 1 1,6 6 51,6	III IV	53,5 55 10,8 0 57,2 6 56,0	
488		O	75,8 7,6 67,8 13,8 60,0	41,70 37,45 40,55 36,90	39,575 39,000 38,725	IV	39,5 42 46,4 18 36,0 24 26,0 30 24,8	VI	40,5 42 42,8 18 40,0 24 21,2 30 29,2	IV	41,5 42 39,6 18 43,6 24 17,6 30 34,4	

Tabelle 10.

Berechnete Resultate mit der Eisenkugel und dem längern, dickern Kupferdraht.

No.	Ruhelage.	2 B	2 N			D		Bemerkungen.
			einzeln.	Mittel.	corrig.	einzeln.	Mittel.	
465	58,35000		692,220					Ziemlich gut.
466	45,74250	12,35000	691,257	691,742	692,036	5,6269	5,6751	
467	57,77500	12,12292	691,770	691,212	691,499	5,7234		
468	45,59467		690,608					
469	42,20625		691,446					Sehr constante Ruhelage, und constante Schwingungszeiten.
470	54,77500	12,46250	691,455	691,083	691,320	5,5645	5,5872	
471	42,41875	12,35625	690,199	690,873	691,160	5,6098		
472	54,77500		690,964					
473	69,09375		690,116					Ebenfalls gut.
474	57,41875	11,80937	689,367	689,618	689,904	5,8482	5,8276	
475	69,36250	11,86146	689,371	688,702	688,985	5,8071		
476	57,58358		687,368					
477	56,08750		689,812					Die Ruhelage ziemlich stark aber gleichförmig veränderlich, die Schwingungszeit sehr veränderlich.
478	68,76250	12,30625	690,136	691,674	691,951	5,6455	5,6740	
479	56,82500	12,26250	695,075	693,914	694,202	5,7025		
480	69,41250		696,512					
481	67,16250		699,962					Ausserordentlich grosse Veränderlichkeit der Ruhelage und der Schwingungszeiten.
482	54,26250	12,46250	705,542	706,722	707,015	5,9636	5,6600	
483	65,68750	13,54688	714,662	706,863	707,156	5,3563		
484	50,01875		700,486					
485	53,02500		700,392					Die Ruhelage und die Schwingungszeiten stark und unregelmässig veränderlich.
486	40,77500	12,47500	699,670	704,629	704,920	5,8749	5,7086	
487	52,87500	12,98750	704,825	702,859	701,150	5,5453		
488	39,40000		708,354					

Mittel 5,6887

Wahrscheinlicher Fehler 0,0312

Die diamagnetische Kugel giebt also ein zu kleines, die magnetische ein zu grosses Resultat, und die einzelnen Bestimmungen differiren stärker von dem Mittel, als bei der Zinnkugel. Immerhin ist die Abweichung nicht entschieden genug, um darauf Schlüsse zu gründen, vorzüglich bei der Wismuthkugel, bei der die Abweichung von dem, mit der Zinn-



kugel gefundenen Mittel den wahrscheinlichen Fehler kaum übertrifft. Allenfalls kann man vermuthen, dass die Eisenkugel durch ihren Magnetismus der Lage die etwas diamagnetische Bleimasse etwas abstiess, und dadurch die Anziehung etwas Weniges zu klein wurde, was einen etwas zu grossen Werth für die mittlere Erddichte zur Folge haben musste. Jedenfalls dürfte sich aber ergeben, dass zwischen der Bleimasse und der Zinnkugel störende magnetische oder diamagnetische Wirkungen nicht anzunehmen sind.

6. Ueber die Bestimmung der mittlern Dichtigkeit der Erde durch die Schwingungszeiten allein.

Wenn die Drehwaage für sich, und ohne dass eine genäherte Masse anziehend auf eine der Kugeln wirkt, schwingt, so ist ihre Schwingungszeit kürzer, als wenn eine Masse von der Seite her einer der Kugeln genähert wird. Nennt man die Schwingungszeiten in beiden Fällen N u. N', die Ablenkung, welche die Kugel durch die genäherte Masse erfährt $= A$, und die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von dem Mittelpunkte der genäherten Masse $= E$, so ist, wie von Cavendish und nach ihm von mir in meiner früheren Schrift (S. 37) gezeigt worden ist

$$N : N' = 1 : 1 + \frac{A}{E}$$

Man kann also aus dem Verhältnisse $N : N'$ auch A und mithin die mittlere Dichtigkeit der Erde bestimmen, d. h. durch blosse Beobachtung der Schwingungszeiten bei entfernter und genäherter Masse, ohne die Ablenkung zu beobachten.

Professor Forbes schlug mir vor längerer Zeit vor, die Masse abwechselnd mit ihrem Mittelpunkte normal auf den Arm und parallel mit demselben anzubringen, und aus der dadurch bewirkten Veränderung der Schwingungszeit die mittlere Dichtigkeit der Erde abzuleiten. Befindet sich nemlich die Masse in derselben Entfernung E mit ihrem Mittelpunkte in der durch den Arm gelegten Vertikalebene, so muss ihre Anziehung auf die Kugel die Schwingungszeit verkürzen.

Nennt man die Kraft, mit welcher die Masse die Kugel anzieht und um die Grösse A ablenkt $= K$, so ist auch bei einer Entfernung A der Kugel von ihrer Ruhelage die bewegende Kraft, die sie in letztere zurücktreibt $= K$, also bei einer Entfernung $= F$ von der Ruhelage ist die bewegende Kraft $= \frac{F}{A} K$. Befindet sich die Masse in derselben Entfernung $= E$, in welcher sie diese Anziehung $= K$ ausübt, in der

durch die Ruhelage des Armes gelegten Vertikale, so wird die bewegende Kraft bei der Ablenkung F um K. sin. α vermehrt, wenn α der Winkel ist, den die die Mittelpunkte der Kugel und der Masse bei der Ablenkung F und bei der Ruhelage verbindenden Graden einschliessen; oder die bewegende Kraft wird dann $= \frac{F}{A} . K + K \sin. \alpha$.

Wegen der Kleinheit von α kann man setzen $\sin. \alpha = tg\, \alpha = \frac{F}{E}$, also die bewegende Kraft bei der Ablenkung F

$$= \frac{F}{A} . K + \frac{F}{E} . K = F . K \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{E}\right) = \frac{F . K.}{A} \left(1 + \frac{A}{E}\right)$$

Es ist aber $K = \frac{A}{N^2\, l} . q$, wenn q das auf den Mittelpunkt der Kugel reducirte Trägheitsmoment der Drehwaage bedeutet und l die Länge des einfachen Sekundenpendels.

Es wird also bei der gedachten Lage der Masse und der Ablenkung $= F$ der Kugel von der Ruhelage die bewegende Kraft $= \frac{F}{N^2\, l}\, q \left(1 + \frac{A}{E}\right)$ wogegen sie bei entfernter Masse $\frac{F}{N^2\, l}\, q$ sein würde.

Daher mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{A}{E}$

$$N : N'' = 1 : 1 - \frac{A}{2\, E}$$

und
$$N' : N'' = 1 + \frac{A}{E} : 1 - \frac{A}{2\, E}$$

wenn N die Schwingungszeit ohne Einwirkung der Masse

N' dieselbe bei seitlicher Lage,

und N'' dieselbe bei der Lage der Masse in der durch den Arm gelegten Vertikalebene bedeutet.

Bei der früheren Einrichtung der Drehwaage war es nicht möglich, die Masse in die durch die Ruhelage des Armes gelegte Vertikalebene zu bringen, wogegen dieses bei der jetzigen, oben beschriebenen Einrichtung sehr gut angieng. Die Wirkung konnte sogar verdoppelt werden, indem man zwei gleiche Massen in entgegengesetzten Lagen auf den Drehstuhl legte, in welchem Falle sie die Ruhelage der Kugel in keiner Stellung veränderten, auf die Schwingungszeiten aber den doppelten Einfluss ausübten, so dass

$$N' : N'' = 1 + \frac{2\, A}{E} : 1 - \frac{A}{E} \text{ wird,}$$

woraus $A = \frac{(N' - N'')\, E}{N' + 2\, N''}$.

Bringt man diesen Werth in die oben gegebene Formel für die mittlere Dichtigkeit der Erde, so erhält man

$$D = \frac{M . l}{12 . \pi . R . \omega} . \frac{m}{2\, (m' + m' + m'')} . \frac{(N' + 2\, N'')^3}{E^3\, (N' - N'')}$$

indem $N = \frac{N' + 2\, N''}{3}$ ist.

Da bei den Versuchen nach der bisherigen Methode immer die Bestimmung der Grösse der Ablenkung des Armes durch die anziehende Masse die grösste Schwierigkeit des ganzen Problems ist, und die bei Beobachtung der Ruhelage vorkommenden, von Störungen veranlassten Unregelmässigkeiten die Hauptursache der immer noch beträchtlichen Abweichungen der einzelnen Resultate sind, — so erscheint auf den ersten Anblick die neue Methode, die mittlere Dichtigkeit der Erde aus Bestimmungen der Schwingungszeit allein abzuleiten, eine sehr willkommene. Bei näherer Betrachtung verliert sie aber ihre Vorzüge gänzlich, weil die Schwingungszeiten des Armes ebenfalls sehr beträchtlich variiren, diese Variationen aber den Variationen in der beobachteten Ablenkung ziemlich entsprechen, und der Fehler daher mehr oder weniger compensirt wird, wenn man Ablenkung und Schwingungszeit gleichzeitig beobachtet, was nicht der Fall ist, wenn man aus der einen oder andern allein das Resultat ableitet. Ich habe mehrere Versuche nach der zuletzt entwickelten Methode angestellt, und mit dem längern, dickern Kupferdraht gefunden

$2N'$	$2N''$			
$= 698'',8$	$= 680,4$	1846	August	23
716, 4	705,1	-	November	25
703, 9	695,7	-	-	26
694, 8	700,7	-	December	13
704, 0	701,3	1847	März	21
702, 2	698,5	-	-	22
710, 6	699,9	1849	April	18
721, 3	705,9	-	-	23

Man sieht ohne Weiteres, dass wenn man die Resultate der einzelnen Tage berechnet, man ausserordentlich von einander abweichende Werthe, einmal sogar einen negativen, erhält. Auch das Mittel aus allen Bestimmungen, welches für

$$2N' = 707,4 \qquad 2N'' = 698,2,$$

giebt noch die mittlere Erddichtigkeit = 6,25.

Könnte man aber, vielleicht durch veränderte Aufhängung, eine Drehwaage construiren, welche bei noch hinlänglicher Empfindlichkeit eine sehr constante Schwingungszeit besässe, so würde diese Bestimmungsart viel für sich haben.

7. Einige andere Beobachtungen mit der Drehwaage.

Eine empfindliche Drehwaage mit Spiegel und Fernrohr lässt sich in so verschiedenen Fällen, wo es auf Messung geringer anziehender

oder abstossender Kräfte ankommt, anwenden, dass es wünschenswerth wäre, sie im Besitze jeden grösseren physikalischen Cabinets zu sehen, vorzüglich da sie, wie aus dem Obigen erhellet, ohne grosse Kosten hergestellt, und, wenn der sie umgebende Holzkasten mit Staniol bekleidet wird, in jedem Zimmer, das nicht zu schnellen Temperaturwechseln ausgesetzt ist, beobachtet werden kann. Es muss nur durch eine Mauer oder sonst ein hinlänglich fester Punkt zum Aufhängen gegeben sein.

Es mögen hier noch einige kleine Versuche erwähnt werden, die von mir mit der Drehwaage angestellt wurden.

a. Die diamagnetische Abstossung, welche verschiedene Körper durch einen mässig starken Magnetpol erleiden, lässt sich leicht beobachten und messen. Versuche über die Abstossung einer mit 10 Procent Wismuth und wenig Blei legirten Zinnkugel, und einer Kugel aus reinem Wismuth von einem einfachen vierpfündigen Magnetstab, sowie über die Unwirksamkeit zweier entgegengesetzter gleichstarken Pole, die von derselben Seite auf gleiche Entfernung genähert werden, sind in den Berichten der K. S. Ges. der Wissenschaften zu Leipzig Bd. I. S. 251. (Pogg 63 S. 60) mitgetheilt. Eine bestätigende Beobachtung über diese Neutralisation der Wirkung von Magnetpolen der einen Art durch eben so starke der entgegengesetzten findet sich in Erdmanns Journal Band 49, S. 193.

b. Es ist von Faraday gezeigt und von Plücker u. a. mehrfach bestätigt worden, dass krystallisirte Körper mit Einer krystallographischen oder optischen Hauptaxe das Bestreben zeigen, sich zwischen zwei Magnetpolen mit ihrer Hauptaxe entweder axial oder äquatorial aufzustellen; die daraus scheinbar zu ziehende Folgerung aber, dass sie in der Richtung der Hauptaxe eine grössere oder kleinere Anziehung oder Abstossung vom Magnetpol erleiden, als in einer darauf senkrechten Richtung fand sich nicht bestätigt, indem sowohl Faraday als Plücker angeben, die Grösse dieser Wirkung sei in beiden Richtungen gleich. Die hierüber bekannt gewordenen Versuche schienen mir der weiteren Prüfung nicht unwerth. Deshalb hieng ich an die Drehwaage einmal eine Bergkrystall-, und dann eine Kalkspathkugel, jede davon aus einem einzigen Individuum gebildet, so auf, dass die Hauptaxe, die bei der Bergkrystallkugel durch optische Mittel aufgefunden, bei der Kalkspathkugel aber gleich bei der Anfertigung angegeben wurde, horizontal hiengen, theils parallel mit dem Arme der Drehwaage, theils

senkrecht darauf; so dass, wenn von der Seite her ein Magnetpol genähert wurde, die Wirkung desselben entweder senkrecht gegen die Hauptaxe der Kugel, theils parallel derselben Statt fand.

Die Bergkrystallkugel hatte einen Durchmesser von nahe 52^{mm}, die Kalkspathkugel von fast 54^{mm}; erstere wog 199748^{mg}., letztere 221902^{mg}. Die Aufhängung geschah mittelst eines schmalen leinenen, um die Kugeln gelegten Bandes.

Der vierpfündige Magnetstab wurde immer mit demselben Pole von Ost her so an das Gehäuse der Drehwaage horizontal neben dem Mittelpunkte der Kugel angelegt, dass seine magnetische Axe senkrecht gegen die Länge des Drehwaagenarmes gerichtet war.

Beide Kugeln waren diamagnetisch.

Die Bergkrystallkugel wurde abgestossen

bei senkrechter Richtung der Krystallaxe zur Magnetaxe um

8,3 Skalentheile,

im Mittel von 6 Versuchen bei einem mittleren Stande von 73,9

bei paralleler Richtung der Krystall- und Magnetaxe um

7,8 Skalentheile

im Mittel von 4 Versuchen bei einem mittleren Stande von 71,7, was einer um $0,3^{mm}$ grössern Entfernung entspricht.

Die Kalkspathkugel wurde abgestossen

bei senkrechter Richtung ihrer Axe, und einem mittleren Stande von 73,7 um

7,8 Skalentheile,

im Mittel aus 2 Versuchen;

bei paralleler Richtung ihrer Axe, und einem mittleren Stande von 75,1 also um $0,2^{mm}$ geringerer Entfernung um

7,9 Skalentheile

im Mittel aus 3 Versuchen.

Die einzelnen Versuche geben noch zu differente Resultate, um hieraus auf eine Verschiedenheit der Wirkung in den beiden Richtungen schliessen zu können, und es sprechen die Ergebnisse ebenfalls dafür, dass die Wirkung parallel der Axe oder senkrecht darauf gleich sei, und zeigen wenigstens mit Sicherheit, dass eine beträchtliche Verschiedenheit in der Grösse der Abstossung nach beiden Richtungen nicht Statt finde.

ZUSÄTZE
ZUM FLORENTINER PROBLEM

VON

M. W. DROBISCH.

1.

Bekanntlich verlangt das von Viviani den Geometern seiner Zeit vorgelegte sogenannte Florentiner Problem (*aenigma Florentinum*), dass auf der Oberfläche der Kugel eine Curve gefunden werde, die eine quadrirbare Fläche entweder einschliesst, oder deren Fläche, von einem angeblichen Theil der Kugelfläche hinweggenommen, einen quadrirbaren Rest lässt. Anstatt der sphärischen Curve selbst kann man auch die ebene Curve suchen, welche die Projection von jener auf die Ebene eines grössten Kreises ist. Auf diesem Wege hat Euler gezeigt, dass es unendlich viele Lösungen des Problems giebt. Wenn nun hiernach die Aufgabe für die Analysis keine besondere Wichtigkeit mehr hatte, so gab sie doch Anlass zur Auffindung mehrerer Sätze von geometrischem Interesse, die, da sich, wie wir zu zeigen gedenken, ihre Zahl nicht unbeträchtlich vermehren lässt, eine wiederholte Beschäftigung mit dem Gegenstande wohl rechtfertigen mögen. Diese Sätze schliessen sich zunächst der einfachsten Auflösung des Problems, der Viviani'schen an, nach welcher ein über der Ebene eines grössten Kreises der Kugel errichteter gerader Cylinder, der zur Basis einen Kreis hat, dessen Durchmesser dem Halbmesser der Kugel gleich ist, die Kugelfläche in zwei Oeffnungen durchbricht, deren Fläche, von der sie umschliessenden Fläche der Halbkugel hinweggenommen, einen Rest übrig lässt, welcher dem Quadrat des Kugeldurchmessers gleich, also quadrirbar ist. Hierzu hat nun zuerst Montucla bemerkt, dass auch der von der Kugelfläche begrenzte Theil der krummen Seitenfläche dieses Cylinders dem Quadrat des Durchmessers, also dem Flächeninhalt, den die durch ihn erzeugten beiden Oeffnungen von der Kugelfläche übrig lassen, gleich ist. Ferner hat Bossut gefunden, dass der Inhalt dieses Cylinders,

von dem Inhalt der ihn einschliessenden Halbkugel hinweggenommen, einen Rest lässt, der ein Neuntel vom Cubus des Kugeldurchmessers beträgt. Endlich hat Nic. Fuss (*Nova Acta Acad. Petrop. T. XIV.*) gezeigt, dass der Umfang eines jeden der beiden Durchschnitte der Cylinderfläche mit der Kugelfläche dem halben Umfang einer Ellipse gleichkommt, deren halbe kleine Axe der Halbmesser der Kugel und deren halbe grosse Axe die Diagonale des Quadrats über demselben ist. Fuss hat überdies nachgewiesen, dass der Viviani'sche und der Bossut'sche Satz nur die speciellen Fälle von zwei allgemeineren Sätzen sind, auf die wir später kommen werden.

2.

Eine nahe liegende, obgleich, wie es scheint, bisher unbeachtet gebliebene Bemerkung, an die sich alle nachfolgenden weiteren Untersuchungen knüpfen werden, ist folgende. Die sphärische Curve, welche die quadrirbare sphärische Fläche begrenzt, kann auf die Ebenen von drei auf einander senkrecht stehenden grössten Kreisen der Kugel projicirt werden und giebt daher immer drei der Aufgabe genügende ebene Curven. Ist nun eine der letzteren gegeben, so sind es auch die beiden andern; daher führt jede Auflösung des Problems durch eine solche Curve, die wir die quadrirende nennen wollen, immer zu zwei andern connexen Auflösungen durch quadrirende Curven, die in den bezeichneten beiden andern Ebenen liegen. Man kann diese Bemerkung noch viel allgemeiner machen und auf beliebige, durch den Mittelpunkt gehende oder auch nicht durch ihn gehende Ebenen ausdehnen; es genügt aber, um charakteristisch verschiedene Auflösungen zu erhalten, die Beschränkung auf die bezeichneten drei Ebenen.

Wenden wir diese Bemerkung auf die Viviani'sche Auflösung unsers Problems an, so ergiebt sich Folgendes. Sind x, y, z die vom Mittelpunkte der Kugel aus genommenen rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes der Kugelfläche, deren Halbmesser $= a$, so ist die Gleichung derselben

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Ferner ist die Gleichung des Kreises, der den Halbmesser der Kugel zum Durchmesser hat und durch ihren Mittelpunkt geht, desselben also, der (nach Nr. 1) die Aufgabe löst,

$$y^2 = ax - x^2.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen y, so ergiebt sich die Gleichung

$$z^2 = a\,(a - x).$$

Eliminirt man aus denselben Gleichungen x, so folgt

$$y^2 = \frac{z^2}{a^2}\,(a^2 - z^2).$$

Ist nun in Fig. 1 $OPBO$ die Kreisbasis des Cylinders auf der xy-Ebene, also OB ihr in die x-Axe fallender Durchmesser; ist ferner COD ein auf OB senkrechter, also in die z-Axe fallender Durchmesser der Kugel, so stellt die erste der beiden erhaltenen Gleichungen eine durch die Punkte C, B, D gehende Parabel dar, deren Axe der Lage nach mit der x-Axe zusammenfällt, und deren Scheitel der Punkt B ist. Die andere erhaltene Gleichung gehört einer in der yz-Ebene liegenden Schleifenlinie, deren Durchmesser CD und Knoten O ist. Die beiden Schleifen dieser Curve über OC und OD sind also die Projectionen der beiden Durchschnitte zwischen der Cylinderfläche über dem Kreise $OPBO$ und der Kugelfläche auf die yz-Ebene; ebenso sind die beiden Zweige der Parabel, BC, BD, die Projectionen derselben Durchschnitte auf die xz-Ebene.

Hieraus erhellt, dass mit der Viviani'schen Auflösung noch zwei andere gegeben sind, in deren einer die Parabel, in der andern die angegebene Schleifenlinie die quadrirende Curve ist.

3.

Aus dem Vorstehenden ist nun zwar schon einleuchtend, dass die mehrerwähnten beiden Durchschnitte des Cylinders mit der Kugel eine zusammenhängende sphärische Curve bilden, die man als eine sphärische Schleifenlinie bezeichnen kann. Es lässt sich jedoch auch zeigen, dass sie auf sehr einfache Weise durch Bewegung erzeugt wird. Sei nämlich (Fig. 1) M ein beliebiger Punkt dieser sphärischen Curve, ferner $OQ = x$, $QP = y$, $PM = z$ seine rechtwinkligen Coordinaten, so ist, wenn man die Geraden OM, MQ zieht und den Winkel $MOP = \varphi$ setzt, $z = a \sin \varphi$. Substituirt man nun diesen Werth in den Gleichungen der Parabel und Schleifenlinie, so erhält man

$$x = a \cos^2\varphi\,; \qquad y = a \sin\varphi \cos\varphi.$$

Nennen wir nun den grössten Kreis *AEBF* den Aequator der Kugel und den grössten Kreis *ACBD* ihren ersten Meridian, so ist $\angle MOP$ die Breite, $\angle POQ$ die Länge des Punktes auf der Kugelfläche. Es ist aber

$$\angle POQ = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} = \varphi,$$

also $\angle POQ = \angle MOP$, die Länge des Punktes seiner Breite gleich. Die sphärische Schleifenlinie *CMB* wird also durch einen beweglichen Punkt beschrieben, dessen Breite stets seiner Länge gleich ist, und der also auf einem rotirenden Meridian vom Aequator aus so fortrückt, dass der zurückgelegte Bogen stets durch den Winkel gemessen wird, um den sich der bewegliche Meridian von dem ersten Meridian aus gedreht hat.

4.

Die nächste Frage würde sein, ob die über der gefundenen Parabel und Schleifenlinie errichteten Cylinder, soweit sie innerhalb der Kugel liegen, von dieser hinweggenommen, ebenfalls cubirbare Räume zurücklassen. Hierbei können nun allerdings die bekannten Formeln für die Cubatur von krummen Flächen begrenzter Körper in Anwendung kommen. Was jedoch die Schleifenlinie betrifft, so ist es vortheilhafter, sich der polaren Coordinaten zu bedienen, die, wie die Folge zeigen wird, sich auch in andern hierher gehörigen Fällen nützlich erweisen. Wir wollen daher zuvörderst einige für die nachfolgenden Untersuchungen nöthige allgemeine Formeln ableiten.

Sei (Fig. 2) *AEBF* ein grösster Kreis, *AB* einer seiner Durchmesser, *O* der Mittelpunkt, *CmMD* eine innerhalb des Halbkreises *AEB* liegende beliebige Curve. Auf ihrem Radiusvector *CM* sei ein beliebiger Punkt *P* genommen, und $CP = v$. Sei ferner $PQ = dv$, $\angle MCD = \varphi$, $\angle mDM = d\varphi$, daher $Pp = v\,d\varphi$, folglich das Flächenelement $PpqQ = v\,dv\,d\varphi$. Werden nun in den Punkten P, p, q, Q Senkrechte auf der Ebene *AEB* errichtet, welche die Kugelfläche resp. in P', p', q', Q' treffen mögen, so begrenzen die durch diese Senkrechten PP', pp', qq', QQ' paarweise und der Reihe nach gelegten Ebenen, verbunden mit der Grundebene und der Kugelfläche, ein Prisma, das als Element des Inhalts eines Körpers angesehen werden kann, der eine über der Curve *CmMD* errichtete senkrechte Cylinderfläche, eine durch *CD* gelegte auf der Grundebene senkrechte Ebene, die Kugelfläche und die Grundebene zu Grenzen hat. Der Inhalt dieses Prismas ist offenbar $= PP'.\,v\,dv\,d\varphi$, wo PP' zu bestimmen übrig bleibt. Sei nun durch *P* die Gerade *EPGF*

senkrecht auf dem Durchmesser AB gezogen, und der Punkt G, in dem sie ihn schneidet, mit P' durch eine Gerade verbunden, so ist, in dem bei P rechtwinkligen Dreieck $PP'G$, $PP' = \sqrt{GP'^2 - GP^2}$. Wird nun durch die Punkte E, P', F eine Ebene gelegt, so schneidet diese die Kugelfläche in einem Kreise vom Halbmesser $GP' = GE$. Es ist aber auch, in dem Halbkreise AEB, $GE = \sqrt{AG \,.\, BG}$. Setzen wir nun $AC = c$, so wird $AG = c + v \cos \varphi$, $BG = 2a - c - v \cos \varphi$. Zugleich ist $GP = v \sin \varphi$; daher

$$GP' = GE = \sqrt{(c + v \cos \varphi)(2a - c - v \cos \varphi)}\,;$$

folglich $$PP' = \sqrt{(2a - c)\, c + 2\,(a - c)\, v \cos \varphi - v^2};$$

mithin das Prisma über $PpqQ$

$$v\, dv\, d\varphi \sqrt{(2a - c)\, c + 2\,(a - c)\, v \cos \varphi - v^2}.$$

Ist nun $CM = r = f(\varphi)$ die Gleichung der Curve $CMmD$, wo $f(\varphi)$ eine gegebene Function von φ bedeutet; bezeichnet ferner μ den Winkel BCH, den die Berührende der Curve in C mit CB macht, und wird der Inhalt des senkrecht über und unter der Basis $CmMDG$ innerhalb der Kugel liegenden halbcylindrischen Körpers $= S$ gesetzt, so ist

$$S = 2\int_0^{\mu} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} v\, dv \sqrt{(2\,a - c)\, c + 2\,(a - c)\, v \cos \varphi - v^2}. \qquad (1)$$

Für $c = a$, wo die Curve durch den Mittelpunkt geht (Fig. 3), wird hieraus, da, mit Weglassung der willkürlichen Constante,

$$\int v\, dv \sqrt{a^2 - v^2} = -\tfrac{1}{3}\,(a^2 - v^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$S = \tfrac{2}{3}\,\mu a^3 - \tfrac{2}{3}\int_0^{\mu} d\varphi\, [a^2 - f(\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}\,; \qquad (2)$$

wo zur Abkürzung $f(\varphi)^2$ für $(f(\varphi))^2$ geschrieben ist. Es ist aber $\frac{2}{3}\,\mu a^3$ der Inhalt eines hufförmigen Kugelausschnittes, der den halbcylindrischen Körper über und unter der Curve einschliesst und den Winkel $\mu = BCH$ zu seinem Flächenwinkel hat. Daher ist

$$\tfrac{2}{3}\,\mu a^3 - S = \tfrac{2}{3}\int_0^{\mu} d\varphi\, [a^2 - f(\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}$$

der Rest, den der halbcylindrische Körper von diesem hufförmigen übrig lässt, und dieser Rest cubirbar, wenn $f(\varphi)$ so beschaffen ist, dass das Integral zur Rechten des Gleichheitszeichens einen algebraischen Aus-

druck giebt. Ein Satz, den Fuss (a. a. O. S. 225) aus weniger allgemeinen Betrachtungen abgeleitet hat.

Ist die Curve ein Kreis vom Durchmesser $CD = 2b$ (Fig. 4), so muss, wenn er ganz in dem grössten Kreise liegen soll, $c + 2b < 2a$ $(= AB)$ sein. Alsdann ist $CM = f(\varphi) = 2b\cos\varphi$ die Gleichung dieses Kreises, also wenn S jetzt den Inhalt des vollen Cylinders, der durch diesen Kreis geht, bedeutet, da hier $\mu = BCH = \frac{\pi}{2}$,

$$S = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{2b\cos\varphi} v dv \sqrt{(2a-c)c + 2(a-c)v\cos\varphi - v^2}; \qquad (3)$$

welche Formel Fuss (S. 229) in derselben Weise, durch welche wir die allgemeinere Formel erhalten haben, speciell ableitet.

5.

Sei ferner $\frac{1}{2}\mathfrak{S}$ der Flächeninhalt des Theils der Kugelfläche, welcher von der durch die Curve CMD (Fig. 2) gelegten Cylinderfläche und einer durch CD gelegten, auf der Ebene AEB senkrechten Ebene begrenzt wird, so ist, unter denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in der vorigen Nr., $P'p'q'Q'$ ein Element dieses Theils der Kugelfläche, $PpqQ$ aber die Projection dieses Elements auf die Ebene des Grundkreises. Ist daher die Neigung dieses Elements gegen die Grundebene $= i$, so ist

$$P'p'q'Q' = \frac{PpqQ}{\cos i} = \frac{v\,dv\,d\varphi}{\cos i}.$$

Wird nun der Halbmesser OP' gezogen und der in der Senkrechten durch O auf der Kugelfläche liegende Punkt durch O' bezeichnet, so ist $\angle O'OP' = \angle OP'P = i$. Es ist aber in dem Dreieck OPP' $\cos OP'P = \frac{PP'}{OP'}$, also $\cos i = \frac{PP'}{a}$; daher

$$P'p'q'Q' = \frac{av\,dv\,d\varphi}{PP'}.$$

Setzt man nun für PP' den in der vorigen Nummer gefundenen Ausdruck, so ergiebt sich

$$\mathfrak{S} = 2a\int_0^{\mu} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} \frac{v\,dv}{\sqrt{(2a-c)c + 2(a-c)v\cos\varphi - v^2}}, \qquad (1)$$

wo $\mathfrak{S}$ die Summe der Flächeninhalte der ober- und unterhalb der Grundebene durch die Cylinderfläche und die Verticalebene über CD begrenzten Theile der Kugelfläche bedeutet.

Für $c = a$, also wenn die Curve *CMD* durch den Mittelpunkt geht (Fig. 3), wird

$$\int \frac{v\,dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = - \sqrt{a^2 - v^2} + \text{Const.},$$

$$\mathfrak{S} = 2a \int_0^\mu d\varphi \left[a - \sqrt{a^2 - f(\varphi)^2}\right] = 2\mu a^2 - 2a \int_0^\mu d\varphi \sqrt{a^2 - f(\varphi)^2}; \tag{2}$$

folglich, da $2\mu a^2$ der Theil der Kugelfläche ist, der dem hufförmigen Kugelausschnitt über *BCH* zugehört,

$$2\mu a^2 - \mathfrak{S} = 2a \int_0^\mu d\varphi \sqrt{a^2 - f(\varphi)^2}$$

der Rest, der nach Abzug der Fläche $\mathfrak{S}$ von ihm zurückbleibt. Giebt also dieses Integral eine algebraische Function, so ist dieser Rest eine quadrirbare Fläche, und die Curve *CMD* genügt dem Florentiner Problem. Auch diesen Satz hat Fuss (S. 224) speciell erwiesen.

Ist die Curve ein Kreis vom Durchmesser $2b < 2a$, also (Fig. 4) $CM = f(\varphi) = 2b \cos \varphi$, so folgt, wenn hier $\mathfrak{S}$ den durch den Cylinder über dem ganzen Kreis ober- und unterhalb der Grundebene von der Kugelfläche abgeschnittenen Theil bedeutet, nach (1)

$$\mathfrak{S} = 4a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{2b\cos\varphi} \frac{v\,dv}{\sqrt{(2a-c)c + 2(a-c)v\cos\varphi - v^2}}, \tag{3}$$

übereinstimmend mit Fuss (S. 220).

6.

Sehr leicht ergiebt sich weiter der Inhalt des innerhalb der Kugel liegenden Theils der über der Curve *CMD* (Fig. 2) errichteten Cylinderfläche Σ. Das Element des Bogens der Curve ist nämlich, wenn $CM = r$ und $\frac{dr}{d\varphi} = r'$, $d\varphi \sqrt{r^2 + r'^2}$, daher das Element der Cylinderfläche $PP'\, d\varphi \sqrt{r^2 + r'^2}$, folglich, wenn für PP' der Ausdruck in Nr. 4 gesetzt und darin v mit r vertauscht wird,

$$\Sigma = 2 \int_0^\mu d\varphi \sqrt{[(2a-c)c + 2(a-c)r\cos\varphi - r^2](r^2 + r'^2)}. \tag{1}$$

Ist $c = a$, geht also die Curve durch den Mittelpunkt (Fig. 3), so wird

$$\Sigma = 2 \int_0^\mu d\varphi \sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 + r'^2)}. \tag{2}$$

Ist die Curve ein Kreis vom Durchmesser $2b < 2a$ (Fig. 4), so giebt die Formel (1), da dann $\mu = \frac{\pi}{2}$ ist, wenn zur Abkürzung

$$2(a-b)(b+c)-c^2=f^2$$
$$\text{und}\quad 2b(a-b-c)=g^2$$

gesetzt wird, und Σ die Seitenfläche des Cylinders über dem ganzen Kreis bedeutet,

$$\Sigma = 8b\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\ \sqrt{f^2+g^2\cos 2\varphi}, \tag{3}$$

wie auch Fuss (S. 219) findet. Dieser Ausdruck lässt sich, was derselbe nicht bemerkt, ohne Weitläufigkeit allgemein reduciren. Es ist nämlich

$$\int d\varphi\sqrt{f^2+g^2\cos 2\varphi} = \sqrt{f^2+g^2}\int d\varphi\sqrt{1-\frac{2g^2}{f^2+g^2}\sin^2\varphi}.$$

Da nun $f^2+g^2 = 4b(a-b-c)+c(2a-c)$, und $2g^2 = 4b(a-b-c)$, so ist, da überdies $c < 2a$, immer $\frac{2g^2}{f^2+g^2} < 1$, daher

$$\int d\varphi\sqrt{f^2+g^2\cos 2\varphi} = \sqrt{f^2+g^2}.\, E\left(\frac{g\sqrt{2}}{\sqrt{f^2+g^2}}, \varphi\right);$$

folglich

$$\Sigma = 8b\sqrt{f^2+g^2}.\, E\left(\frac{g\sqrt{2}}{\sqrt{f^2+g^2}}\right). \tag{4}$$

Es ist daher die innerhalb der Kugel enthaltene kreisförmige Cylinderfläche vom Halbmesser b gleich der Fläche eines geraden Cylinders von der Höhe $2b$, dessen Basis eine Ellipse, deren halbe grosse Axe $= \sqrt{f^2+g^2}$, und deren halbe kleine Axe $= \sqrt{f^2-g^2}$ ist.

Für $c = a$ und $b = \frac{1}{2}a$ geht die Formel (3) über in

$$\Sigma = 4a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin\varphi\, d\varphi = 4a^2,$$

was den in Nr. 1 angeführten Montucla'schen Satz giebt.

7.

Eben so leicht gelangen wir endlich zu einer Formel für den Bogen σ der Durchschnittscurve der Cylinderfläche über CMD (Fig. 2) mit der Kugelfläche. Das Element dieses Bogens ist nämlich, wenn $\frac{dr}{d\varphi} = r'$ und M' der senkrecht über M auf der Kugelfläche liegende Punkt,

$$d\sigma = \sqrt{(d.MM')^2 + (r^2+r'^2)\,d\varphi^2}.$$

Substituiren wir nun, v mit r vertauschend, für MM' den in Nr. 4 gefundenen Ausdruck von PP', so giebt dieser, differentiirt,

$$d.MM' = d\varphi \frac{[(a-c)\cos\varphi - r]\, r' - (a-c)\, r \sin\varphi}{\sqrt{(2a-c)c + 2(a-c)\, r\cos\varphi - r^2}};$$

daher folgt, wenn wir zur Abkürzung $a - c = h$ setzen, für die Länge der Curve über CMD

$$\sigma = \int_0^{\mu} d\varphi \sqrt{\left\{\frac{a^2(r^2 + r'^2) - [(h\cos\varphi - r)\, r + hr'\sin\varphi]^2}{a^2 - h^2 + 2hr\cos\varphi - r^2}\right\}}. \qquad (1)$$

Geht die Curve durch den Mittelpunkt, so dass also $h = 0$ wird, so ergiebt sich der einfachere Ausdruck

$$\sigma = \int_0^{\mu} d\varphi \sqrt{\left\{r^2 + \frac{a^2 r'^2}{a^2 - r^2}\right\}}. \qquad (2)$$

Für den Kreis vom Durchmesser $2b$ folgt aus (1), wenn f^2 und g^2 dieselbe Bedeutung wie in der vorigen Nummer haben und σ die Länge des ganzen Umfangs der Durchschnittscurve ist, da dann $\mu = \frac{\pi}{2}$,

$$\sigma = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{\left\{\frac{4b^2 f^2 + g^4 + 4b^2 g^2 \cos 2\varphi - g^4\cos^2 2\varphi}{f^2 + g^2\cos 2\varphi}\right\}}, \qquad (3)$$

wesentlich übereinstimmend mit Fuss (S. 219).

8.

Kehren wir jetzt zu der im Eingange zu Nr. 4 aufgeworfenen Frage zurück, so verwandelt sich die Gleichung der Schleifenlinie in der yz-Ebene, $x^2y^2 = z^2(a^2 - z^2)$, (Nr. 2), wenn wir $y = r\sin\varphi$ und $z = r\cos\varphi$ setzen, in

$$r = \frac{2a\sqrt{\cos 2\varphi}}{1 + \cos 2\varphi}.$$

Dieser Ausdruck, in Nr. 4, (2) für $f(\varphi)$ gesetzt, giebt

$$\int d\varphi\, [a^2 - f(\varphi)^2]^{\frac{3}{2}} = a^3 \int d\varphi \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi}\right)^3 = a^3 \int d\varphi\, \mathrm{tg}^6\varphi$$
$$= a^3\left(\tfrac{1}{5}\mathrm{tg}^5\varphi - \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\varphi + \mathrm{tg}\,\varphi - \varphi\right).$$

Da $r = 0$, wenn $\varphi = \frac{\pi}{4}$, so ist $\mu = \frac{\pi}{4}$; daher

$$S = \frac{\;}{6}a^3 - \frac{2}{3}a^3\left(\frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}\right) = a^3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{26}{45}\right).$$

Dieser Werth ist zu verdoppeln, wenn man den Inhalt des über der ganzen Schleife errichteten Cylinders haben will. Wird nun $2S$ vom Inhalt der Halbkugel $\frac{2\pi}{3}$ abgezogen, so bleibt als Rest

$$\frac{52}{45}a^3;$$

also lassen die über beiden Schleifen der Curve errichteten Cylinder vom Inhalt der ganzen Kugel den Rest

$$\frac{104}{45}a^3,$$

oder, wenn $2a = \delta$, den Rest $\frac{13}{45}\delta^3$ übrig.

9.

Um endlich den Inhalt des über dem Abschnitt der Parabel *CDBC* (Fig. 1) errichteten cylindrischen Körpers, so weit er in der Kugel eingeschlossen ist, zu bestimmen, bedienen wir uns mit mehr Vortheil nach der gewöhnlichen Weise rechtwinkliger Coordinaten. Da für die Kugel $y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$, so folgt

$$\int y dz = \tfrac{1}{2} z \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} + \tfrac{1}{2}(a^2 - x^2) \arcsin \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Da nun nach Nr. 2 die Gleichung der die Basis dieses Cylinders begrenzenden Parabel $z^2 = a(a-x)$ ist, so ist vorstehendes Integral zwischen den Grenzen $z = -\sqrt{a(a-x)}$ und $z = +\sqrt{a(a-x)}$ zu nehmen und dann nach x zu integriren. Ersteres giebt

$$(a-x)\sqrt{ax} + (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{a}{a+x}}.$$

Setzt man nun $\sqrt{\frac{a}{a+x}} = \sin\xi$, also $x = a\cot^2\xi$ und $dx = 2a \cot\xi\, d\cot\xi$, so ist zu finden

$$2a^3 \int [\cot^2\xi - \cot^4\xi + \xi(\cot\xi - \cot^5\xi)]\, d\cot\xi,$$

d. i.

$$2a_3 [\tfrac{1}{3}\cot^3\xi - \tfrac{1}{5}\cot^5\xi + \tfrac{1}{2}\xi\cot^2\xi - \tfrac{1}{6}\xi\cot^6\xi - \tfrac{1}{2}\int \cot^2\xi\, d\xi$$
$$+ \tfrac{1}{6}\int \cot^6\xi\, d\xi].$$

Da nun

$$\int \cot^2\xi\, d\xi = -\cot\xi - \xi,$$

und

$$\int \cot^6\xi\, d\xi = -\tfrac{1}{5}\cot^5\xi + \tfrac{1}{3}\cot^3\xi - \cot\xi - \xi,$$

so giebt die Substitution dieser Werthe in dem vorhergehenden Ausdruck für das gesuchte Integral

$$\frac{a^3}{3}\left[2\cot\xi + \tfrac{7}{3}\cot^3\xi - \tfrac{7}{5}\cot^5\xi + \xi\,(2 + 3\cot^2\xi - \cot^6\xi)\right].$$

Wird dasselbe von $x = 0$ bis $x = a$, d. i. von $\xi = \frac{\pi}{2}$ bis $\xi = \frac{\pi}{4}$ genommen und verdoppelt, so ergiebt sich als der gesuchte Inhalt

$$\frac{88}{45}\,a^3,$$

oder, wenn $2a = \delta$,

$$\frac{11}{45}\,\delta^3.$$

Der Inhalt der über den beiden Parabeln in den Halbkreisen *CBD* und *CAD* errichteten cylindrischen Körper beträgt also zusammen

$$\frac{22}{45}\,\delta^3.$$

10.

Vergleichen wir die in den beiden vorigen Nummern erhaltenen Raumbestimmungen mit einander, so kann es zunächst auffallen, dass, indess für die Cylinder über der Schleifenlinie, wie für die über den beiden Kreisen, die Reste, die sie von der Kugel übrig lassen, cubirbar sind, dasselbe, was die cylindrischen Körper über den Parabeln betrifft, nicht von ihrem Reste, sondern von ihnen selbst gilt. Dieses Befremden hebt sich aber, wenn man bemerkt, dass nicht die von diesen Parabeln eingeschlossenen Flächenräume, wie bei der Schleifenlinie und den Kreisen, sondern die zwischen ihrem Umfang und dem des grössten Kreises, in dessen Ebene sie liegen, enthaltenen Flächenräume die Projectionen der Flächen sind, in welchen die Kugel von den Cylindern durchbrochen wird. Der in der vorigen Nr. gefundene Inhalt ist also in der That ebenfalls ein Rest, derjenige nämlich, den die Cylinder über den Projectionen der Oeffnungen in der Kugelfläche auf die xz-Ebene von dem Kugelinhalt übrig lassen. Bezeichnen wir nun diese Reste, welche die kreisförmigen, schleifenförmigen und parabolischen Cylinder von der Kugel übrig lassen, der Reihe nach durch R, R', R'', so ist, wenn δ der Durchmesser der Kugel,

$$R = \tfrac{2}{9}\,\delta^3 = \tfrac{10}{45}\,\delta^3;\quad R' = \tfrac{13}{45}\,\delta^3;\quad R'' = \tfrac{22}{45}\,\delta^3;$$

daher

$$R + R' + R'' = \delta^3.$$

Die Räume also, welche die geraden Cylinder über den Projectionen der Flächen der, nach Nr. 3, durch Bewegung eines Punktes in beiden Halbkugeln erzeugten sphärischen Schleifenlinien auf die drei durch den Mittelpunkt gelegten Coordinatenebenen, der Reihe nach von dem Inhalt der Kugel weggenommen, übrig lassen, sind zusammen dem Cubus des Kugeldurchmessers gleich.

11.

Macht man jeden der beiden Flächentheile der sphärischen Schleifenlinie zur Basis eines Kugelsectors K, so ist der Inhalt desselben, da jener Flächentheil, nach Nr. 1, $= \pi a^2 - 2a^2$,

$$K = \frac{1}{3} a^3 (\pi - 2);$$

daher der Rest, den er von der Viertelkugel übrig lässt,

$$\frac{2}{3} a^3.$$

Der Rest, den alle vier Kugelsectoren zusammen von der Kugel übrig lassen, beträgt also

$$\frac{8}{3} a^3 \text{ oder } \frac{1}{3} \delta^3,$$

was, nach der vorigen Nr., auch $= \frac{1}{3}(R + R' + R'')$ gesetzt werden kann.

Jeder dieser Sectoren ist aber in der Hälfte eines der kreisförmigen Cylinder eingeschlossen, deren Inhalt $= \frac{\pi}{3} a^3 - \frac{4}{9} a^3$. Der Rest, den der Sector von diesem ihn umschliessenden halben Cylinder übrig lässt, ist also

$$\frac{2}{9} a^3,$$

folglich, da der zwischen der Fläche dieses halben Cylinders und der des ihn umschliessenden Viertels der Kugel enthaltene Raum $= \frac{4}{9} a^3$ ist, die Hälfte dieses Raums; oder: der Raum zwischen dem Mantel des Sectors und dem des halben Cylinders ist halb so gross als der Raum zwischen dem Mantel des halben Cylinders und der Fläche des ihn umschliessenden Kugelviertels.

12.

Gehen wir jetzt auf die allgemeinere Untersuchung ein, ob, wenn über dem Durchmesser des grössten Kreises $AB = 2a$ einer Kugel (Fig. 5) zwei einander berührende kreisförmige gerade Cylinder von ungleichen Durchmessern, $AC = 2b$, $CB = 2(a - b)$, errichtet werden, diese in Bezug auf Fläche und Inhalt der Kugel zu ähnlichen Sätzen führen, wie die Cylinder von gleichen Durchmessern.

Untersuchen wir zunächst, ob die Theile, welche diese Cylinder von der Kugelfläche abschneiden, von dieser hinweggenommen, quadrirbare Reste übrig lassen. Wir bedienen uns hierbei der Formel (3) in Nr. 5, in welcher für den Cylinder über AC $c = 0$ zu setzen ist, wodurch sie übergeht in

$$\mathfrak{S} = 4a\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{2b\cos\varphi} \frac{v\,dv}{\sqrt{2av\cos\varphi - v^2}}.$$

Es ist aber allgemein

$$\int \frac{v\,dv}{\sqrt{2av\cos\varphi - v^2}} = -\sqrt{2av\cos\varphi - v^2} + 2a\cos\varphi \arcsin\sqrt{\frac{v}{2a\cos\varphi}},$$

woraus, wenn dieses Integral von $v = 0$ bis $v = 2b\cos\varphi$ genommen wird, folgt

$$-2\cos\varphi\sqrt{b(a-b)} + 2a\cos\varphi \arcsin\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Dieser Ausdruck giebt, nach φ integrirt,

$$-2\sin\varphi\left(\sqrt{b(a-b)} - a\arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}\right).$$

Wird nun dieses Integral von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ genommen und mit $4a$ multiplicirt, so kommt für die Summe der beiden durch den Cylinder ober- und unterhalb der Grundebene von der Kugelfläche abgeschnittenen Theile

$$\mathfrak{S} = 8a\left(a\arcsin\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{b(a-b)}\right).$$

Hieraus ergiebt sich sofort durch Vertauschung von b mit $a - b$ für den durch den Cylinder über BC abgeschnittenen Theil $\mathfrak{S}'$ der Kugelfläche

$$\mathfrak{S}' = 8a\left(a\arccos\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{b(a-b)}\right).$$

Daher ist

$$\mathfrak{S} + \mathfrak{S}' = 4\pi a^2 - 16a\sqrt{b(a-b)}.$$

Es ist daher der Rest, den $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ zusammengenommen von der Kugelfläche übrig lassen, quadrirbar, nämlich

$$4\pi a^2 - (\mathfrak{S}+\mathfrak{S}') = 16a\sqrt{b(a-b)}$$
$$= 4.2a\sqrt{2b(2a-2b)}$$
$$= 2AB.DE.$$

Für $b = \frac{a}{2}$ wird hieraus $2AB^2$, wie es sein muss. Hinsichtlich der abgeschnittenen Flächen zeigen also die Cylinder von ungleichen Durchmessern eine ganz ähnliche Eigenschaft wie die zuerst betrachteten Cylinder von gleichen Durchmessern.

Es mag hierbei nicht unbemerkt bleiben, dass der Rest, welchen die halben Kreisbasen dieser Cylinder über AC und BC zusammengenommen von dem Halbkreis über AB zurücklassen, der Ἄρβηλος der Alten ist, dessen Fläche gleich der eines Kreises, von dem der Durchmesser die mittlere Proportionale zwischen AC und BC, also DC ist. Der Arbelos ist demnach keine quadrirbare Fläche; dagegen ist dies, nach dem Vorstehenden, derjenige Theil der Kugelfläche, dessen Projection auf die angenommene Grundebene der Arbelos darstellt, und den man den sphärischen Arbelos nennen kann.

13.

Die so eben gefundenen Ausdrücke für $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ sind unmittelbar einer geometrischen Auslegung fähig. Es ist nämlich (s. Fig. 5)

$$\text{arc sin}\sqrt{\frac{b}{a}} = \text{arc sin}\sqrt{\frac{2b.2a}{2a}} = \text{arc sin}\frac{AD}{AB} = \text{arc. ang. } ABD$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{ arc. ang. } AOD;$$

also $4a^2 \text{ arc sin}\sqrt{\frac{b}{a}} = 2a^2 \text{ arc. ang. } AOD$. Nun ist dieser letztere Ausdruck, wenn arc. ang. AOD in Theilen des Halbmessers 1 bestimmt wird, die Oberfläche des hufförmigen Kugelausschnittes (*Ungula*), der von der Grundebene und einer durch OD gelegten Ebene begrenzt wird, die senkrecht auf der Ebene ADB steht. Bezeichnen wir nun die Oberfläche dieses Ausschnitts nach seinem Flächenwinkel durch Ar. Ung. AOD, so ist

$$4a^2 \text{ arc sin}\sqrt{\frac{b}{a}} = \text{Ar. Ung. } AOD.$$

Da nun andrerseits

$$4a\sqrt{b(a-b)} = 2a\sqrt{2b(2a-2b)} = AB\,.\,CD,$$

so ist
$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{S} = \text{Ar. Ung. } AOD - AB\,.\,CD.$$

Offenbar ist aber auch Ar. Ung. AOD = Ar. Ung. AOE; daher

$$\mathfrak{S} = \text{Ar. Ung. } AOD + \text{Ar. Ung. } AOE - 2AB.CD$$
$$= \text{Ar. Ung. } AOD + \text{Ar. Ung. } AOE - AB.DE.$$

Hiernach ist nun

$$\text{Ar. Ung. } AOD - \tfrac{1}{2}\mathfrak{S} = \text{Ar. Ung. } AOE - \tfrac{1}{2}\mathfrak{S} = AB.CD,$$

also der Rest, den jede der beiden Flächen $\frac{1}{2}\mathfrak{S}$, in denen der Cylinder über AC die Kugelfläche durchbricht, von der Oberfläche des Hufes zurücklässt, dessen Flächenwinkel für die eine AOD, für die andere der gleiche Winkel AOE ist, quadrirbar; folglich gilt dies auch von ihrer Summe.

Ebenso folgt, dass

$$\text{Ar. Ung. } BOD - \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}' = \text{Ar. Ung. } BOE - \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}' = AB.CD.$$

Für $AC = BC$ geht Ar. Ung. AOD = Ar. Ung. BOD über in πa^2, CD in $\frac{1}{2}AB$, also wird dann

$$\pi a^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{S} = \pi a^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}' = \tfrac{1}{4}(AB)^2,$$

oder

$$4\pi a^2 - 2\mathfrak{S} = 4\pi a^2 - 2\mathfrak{S}' = 2(AB)^2,$$

was der Viviani'sche Satz ist.

14.

Um ferner die Seitenflächen dieser ungleichen Cylinder zu bestimmen, genügt es, zunächst für den über AC, (Fig. 5) in Nr. 6, (2) $c = 0$ zu setzen. Da dann $f^2 = g^2 = 2b(a-b)$ wird, so ist

$$\int d\varphi\, \sqrt{f^2 + g^2 \cos 2\varphi} = 2\sqrt{b(a-b)} \int d\varphi \cos\varphi$$
$$= 2\sqrt{b(a-b)}.\sin\varphi,$$

daher

$$\Sigma = 16b\sqrt{b(a-b)} = 4.2b\sqrt{2b(2a-2b)}$$
$$= 2AC.DE.$$

Durch Vertauschung von b mit $a - b$ erhält man für die Seitenfläche Σ' des andern Cylinders über BC

$$\Sigma' = 16(a-b)\sqrt{b(a-b)} = 2BC.DE.$$

Beide Flächen sind also quadrirbar. Ihre Summe ist

$$\Sigma + \Sigma' = 2AB.DE.$$

Für $AC = BC$ ergiebt sich

$$\Sigma = \Sigma' = (AB)^2; \quad \Sigma + \Sigma' = 2(AB)^2,$$

was der Montucla'sche Satz ist.

15.

Gehen wir jetzt an die Bestimmung des Inhaltes dieser Cylinder. Wir erhalten den Inhalt S desjenigen über AC, wenn wir in Nr. 4, (3) $c = 0$ setzen. Sei zur Abkürzung $2a \cos\varphi = A$, so wird

$$\int v dv \sqrt{2 \operatorname{arc} \cos\varphi - v^2} = -\tfrac{1}{3}(Av - v^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4}A\left[(v - \tfrac{1}{2}A)\sqrt{Av - v^2} + \tfrac{1}{2}A^2 \arcsin\sqrt{\tfrac{v}{A}}\right].$$

Wird dieses Integral von $v = 0$ bis $v = 2b \cos\varphi$ genommen, so kommt

$$\left[a^3 \arcsin\sqrt{\tfrac{b}{a}} - \tfrac{1}{3}(3a^2 + 2ab - 8b^2)\sqrt{b(a-b)}\right]\cos^3\varphi.$$

Nach φ integrirt, giebt dies

$$\left[a^3 \arcsin\sqrt{\tfrac{b}{a}} - \tfrac{1}{3}(3a^2 + 2ab - 8b^2)\sqrt{b(a-b)}\right](\sin\varphi - \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi).$$

Wird endlich dieses Integral zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ genommen, so folgt

$$S = \tfrac{8}{3}a^3 \arcsin\sqrt{\tfrac{b}{a}} - \tfrac{8}{9}(3a^2 + 2ab - 8b^2)\sqrt{b(a-b)}.$$

Durch Vertauschung von b mit $a - b$ ergiebt sich für den Inhalt S' des andern Cylinders über BC

$$S' = \tfrac{8}{3}a^3 \arccos\sqrt{\tfrac{b}{a}} + \tfrac{8}{9}(3a^2 - 14ab + 8b^2)\sqrt{b(a-b)};$$

daher ist

$$S + S' = \tfrac{4}{3}\pi a^3 - \tfrac{128}{9}(ab - b^2)^{\frac{3}{2}};$$

folglich ist der Rest, den beide Cylinder zusammengenommen von der Kugel übrig lassen, cubirbar, nämlich

$$\tfrac{4}{3}\pi a^3 - (S + S') = \tfrac{128}{9}(ab - b^2)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{16}{9}[2b(2a - 2b)]^{\frac{3}{2}}$$
$$= \tfrac{16}{9}(CD)^3 = \tfrac{2}{9}(DE)^3;$$

eine Erweiterung des Bossut'schen Satzes, der hieraus für $AC = BC$ folgt. Auch hinsichtlich des Inhaltes führen also die Cylinder von ungleichen Durchmessern zu ähnlichen Resultaten wie die von gleichen.

16.

Auch hier lässt sich leicht die geometrische Bedeutung der Formeln für S und S' nachweisen. Da nämlich, nach Nr. 13, (Fig. 5) $\arcsin\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2}$ arc. ang. AOD, so ist

$$\tfrac{4}{3}a^3 \arcsin\sqrt{\tfrac{b}{a}} = \tfrac{2}{3}a^3 \text{ arc. ang. } AOD = \text{Ung. } AOD,$$

wo Ung. AOD den Inhalt des Hufes bedeutet, dessen Flächenwinkel AOD.

Ferner ist

$$\frac{4}{9}(3a^2+2ab-8b^2)\sqrt{b(a-b)}$$
$$=\left[\frac{4}{9}.2b(2b-2a)-\frac{1}{3}.2a(2b-a)\right]\sqrt{2b(2b-2a)}$$
$$=\frac{4}{9}(CD)^3-\frac{1}{3}AB.CD.CO;$$

daher

$$\text{Ung. } AOD-\frac{1}{2}S=\frac{4}{9}(CD)^3-\frac{1}{3}AB.CD.CO.$$

Mithin lässt $\frac{1}{2}S$, von dem Hufe, dessen Flächenwinkel AOD, hinweggenommen, einen cubirbaren Rest.

Ebenso ergiebt sich in Beziehung auf S'

$$\text{Ung. } BOD-\frac{1}{2}S'=-\frac{4}{9}(3a^2-14ab+8b^2)\sqrt{b(a-b)}$$
$$=\frac{4}{9}(CD)^3+\frac{1}{3}AB.CD.CO.$$

Beide Reste gehen für $AC=BC$ über in $\frac{1}{18}(AB)^3$, was vervierfacht $\frac{2}{9}(AB)^3$ giebt, wie es dem Bossut'schen Satze gemäss ist.

17.

Bestimmen wir endlich nach Nr. 7, (2) den Umfang der Durchschnittscurve des Cylinders über AC mit der Kugelfläche, indem wir $c=0$ setzen, so wird, da dann $f^2=g^2=2b(a-b)$,

$$\sigma=4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\varphi\sqrt{b^2+b(a-b)\sin^2\varphi}.$$

Sei $\varphi=\frac{\pi}{2}-\psi$, so wird

$$\int d\varphi\sqrt{b^2+b(a-b)\sin^2\varphi}=-\sqrt{ab}\int d\psi\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{a}\right)\sin^2\psi}.$$

Da nun für $\varphi=0$, $\psi=\frac{\pi}{2}$, und für $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\psi=0$, so wird

$$\sigma=4\sqrt{ab}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\psi\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{a}\right)\sin^2\psi},$$

d. i. gleich dem halben Umfang einer Ellipse, deren halbe grosse Axe $=2\sqrt{ab}=AD$, (Fig. 5) und deren halbe kleine Axe $=2b=AC$; eine Erweiterung des oben (Nr. 1) erwähnten Fuss'schen Satzes.

Die Vertauschung von b mit $a-b$ giebt für den Umfang σ' der Durchschnittscurve des andern Cylinders über BC

$$\sigma'=4\sqrt{b(a-b)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\psi\sqrt{1-\frac{b}{a}\sin^2\psi}.$$

Er ist also gleich dem halben Umfang einer Ellipse, deren halbe grosse Axe $2\sqrt{a(a-b)} = BD$ und deren halbe kleine Axe $2(a-b) = BC$ ist.

Die Vergleichung beider Ellipsen zeigt sofort, dass die Summe ihrer halben kleinen Axen gleich dem Durchmesser, die Summe der Quadrate ihrer halben grossen Axen gleich dem Quadrate des Durchmessers der Kugel, die Differenz der Quadrate der halben Axen der einen derselben Differenz der andern gleich ist.

18.

Untersuchen wir die Natur dieser Durchschnittscurve näher. Wird A (Fig. 5) zum Coordinatenanfang gemacht, so ist die Gleichung des Kreises über AC, als der Projection der Curve auf die xy-Ebene,

$$(x-b)^2 + y^2 = b^2,$$

die der Kugel

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Durch Elimination von y ergeben diese Gleichungen für die Projection der Durchschnittscurve des Cylinders über AC auf die xz-Ebene

$$z^2 = 2(a-b)x,$$

die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel A, Axe AC ist, und die durch die Punkte D und E geht.

Durch Vertauschung von b mit $a-b$ ergiebt sich, wenn B zum Coordinatenanfang gemacht wird, für die Projection der Durchschnittscurve des Cylinders über BC

$$z^2 = 2bx,$$

also die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel B, Axe BC, und die ebenfalls durch C und D geht.

Eliminirt man aus den beiden obigen Gleichungen z, so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve des Cylinders über AC auf die yz-Ebene, oder auf die ihr parallele Ebene durch O,

$$y^2 = \frac{z^2}{4(a-b)^2}[4b(a-b) - z^2],$$

die Gleichung einer gegen die y- und z-Axe symmetrischen Schleifenlinie, deren Knoten in O liegt und deren Axe $= 4b(a-b) = DE$ ist.

Vertauscht man b mit $a-b$ und nimmt B zum Coordinatenanfang, so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve des Cylinders

über BC auf die jetzt durch B gehende yz-Ebene, oder die ihr parallele Ebene durch O,

$$y^2 = \frac{z^2}{4b^2}[4b(a-b) - z^2],$$

die Gleichung einer Schleifenlinie derselben Art wie die vorige, deren Knoten in O liegt, deren Axe ebenfalls $= 4b(a-b) = DE$ ist, deren der y-Axe parallele Ordinaten aber zu denen der ersteren Schleifenlinie im Verhältniss $a-b:b$ stehen.

Hieraus erhellt nun zwar schon, dass diese Durchschnittscurven die Form von sphärischen Schleifenlinien haben, die für $b = \frac{a}{2}$ in die oben (Nr. 3) erörterte Curve übergehen. Indess lässt sich auch von ihnen nachweisen, dass sie durch Bewegung eines Punktes auf der Kugelfläche erzeugt werden können.

19.

Seien nämlich x, y, z die vom Mittelpunkte aus genommenen Coordinaten eines Punktes M (Fig. 1) der Kugelfläche; sei ferner der Winkel, den eine durch diesen Punkt und die z-Axe gelegte Ebene, welche eine Meridianebene heissen kann, mit der xz-Ebene macht, oder die Länge des Punktes $M, = \vartheta$; die Neigung endlich des Radius OM gegen die xy-Ebene, oder die Breite des Punktes $M, = \psi$, so ist, wenn der Halbmesser der Kugel $= r$,

$$x = r\cos\vartheta\cos\psi; \quad y = r\sin\vartheta\cos\psi; \quad z = r\sin\psi.$$

Es werde nun die Curve gesucht, welche der Punkt M beschreibt, wenn der Sinus seiner Breite zum Sinus seiner Länge in einem constanten Verhältniss $m:1$ steht, so dass also

$$\sin\psi = m\sin\vartheta.$$

Dann ist

$$x^2 = r^2\cos^2\vartheta(1 - m^2\sin^2\vartheta);$$
$$y^2 = r^2\sin^2\vartheta(1 - m^2\sin^2\vartheta);$$
$$z^2 = r^2 m^2\sin^2\vartheta.$$

Daher sind die Gleichungen der Projectionen der Curve auf die drei Coordinatenebenen

$$(x^2+y^2)^2 = r^2(x^2+y^2-m^2y^2);$$
$$m^2r^2x^2 = (r^2-z^2)(m^2r^2-z^2);$$
$$m^2r^2y^2 = z^2(r^2-z^2).$$

Setzt man nun

$$r = 2\sqrt{b(a-b)} \quad \text{und } m = \sqrt{\frac{a-b}{b}},$$

so wird aus der letzten von vorstehenden drei Gleichungen

$$y^2 = \frac{z^2}{4(a-b)^2}[4b(a-b) - z^2],$$

d. i. die Gleichung, die, nach der vorigen Nr., die Projection der Durchschnittscurve des Cylinders über AC (Fig. 5) mit der Kugelfläche vom Halbmesser a auf die durch O gelegte Coordinatenebene ausdrückt. Diese Projection ist also identisch mit der Projection der Curve, welche ein Punkt auf einer der Kugelfläche vom Halbmesser a concentrischen Kugelfläche, deren Halbmesser $= 2\sqrt{b(a-b)} = CD$, erzeugt, wenn er sich so bewegt, dass der Sinus seiner Breite zum Sinus seiner Länge immer in dem constanten Verhältniss $\sqrt{a-b} : \sqrt{b}$, d. i. $CD : AC$ steht. Legt man daher durch diesen Punkt eine Gerade, die, wie auch des Punktes Lage sich ändere, immer der x-Axe parallel bleibt, so beschreibt der Durchschnitt dieser Geraden mit der Kugelfläche vom Halbmesser a die Durchschnittscurve des Cylinders über AC mit dieser Kugelfläche.

Auf ähnliche Weise wird die Durchschnittscurve des Cylinders über BC mittels der Bewegung eines Punktes auf derselben concentrischen Kugelfläche vom Halbmesser CD beschrieben, dessen Sinus der Breite aber zum Sinus seiner Länge in dem constanten Verhältniss $\sqrt{b} : \sqrt{a-b}$, d. i. $CD : BC$ steht.

20.

Werde jetzt über einem Blatte jeder dieser beiden Schleifenlinien ein gerader Cylinder errichtet und der Inhalt desselben, so weit er von der Kugel umschlossen ist, bestimmt. Dies kann wieder nach Nr. 4, (2) geschehen, wenn man in die Gleichungen der Schleifenlinien polare Coordinaten einführt. Werde daher in

$$y^2 = \frac{z^2}{4(a-b)^2}[4b(a-b) - z^2]$$

$y = v\sin\varphi$, $z = v\cos\varphi$ gesetzt, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$v = \frac{2}{\cos^2\varphi}\sqrt{(a-b)[a\cos^2\varphi - (a-b)]};$$

woraus folgt

$$(a^2 - v^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{[2(a-b) - a\cos^2\varphi]^3}{\cos^6\varphi}.$$

Hiernach wird

$$\int d\varphi\,(a^2-v^2)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{8}{15}(a-b)^3\left(\frac{3}{\cos^5\varphi}+\frac{4}{\cos^3\varphi}+\frac{8}{\cos\varphi}\right)\sin\varphi$$
$$-4a(a-b)^2\left(\frac{1}{\cos^3\varphi}+\frac{2}{\cos\varphi}\right)\sin\varphi$$
$$+6a^2(a-b)\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}-a^3\varphi\,.$$

Da nun für $v=0$, $\cos\varphi=\sqrt{\frac{a-b}{a}}$, so ist $\varphi=\arccos\sqrt{\frac{a-b}{a}}$ $=\arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}$ der Werth von μ in Nr. 4, (2). Hiernach ist nun

$$\tfrac{2}{3}\int_0^{\mu} d\varphi\,(a^2-v^2)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{4}{45}(15a^2-20ab+32b^2)\sqrt{b(a-b)}-\tfrac{2}{3}a^3\arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}\,.$$

Wird dieser Werth von $\frac{2}{3}\mu a^3=\frac{2}{3}a^3\arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}$ abgezogen, so erhält man den Werth von S in Nr. 4, (2). Da derselbe aber nur den Inhalt des halben Cylinders ausdrückt (indem die Formel sich auf die Curve *CMD* in Fig. 2 bezieht, die bloss oberhalb *AB* liegt), so ist dieser Werth zu verdoppeln. Hierdurch ergiebt sich für den Inhalt des Cylinders über dem g a n z e n Blatt der Schleifenlinie, der zur bessern Unterscheidung von S durch S_1 bezeichnet werden mag,

$$S_1=\tfrac{8}{3}a^3\arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}-\tfrac{8}{45}(15a^2-20ab+32b^2)\sqrt{b(a-b)}\,.$$

Durch Vertauschung von b mit $a-b$ ergiebt sich für die andere Schleifenlinie, deren Gleichung $y^2=\frac{z^2}{4b^2}[4b(a-b)-z^2]$ war, der Inhalt S_1' eines ihrer Blätter, nämlich

$$S_1'=\tfrac{8}{3}a^3\arccos\sqrt{\frac{b}{a}}-\tfrac{8}{45}(27a^2-44ab+32b^2)\sqrt{b(a-b)}\,.$$

Demnach ist

$$S_1+S_1'=\tfrac{4}{3}\pi a^3-\tfrac{16}{45}(21a^2-32ab+32b^2)\sqrt{b(a-b)}\,;$$

folglich ist der Rest, den beide Cylinder zusammengenommen von der Kugel übrig lassen, cubirbar, nämlich

$$\tfrac{4}{3}\pi a^3-(S_1+S_1')=\tfrac{16}{45}(21a^2-32ab+32b^2)\sqrt{b(a-b)}\,.$$

Für $b=\frac{a}{2}$ wird dieser Rest $=\frac{104}{45}a^3$, übereinstimmend mit Nr. 8.

Von den im Vorstehenden bestimmten zwei Cylindern kann der zweite, dessen Inhalt S_1', offenbar auch als die Summe der beiden Cylinder angesehen werden, die zwischen den beiden Blättern der sphärischen Schleifenlinie über *BD* und *BE* und ihren Projectionen auf die durch *O* gehende *yz*-Ebene liegen. Aehnliches lässt sich aber für den

Inhalt S_1 des zuerst bestimmten Cylinders nachweisen. Denkt man sich nämlich von jedem Punkte dės durch die sphärische Schleifenlinie über AD eingeschlossenen Theils der Kugelfläche eine Senkrechte auf die yz-Ebene gezogen, so fallen diese Senkrechten zum Theil auf die linke, zum Theil auf die rechte Seite dieser Ebene und sind daher theils positiv, theils negativ zu nehmen. Es sind daher auch die ihnen zugehörigen Elementarprismen, deren Summe den cylindrischen Körper bildet, welcher zwischen der Fläche der sphärischen Schleifenlinie über AD und ihrer Projection auf die yz-Ebene liegt, theils positiv, theils negativ. Einem jeden negativen Prisma entspricht aber auf der andern Seite der yz-Ebene ein gleich grosses positives; daher heben sich in der Summe diese entgegengesetzten Prismen auf und bleibt als Inhalt des erwähnten cylindrischen Körpers eine Summe positiver Elementarprismen übrig, die dem Inhalt eines auf der ebenen Schleife über Od (der Projection der sphärischen über AD) errichteten, ganz auf die linke Seite der yz-Ebene fallenden geraden Cylinders gleich ist. Dasselbe gilt von dem cylindrischen Körper zwischen der sphärischen Schleifenfläche über AE und ihrer Projection auf die yz-Ebene. Hiernach kann also auch der Inhalt S_1 des zuvor bestimmten Cylinders als die Summe der cylindrischen Körper angesehen werden, die zwischen den beiden Blättern der sphärischen Schleifenlinie über AD und AE und ihren Projectionen auf die durch O gehende yz-Ebene liegen.

Es lässt sich übrigens nach dem, was oben in Nr. 4 im Allgemeinen bei Formel (2) gesagt ist, leicht übersehen, dass S_1 und S'_1 von hufförmigen Kugelausschnitten eingeschlossen werden, deren Flächenwinkel $= 2\mu$, und von denen nach Hinwegnahme von S_1 und S'_1 cubirbare Räume übrig bleiben.

21.

Werde endlich auch über jeder der beiden Parabeln DAE, DBE (Fig. 5), deren Gleichungen, nach Nr. 18, $z^2 = 2(a - b)x$ und $z^2 = 2bx$ sind, eine gerade Cylinderfläche errichtet und der Inhalt des Körpers bestimmt, der von ihr, der Kugel und einer durch DE gehenden, auf den Ebenen der Parabel senkrechten Ebene begrenzt wird. Da für die erste dieser Gleichungen A der Coordinatenanfang ist, so muss als Gleichung der Kugel

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

zum Grunde gelegt werden. Diese giebt

$$\int y dz = \tfrac{1}{2} z \sqrt{2ax - x^2 - z^2} + \tfrac{1}{2}(2ax - x^2) \arcsin \frac{z}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Wird dieses Integral zwischen den Grenzen $z = -\sqrt{2(a-b)x}$ und $z = +\sqrt{2(a-b)x}$ genommen, so kommt

$$\sqrt{2(a-b)x}.\sqrt{2b-x} + (2ax - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{2(a-b)}{2a-x}},$$

was weiter nach x zu integriren und von $x = 0$ bis $x = 2b$ zu nehmen ist. Es findet sich aber nach gehöriger Reduction

$$\int x dx \sqrt{2b-x} = -\tfrac{2}{15}(4b + 3x)(2b - x)^{\frac{3}{2}};$$

daher

$$\sqrt{2(a-b)} \int_0^{2b} x dx \sqrt{2b-x} = \tfrac{32}{15} b^2 \sqrt{b(a-b)}.$$

Sei ferner $\frac{2(a-b)}{2a-x} = \sin^2 \xi$, so wird

$$\int dx (2ax - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{2(a-b)}{2a-x}} = 16(a-b)^2 \int \left(\frac{b - a\cos^2 \xi}{\sin^7 \xi}\right) \xi d \sin \xi.$$

Es ist aber weiter

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{b - a\cos^2\xi}{\sin^7\xi}\right) \xi d\sin\xi &= a\int \frac{\xi d\sin\xi}{\sin^5\xi} - (a-b)\int \frac{\xi d\sin\xi}{\sin^7\xi} \\ &= \tfrac{1}{6}(a-b)\left[\frac{\xi}{\sin^6\xi} - \int \frac{d\xi}{\sin^6\xi}\right] - \tfrac{1}{4} a \left[\frac{\xi}{\sin^4\xi} - \int \frac{d\xi}{\sin^4\xi}\right] \\ &= \tfrac{1}{6}(a-b)\left[\frac{\xi}{\sin^6\xi} + \tfrac{1}{15}\left(\frac{3}{\sin^4\xi} + \frac{4}{\sin^2\xi} + 8\right)\cot\xi\right] \\ &\quad - \tfrac{1}{4} a \left[\frac{\xi}{\sin^4\xi} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin^2\xi} + 2\right)\cot\xi\right].\end{aligned}$$

Wird nun dieses Integral von $x = 0$ bis $x = 2b$, d. i. von $\xi = \arcsin \sqrt{\frac{a-b}{a}} = \arccos \sqrt{\frac{b}{a}} = \operatorname{arc\,cot} \sqrt{\frac{b}{a-b}}$ bis $\xi = \frac{\pi}{2}$ genommen, so ergiebt sich nach Hinzufügung des Factors $16(a-b)^2$

$$\begin{aligned}\int_0^{2b} dx (2ax - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{2(a-b)}{2a-x}} &= \tfrac{4}{45}(15a^2 + 10ab - 16b^2)\sqrt{b(a-b)} \\ &+ \tfrac{4}{3} a^3 \arccos \sqrt{\frac{b}{a}} - \tfrac{2}{3}\pi(a + 2b)(a-b)^2.\end{aligned}$$

Wird dieser Ausdruck zu dem bereits gefundenen des ersten Integrals, $\frac{32}{15} b^2 \sqrt{b(a-b)}$, addirt, so erhält man für den Inhalt des gesuchten Körpers, der durch S_2 bezeichnet werde, nach Verdoppelung der Summe,

$$\begin{aligned}S_2 = \tfrac{8}{45}(15a^2 + 10ab + 8b^2)\sqrt{b(a-b)} + \tfrac{8}{3} a^3 \arccos \sqrt{\frac{b}{a}} \\ - \tfrac{4}{3}\pi(a + 2b)(a-b)^2.\end{aligned}$$

Durch Vertauschung von b mit $a - b$ erhält man für den cylindrischen Körper S'_2 über der andern Parabel

$$S'_2 = \frac{8}{45}(33a^2 - 26ab + 8b^2)\sqrt{b(a-b)} + \frac{8}{3}a^3 \arcsin\sqrt{\frac{b}{a}} \\ - \frac{4}{3}\pi(3a - 2b)b^2.$$

Hieraus folgt für die Summe beider Räume

$$S_2 + S'_2 = \frac{128}{45}(3a^2 - ab + b^2)\sqrt{b(a-b)},$$

also ein cubirbarer Raum. Für $b = \frac{a}{2}$ geht dieser Ausdruck über in $\frac{176}{45}a^3$ oder, wenn $2a = \delta$, in $\frac{22}{45}\delta^3$, wie in Nr. 9 gefunden wurde.

22.

Es ist auch hier, wie in Nr. 10, zu beachten, dass die parabolischen Grundflächen der eben bestimmten Körper nicht die Projectionen der Flächen der beiden sphärischen Schleifenlinien, sondern die Reste sind, welche deren Projectionen (die von den Zweigen der Parabeln und dem Umfang des grössten Kreises $ADBE$ (Fig. 5) eingeschlossen werden) von den Kreissegmenten DAE, DBE übrig lassen. Daher ist auch der Werth von $S_2 + S'_2$ in der vorigen Nummer als der Rest zu betrachten, welchen die auf den Projectionen selbst errichteten cylindrischen Körper zusammen vom Inhalte der Kugel übrig lassen.

Bezeichnen wir nun den in Nr. 15 gefundenen Rest des Kugelinhaltes, den die Cylinder über den ungleichen Kreisen zusammen übrig lassen, durch R_0, ferner den Rest, der in Nr. 20 für die Cylinder über den beiden Schleifenlinien gefunden wurde, durch R_1, endlich den Rest in der vorigen Nummer $S_2 + S'_2$ durch R_2, so ist

$$R_0 = \frac{128}{9}(ab - b^2)\sqrt{b(a-b)};$$
$$R_1 = \frac{16}{45}(21a^2 - 32ab + 32b^2)\sqrt{b(a-b)};$$
$$R_2 = \frac{128}{45}(3a^2 - ab + b^2)\sqrt{b(a-b)}.$$

Addirt man alle drei, so ergiebt sich

$$R_0 + R_1 + R_2 = 16a^2\sqrt{b(a-b)} \\ = (AB)^2 . DE;$$

eine Erweiterung des in Nr. 10 gefundenen Satzes, der für $b = \frac{a}{2}$ daraus folgt. Nach Nr. 12 ergiebt sich auch

$$R_0 + R_1 + R_2 = a\,[4\pi a^2 - (\mathfrak{S} + \mathfrak{S}')].$$

23.

Um die Parallele zu der einfacheren Untersuchung in Nr. 8 bis 11 zu vollenden, können wir noch den Inhalt der Kugelsectoren K und K' bestimmen, welche die Blätter der sphärischen Schleifenlinien $\frac{1}{2}\mathfrak{S}$ und $\frac{1}{2}\mathfrak{S}'$ in Nr. 12 zur Basis haben. Offenbar ist

$$K = \tfrac{1}{6}a\mathfrak{S} = \tfrac{3}{4}a^2\left(a\,.\,\text{arc sin}\sqrt{\tfrac{b}{a}} - \sqrt{b(a-b)}\right);$$
$$K' = \tfrac{1}{6}a\mathfrak{S}' = \tfrac{4}{3}a^2\left(a\,.\,\text{arc cos}\sqrt{\tfrac{b}{a}} - \sqrt{b(a-b)}\right).$$

Diese Kugelsectoren werden aber von den Hälften der in Nr. 15 betrachteten Cylinder S, S' umschlossen. Vermöge der dort erhaltenen Ausdrücke ergeben sich als die Reste, welche die Kugelsectoren von den Hälften dieser Cylinder übrig lassen,

$$\tfrac{1}{2}S - K = \tfrac{8}{9}(4b - a)\,b\sqrt{b(a-b)};$$
$$\tfrac{1}{2}S' - K' = \tfrac{8}{9}(3a - 4b)(a-b)\sqrt{b(a-b)}.$$

Diese Reste sind also cubirbare Räume und gehen für $b = \frac{a}{2}$ in $\frac{2}{9}a^3$ über, was mit Nr. 11 übereinstimmt.

Da ferner, nach Nr. 16,

$$\text{Ung}.AOD - \tfrac{1}{2}S = \tfrac{4}{9}(3a^2 + 2ab - 8b^2)\sqrt{b(a-b)},$$
$$\text{Ung}.BOD - \tfrac{1}{2}S' = -\tfrac{4}{9}(3a^2 - 14ab + 8b^2)\sqrt{b(a-b)},$$

so folgt

$$\text{Ung}.AOD - K = \text{Ung}.BOD - K' = \tfrac{4}{3}a^2\sqrt{b(a-b)} = \tfrac{1}{6}(AB)^2.\,CD;$$

welcher Werth für $b = \frac{a}{2}$, für den Ung. AOD = Ung. $BOD = \frac{1}{3}\pi a^3$ wird, in $\frac{1}{12}(AB)^3 = \frac{2}{3}a^3$ übergeht, wie ebenfalls schon in Nr. 11 gefunden wurde.

Da es solcher Kugelsectoren vier giebt, die von den hufförmigen Kugelausschnitten umschlossen werden, deren Flächenwinkel AOD, AOE, BOD, BOE sind, diese Kugelausschnitte aber zusammengenommen die Kugel geben, so folgt auch, dass die Reste, welche die vier Kugelsectoren vom Inhalte der Kugel übrig lassen, zusammengenommen $\frac{2}{3}(AB)^2.\,CD = \frac{1}{3}(AB)^2.\,DE$ betragen, was nach der vorigen Nummer $= \frac{1}{3}(R_0 + R_1 + R_2)$ ist.

24.

Noch einmal zur Viviani'schen Auflösung zurückkehrend, können wir die Frage aufwerfen, ob sich statt des kreisförmigen Cylinders nicht auch elliptische finden lassen, die der Aufgabe Genüge leisten. Da der Durchmesser eines solchen Cylinders gegeben, nämlich $= a$ ist, so ist $\frac{1}{2}a$ eine halbe Axe der elliptischen Basis desselben. Setzen wir nun die andere halbe Axe $= \frac{1}{2}b$ und lassen vor der Hand unbestimmt, welche von beiden die grössere ist, so wird die Gleichung des Cylinders oder seiner Basis, wenn auch hier der Mittelpunkt des grössten Kreises, auf dessen Ebene der Cylinder steht, der Coordinatenanfang ist,

$$y^2 = \frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Bezeichnet nun $\mathfrak{S}$, wie in dem Vorigen, die gesuchte Fläche, so ist

$$\mathfrak{S} = \int_0^a dx \int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}},$$

wo $y_1 = -\frac{b}{a}\sqrt{ax - x^2}$ und $y_2 = +\frac{b}{a}\sqrt{ax - x^2}$. Substituirt man nun in dieser Formel die aus der Gleichung der Kugel, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, sich ergebenden Werthe von $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, so erhält man

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}} = 2a \arcsin\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right).$$

Sei $\frac{b}{a}\sqrt{\frac{x}{a+x}} = \sin\xi$, also $x = \frac{a^3 \sin^2\xi}{b^2 - a^2\sin^2\xi}$, mithin $dx = \frac{a^3 b^2 d.\sin^2\xi}{(b^2 - a^2\sin^2\xi)^2}$, so wird

$$\begin{aligned} 2a\int dx \arcsin\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right) &= 2a^4 b^2 \int \frac{\xi\, d.\sin^2\xi}{(b^2 - a^2\sin^2\xi)^2} \\ &= 2a^2 b^2 \left\{\frac{\xi}{b^2 - a^2\sin^2\xi} - \int \frac{d\xi}{b^2 - a^2\sin^2\xi}\right\} \\ &= 2a^2 b^2 \left\{\frac{\xi}{b^2 - a^2\sin^2\xi} - \int \frac{d.2\xi}{2b^2 - a^2 + a^2\cos 2\xi}\right\}. \end{aligned}$$

Dieses letztere Integral giebt, mit Weglassung der willkürlichen Constante, wenn $b > a$,

$$\frac{1}{b\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.\operatorname{tg}\xi\right);$$

wenn $b < a$,

$$\frac{1}{2b\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{lgn}\left(\frac{b + \sqrt{a^2 - b^2}.\operatorname{tg}\xi}{b - \sqrt{a^2 - b^2}.\operatorname{tg}\xi}\right).$$

Da nun für $x = 0$, $\xi = 0$, für $x = a$, $\xi = \arcsin\left(\frac{b}{a\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{\sqrt{2a^2 - b^2}}\right)$, so ist, wenn $b > a$,

$$\mathfrak{S} = 4a^2 \arcsin\left(\frac{b}{a\sqrt{2}}\right) - \frac{2a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2a^2 - b^2}}\right);$$

wenn $b < a$,

$$\mathfrak{S} = 4\,a^2 \arcsin\left(\frac{b}{a\sqrt{2}}\right) - \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}} \lg n\left(\frac{\sqrt{2a^2-b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{2a^2-b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}\right)$$

$$= 4\,a^2 \arcsin\left(\frac{b}{a\sqrt{2}}\right) - \frac{2a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}} \lg n\left(\frac{\sqrt{3a^2-2b^2}}{a}\right).$$

Im ersten Falle ist also a die kleine, b die grosse Axe der Ellipse. Soll diese ganz innerhalb des grössten Kreises liegen, so darf b nicht grösser als $a\sqrt{2}$ sein, wo dann $\mathfrak{S}$ immer reell ist. Im andern Falle ist umgekehrt a die grosse und b die kleine Axe. In beiden Fällen wird keins von beiden Gliedern der Ausdrücke für $\mathfrak{S}$ algebraisch. Für den Grenzwerth ihrer Geltung geben sie, wie es sein muss, die Viviani'sche Auflösung. Hiernach giebt es also über dem Halbmesser des grössten Kreises keine einen Theil der Kugelfläche quadrirende Ellipse.

25.

Da, wie wir in Nr. 2 sahen, eine durch die Endpunkte von zwei auf einander senkrechten Halbmessern eines grössten Kreises gelegte Parabel unser Problem löst, so kann auch noch in Frage kommen, ob dasselbe von einer Hyperbel oder Ellipse gilt, deren Scheitel mit demjenigen von den bezeichneten Punkten, der in der x-Axe liegt, zusammenfällt, und deren halbe erste Axe beliebig gewählt werden mag. Sei diese letztere $= A$, die halbe zweite Axe $= B$, so ist die Gleichung einer Hyperbel von der angegebenen Beschaffenheit, wenn ihr Scheitel der Coordinatenanfang,

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax + x^2);$$

folglich, da für $x = a$, $y = a$ sein soll, $B^2 = \frac{A^2 a}{2A+a}$, daher, näher bestimmt,

$$y^2 = \left(\frac{a}{2A+a}\right)(2Ax + x^2).$$

Da nun für den angenommenen Coordinatenanfang die Gleichung der Kugel $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ist, so ergiebt die allgemeine Formel zu Anfang der vorigen Nr., in der jetzt

$$y_1 = -\sqrt{\frac{a(2Ax+x^2)}{2A+a}}\,; \quad y_2 = +\sqrt{\frac{a(2Ax+x^2)}{2A+a}}$$

zu setzen ist,

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}} = 2a \arcsin\sqrt{\frac{a(2A+x)}{(2A+a)(2a-x)}}.$$

Sei $\sqrt{\frac{a(2A+x)}{(2A+a)(2a-x)}} = \sin\xi$; also $x = \frac{2a[(2A+a)\sin^2\xi - A]}{a+(2A+a)\sin^2\xi}$;

$$\text{mithin } dx = \frac{2a(A+a)\,d\,[a+(2A+a)\sin^2\xi]}{[a+(2A+a)\sin^2\xi]^2};$$

so folgt

$$\int dx \int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}} = 4a^2(A+a)\int \frac{\xi\,d\,[a+(2A+a)\sin^2\xi]}{[a+(2A+a)\sin^2\xi]^2}$$

$$= 4a^2(A+a)\left\{\frac{-\xi}{a+(2A+a)\sin^2\xi} + \int \frac{d.2\xi}{2A+3a-(2A+a)\cos 2\xi}\right\}$$

$$= 4a^2(A+a)\left\{\frac{-\xi}{a+(2A+a)\sin^2\xi} + \frac{1}{\sqrt{2a(A+a)}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{2(A+a)}{a}}\,.\operatorname{tg}\xi\right)\right\}.$$

Da nun für $x=0$, $\sin\xi = \sqrt{\frac{A}{2A+a}}$; $\operatorname{tg}\xi = \sqrt{\frac{A}{A+a}}$; also $\xi = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{A}{A+a}}$, und für $x = a$, $\xi = \frac{\pi}{2}$, so ergiebt sich nach einigen Reductionen

$$\mathfrak{S} = 4a^2\left\{\sqrt{\frac{A+a}{2a}} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{2A}} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{A+a}-\sqrt{A}}{\sqrt{A+a}+\sqrt{A}}\right)\right\},$$

in welchem Ausdruck keines von beiden Gliedern für irgend welchen reellen Werth von A algebraisch wird. Es giebt also keine Hyperbel von der angenommenen Lage, die das Florentiner Problem löst.

Vertauscht man A mit $-A$, so verwandelt sich die obige Gleichung der Hyperbel in die einer Ellipse, welche durch die Endpunkte derselben auf einander senkrechten Halbmesser des grössten Kreises geht. Der Ausdruck für $\mathfrak{S}$ wird dann logarithmisch und giebt eben so wenig wie der obige eine quadrirbare Fläche. Für $A = \infty$ gehen diese Hyperbel und Ellipse in die oben gefundene Parabel über.

26.

Fuss hat die von ihm gefundenen allgemeinen Formeln für $\mathfrak{S}$ und S (vgl. Nr. 4, (2) und Nr. 5, (2)) zur Bestimmung der Durchschnittsfläche und des von der Kugel umschlossenen Inhaltes eines Cylinders angewandt, der zur Basis die in der Ebene eines grössten Kreises liegende Curve hat, deren Gleichung

$$r = a\cos n\varphi,$$

wo r den vom Mittelpunkt des Kreises auslaufenden Radiusvector und φ den Winkel bedeutet, den er mit einem als fest angenommenen Halbmesser macht. Für $n = 1$ geht diese Curve in den Kreis vom Halbmesser $\frac{1}{2}a$ über und giebt also die Viviani'sche Auflösung unsers

Problems. Allgemein wird für $\varphi = 0$, $r = a$, für $\varphi = \frac{\pi}{2n}$, $r = 0$; es ist also in den angeführten Formeln $\mu = \frac{\pi}{2n}$ zu setzen, und ergiebt sich dann

$$\mathfrak{S} = \frac{\pi a^2}{n} - \frac{2a^2}{n};$$

$$S = \frac{\pi a^3}{3n} - \frac{4}{9}\frac{a^3}{n};$$

daher ist $\frac{\pi a^2}{n} - \mathfrak{S} = \frac{2a^2}{n}$ eine quadrirbare Fläche, und $\frac{\pi a^3}{3n} - S = \frac{4}{9}\frac{a^3}{n}$ ein cubirbarer Raum, wobei zu bemerken, dass die Fläche $\frac{\pi a^2}{n}$ und der Raum $\frac{\pi a^3}{3n}$ einem hufförmigen Kreisausschnitt zukommen, dessen Flächenwinkel $\frac{\pi}{2n}$ ist. Da r durch Vertauschung von φ mit $-\varphi$ seinen Werth nicht ändert, so hat die Curve in Bezug auf die Axe, von welcher aus φ genommen wird, eine symmetrische Gestalt. Will man daher die Durchschnittsfläche mit der Kugel und den Inhalt des Cylinders bestimmen, der zur Basis die Fläche der Curve hat, die zwischen den Grenzen $\varphi = -\frac{\pi}{2n}$ und $\varphi = +\frac{\pi}{2n}$ liegt, so hat man nur die obigen Werthe von $\mathfrak{S}$ und S zu verdoppeln. Sie geben für $n = 1$ die Sätze Viviani's und Bossut's.

27.

Um den Umfang der Durchschnittslinie zu finden, die der über der Curve $r = a \cos n\varphi$ errichtete Cylinder auf der Kugelfläche hervorbringt, hat man nur diesen Werth von r in der Formel Nr. 7 (2) zu substituiren. Hierdurch ergiebt sich, da $\mu = \frac{\pi}{2n}$,

$$\sigma = a\sqrt{n^2+1}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} d\varphi \sqrt{1 - \frac{1}{n^2+1} \cdot \sin^2 n\varphi},$$

oder, wenn man $n\varphi = \psi$ setzt,

$$\sigma = a\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - \frac{1}{n^2+1} \cdot \sin^2 \psi}.$$

Dies ist der vierte Theil des Umfangs einer Ellipse, deren halbe grosse Axe $= a\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, und deren halbe kleine Axe $= a$ ist. Verdoppelt giebt dieser Ausdruck die Länge der Durchschnittslinie des Cylinders, der zur Basis die zwischen $\varphi = -\frac{\pi}{2n}$ und $\varphi = +\frac{\pi}{2n}$ enthaltene Fläche der gegebenen Curve hat. Diese ist also dem halben Umfang der bezeichneten Ellipse gleich.

Ebenso können wir nach Nr. 6, (2) die krumme Seitenfläche des über Curve errichteten Cylinders, so weit sie in der Kugel enthalten ist, bestimmen. Dieselben Substitutionen wie zuvor geben nämlich

$$\Sigma = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2n}} d\varphi \,.\, \sin n\varphi \sqrt{1 + (n^2 - 1)\sin^2 n\varphi}$$

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2n}} d\varphi \,.\, \sin n\varphi \sqrt{n^2 - (n^2 - 1)\cos^2 n\varphi}\,,$$

oder, wenn man $n\varphi = \psi$ setzt, da

$$-\int d\cos\psi \sqrt{n^2 - (n^2-1)\cos^2\psi} = -\tfrac{1}{2}\cos\psi\sqrt{n^2 - (n^2-1)\cos^2\psi}$$
$$- \frac{n^2}{2\sqrt{n^2-1}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\cos\psi\right),$$

$$\Sigma = \frac{a^2}{n}\left(1 + \frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}} \arcsin \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right)$$
$$= \frac{a^2}{n}\left(1 + \frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}} \arccos \frac{1}{n}\right).$$

Ist $n < 1$, so wird dieser Ausdruck unbrauchbar. Da jedoch $\arcsin \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$ $= \operatorname{arc\,tg} \sqrt{n^2 - 1}$, daher

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}.\sqrt{-1}\right) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{1-n^2}.\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\operatorname{lgn}\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{1-\sqrt{1-n^2}}\right)$$
$$= \sqrt{-1}\,\operatorname{lgn}\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right),$$

so wird alsdann

$$\Sigma = \frac{a^2}{n}\left[1 + \frac{n^2}{\sqrt{1-n^2}}\operatorname{lgn}\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)\right].$$

Beide Ausdrücke für Σ sind zu verdoppeln, wenn die Fläche über dem zwischen den Grenzen $\varphi = -\frac{\pi}{2n}$ und $\varphi = +\frac{\pi}{2n}$ enthaltenen Theil des Umfangs der Curve bestimmt werden soll.

Wenn $n = 1$, führen die Formeln für σ und Σ auf die Sätze von Fuss und Montucla zurück.

28.

Es würde für unsern Zweck zu weitläufig werden, wenn wir die Gestalten, die die Curve $r = a\cos n\varphi$, je nachdem n eine ganze oder gebrochene Zahl ist, haben kann, ausführlich erörtern wollten. Es mag daher nur kurz bemerkt werden, dass sie, wenn n eine ganze Zahl, die Gestalt einer sternförmigen Blume hat, von der die Anzahl der Blätter, wenn n gerade, $= 2n$, wenn n ungerade, nur n ist, und die sich in einem

Zuge beschreiben lässt, für gebrochene Werthe von n aber in spiralenförmigen Windungen von der Peripherie des Kreises nach dem Centrum läuft, dort eine Schlinge oder Spitze bildet, hierauf zur Peripherie zurückkehrt, um in einer zweiten Windung wieder durch das Centrum zu gehen und abermals eine Schlinge zu bilden u. s. f.

Hierbei mag nicht unerwähnt bleiben, dass den Fall, wo $n = \frac{1}{4}$, schon Pappus (*Collect. math. IV,* 30) untersucht und gefunden hat, dass der Theil der Fläche einer Halbkugel, der zwischen ihrem Grundkreis und einer Spirale liegt, die von einem beweglichen Punkte auf einem Quadranten während einer Umdrehung beschrieben wird, dem Quadrat des Durchmessers gleich ist; wie sich aus dem Ausdruck für $\mathfrak{S}$ in Nr. 24 sofort ergiebt, wenn $n = \frac{1}{4}$ gesetzt und, da jener Ausdruck sich auf die ganze Kugel bezieht, das Resultat halbirt wird. Den körperlichen Raum, der zwischen dieser Fläche und ihrer senkrechten Projection auf den Grundkreis liegt, giebt a. a. O. die Formel für S gleich $\frac{2}{9}$ vom Cubus des Durchmessers.

29.

Unabhängig von der Beschaffenheit der Zahl n aber lässt sich zeigen, dass die Durchschnittslinie der über der Curve $r = a \cos n\varphi$ errichteten Cylinderfläche mit der Kugelfläche nach einem sehr einfachen Gesetz durch Bewegung erzeugt werden kann, und hieraus die Mannigfaltigkeit der Gestalten, die der Gleichung $r = a \cos n\varphi$ entsprechen, übersehen. Sind nämlich x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes jener Durchschnittslinie, also x, y die Coordinaten ihrer Projection auf die xy-Ebene, d. i. der Curve $r = a \cos n\varphi$, so ist

$$x = r \cos \varphi = a \cos n\varphi \cos \varphi\,; \quad y = r \sin \varphi = a \cos n\varphi \sin \varphi\,;$$
$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = a \sin n\varphi\,.$$

Wenn nun in Fig. 1 $OQ = x$, $PQ = y$, $MP = z$, so kann, wie in Nr. 3, $\angle MOP$ die Breite, $\angle POQ$ die Länge des Punktes M auf der Kugelfläche genannt werden. Dann ist

$$\angle POQ = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \varphi\,; \quad \angle MOP = \operatorname{arc\,sin} \frac{z}{a} = n\varphi\,.$$

Bewegt sich also ein Punkt auf der Kugelfläche so, dass immer seine Breite zu seiner Länge in einem constanten Verhältniss $n : 1$ steht, so beschreibt er eine Curve, deren Projection auf die Aequatorebene die Glei-

chung $r = a \cos n\varphi$ hat und also die Florentiner Aufgabe löst. Dieses letztere gilt auch von den beiden Projectionen derselben sphärischen Curve auf den ersten und neunzigsten Meridian, deren Gleichungen für rechtwinklige Coordinaten sich aber, wegen der Schwierigkeit der Elimination von φ aus den Ausdrücken für x, y, z, nicht darstellen lassen.

30.

Dass Curven, welche durch diese Bewegung eines Punktes erzeugt werden, das Florentiner Problem lösen, hat schon Jakob Bernoulli (*Acta Erudit.* 1692, p. 370) bemerkt, ohne jedoch den Beweis mitzutheilen. Eben so kurz giebt er an, dass dasselbe von den Curven gelte, die entstehen, wenn ein Punkt auf der Kugelfläche sich so bewegt, dass der Sinus seiner Breite zum Sinus seiner Länge in einem constanten Verhältniss steht. Da wir die Gleichungen dieser Curven für rechtwinklige Coordinaten in Nr. 19 bereits gefunden haben, so würde sich aus ihnen leicht der Satz verificiren lassen. Allein wir wollen allgemeiner aus der Auflösung des Florentiner Problems, die unmittelbar nach dessen Bekanntmachung Leibniz gab (*Acta Erudit.* 1692, p. 274), in der heutigen analytischen Ausdrucksweise uns die Methode vergegenwärtigen, nach welcher der Erfinder der Infinitesimalrechnung das Problem behandelte, und durch die ohne Zweifel auch Jakob Bernoulli zu seinen Sätzen gelangte. Sie besteht im Allgemeinen darin, dass die Betrachtung nicht von der Projection der sphärischen Curve, sondern von dieser selbst ausgeht, und hierbei die Curve als durch eine Relation zwischen zwei sphärischen Coordinaten (Bogen von zwei auf einander senkrechten grössten Kreisen) gegeben vorausgesetzt wird, und führt zu sehr einfachen Resultaten.

31.

Sei nämlich (Fig. 6) $ABCD$ eine Halbkugel vom Halbmesser $OA = a$, deren Basis ADB der Aequator heissen mag; die grössten Kreise, deren Quadranten AC, CE sind, und deren Ebenen senkrecht auf einander und auf der Aequatorebene stehen, nennen wir den ersten und neunzigsten Meridian; ebenso den grössten Kreis, dessen Quadrant CLD ist, und dessen Ebene mit der ersten Meridianebene den Winkel $AOD = \mu$ macht, den μten Meridian. Sei ferner KML eine beliebige sphärische



Curve und durch einen willkürlichen Punkt M in ihr der Quadrant CMP gezogen. Zieht man überdies den Halbmesser OM, setzt den Winkel MOP, oder die Breite des Punktes M, $= \psi$, den Winkel POA, oder die Länge von M, $= \varphi$, so ist durch die gegebene Relation zwischen ψ und φ die Natur der sphärischen Curve bestimmt. Sei nun M' ein nächstbenachbarter Punkt von M in der Curve KL, durch welchen der Quadrant $CM'P'$ gelegt werde; seien weiter Mm und $M'm'$ Bogen von Parallelkreisen, als deren gemeinsamer Halbmesser $QM = ON = a \cos\psi$ angesehen werden kann, so ist $Mm = a \cos\psi\, d\varphi$, $Mm' = a\, d\psi$, daher das sphärische Flächenelement $MmM'm' = a^2 \cos\psi\, d\psi\, d\varphi$, folglich das sphärische Elementarviereck

$$PP'M'M = a^2\int \cos\psi\, d\psi\, d\varphi = a^2 \sin\psi\, d\varphi,$$

wo die Grenzen dieses Integrals Null und diejenige Function von φ sind, welche die Abhängigkeit der sphärischen Ordinate ψ von ihrer zugehörigen Abscisse φ ausdrückt. Integrirt man nun noch einmal in Bezug auf φ und nimmt das Integral zwischen den Grenzen 0 und μ, so erhält man den Flächeninhalt $\mathfrak{S}$ des sphärischen Vierecks $AKLD$, welches von der gegebenen sphärischen Curve, dem 1sten und μten Meridian und dem Aequator begrenzt wird, und ergiebt sich also

$$\mathfrak{S} = a^2\int_0^\mu \sin\psi\, d\varphi\,.$$

Wird nun zwischen ψ und φ eine solche Relation angenommen, dass dieses Integral einen algebraischen Ausdruck giebt, so entspricht die sphärische Curve dem Florentiner Problem, und ist das sphärische Viereck $AKLD$ eine quadrirbare Fläche.

32.

Offenbar ist nun die einfachste Annahme dieser Art $\psi = \varphi$, die nach Nr. 3 zur Viviani'schen Auflösung führt. Fast ebenso einfach giebt die Annahme $\psi = n\varphi$, $\int \sin\psi\, d\varphi = \frac{1}{n}\int \sin n\varphi\, d.n\varphi = -\frac{1}{n}\cos n\varphi$, woraus, für $\mu = \frac{\pi}{2n}$, $\mathfrak{S} = \frac{1}{n}a^2$ folgt, was mit dem in Nr. 26 erhaltenen Resultat, unter Berücksichtigung der Bedeutung, die dort $\mathfrak{S}$ hat, übereinstimmt. Setzen wir ferner, nach Bernoulli's Angabe, $\sin\psi = n \sin\varphi$, so wird ebenso einfach wie in der Viviani'schen Auflösung $\int \sin\psi\, d\varphi = -n \cos\varphi$, daher für $\mu = \frac{\pi}{2}$ (was jedoch voraussetzt, dass n nicht grösser als 1 sei, da, für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\sin\psi = n$),

$\mathfrak{S} = na^2$, oder für $\mu = \arcsin\frac{1}{n} = \arccos\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$, wo $n > 1$ sein muss, $\mathfrak{S} = a^2(n - \sqrt{n^2 - 1})$.

Setzt man ferner $\cos\psi = m\cos\varphi$, wo, da, für $\varphi = 0$, $\cos\psi = m$, $m \leqq 1$ sein muss, so wird

$$\int \sin\psi\, d\psi = \int d\varphi \sqrt{1 - m^2\cos^2\varphi},$$

d. i., wenn $\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega$ gesetzt wird,

$$-\int d\omega \sqrt{1 - m^2\sin^2\omega},$$

folglich, da für $\varphi = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, und für $\varphi = \mu = \frac{\pi}{2}$, $\omega = 0$,

$$\mathfrak{S} = a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \sqrt{1 - m^2\sin^2\omega},$$

was das Rechteck aus dem Halbmesser a in den vierten Theil des Umfangs einer Ellipse ausdrückt, deren halbe grosse Axe $= a$, und deren halbe kleine Axe $= a\sqrt{1 - m^2}$ ist; so dass also unter dieser Voraussetzung keine quadrirbare Fläche sich ergiebt.

Sei $\operatorname{tg}\psi = n \operatorname{tg}\varphi$, so wird

$$\int \sin\psi\, d\varphi = \int \frac{n \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 + n^2\operatorname{tg}^2\varphi}} = \int \frac{-d\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{n^2-1}{n}\right)\cos^2\varphi}}.$$

Dies giebt, integrirt und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ genommen, für $n > 1$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right);$$

für $n < 1$

$$\frac{n}{\sqrt{1-n^2}} \operatorname{lgn}\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right);$$

führt also in beiden Fällen zu keiner quadrirbaren Fläche.

Leibniz's Auflösung hat eine etwas weniger einfache Form als die in der vorigen Nr. gefundene. Für die Form seiner Auflösung ist die einfachste Annahme $\sin\psi = 1 - \sin\varphi$. Diese giebt, wenn $\mu = \frac{\pi}{2}$,

$$\mathfrak{S} = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

so dass der Rest, den diese Fläche vom achten Theil der Kugelfläche übrig lässt, $= a^2$, also quadrirbar ist. Dieser Rest ist der Inhalt einer halbmondähnlichen Figur (*lunula sphaerica* oder *carbasus*, wie sie Leibniz nennt) über dem Quadranten des 90sten Meridians, indess in der Viviani'schen Auflösung nicht eine solche Figur, sondern der Rest, den sie vom Octanten der Kugelfläche übrig lässt, quadrirbar sein soll. Leibniz fand also eigentlich eine andere, obwohl ebenso richtige Auf-

lösung, bei der jedoch die *fenestrae templi almae geometriae* eine Gestalt haben, die diese Benennung nicht rechtfertigen würde. Leibniz bemerkt zugleich, dass auch allgemeiner $\sin\psi = 1 - n \sin\varphi$ der Aufgabe Genüge leistet. In der That giebt diese Annahme $\mathfrak{S} = a^2\left(\frac{\pi}{2} - n\right)$ also den Rest $\frac{\pi}{2}a^2 - \mathfrak{S} = na^2$.

33.

Mittels dieser sphärischen Coordinaten φ und ψ lässt sich nun auch mit gleicher Einfachheit der Inhalt S des Körpers bestimmen, der zwischen dem sphärischen Viereck $AKLD$ (Fig. 6), der Aequatorebene, der Ebene des μten Meridians und einer durch die sphärische Curve KML gelegten, auf der Aequatorebene senkrechten Cylinderfläche liegt. Offenbar ist nämlich die Neigung des in Nr. 31 betrachteten Flächenelements $MmM'm'$ gegen die Aequatorebene $= 90 - \psi$, daher die Projection dieses Elements, welches $= a^2 \cos\psi \, d\psi \, d\varphi$ gefunden wurde, $= a^2 \sin\psi \cos\psi \, d\psi \, d\varphi$. Errichtet man über dieser Projection ein senkrechtes Prisma, so ist dessen bis zur Kugelfläche reichende Höhe $MN = a \sin\psi$; daher der Inhalt dieses Prismas $= a^3 \sin^2\psi \cos\psi \, d\psi \, d\varphi$. Integrirt man nun diesen Ausdruck successiv nach ψ und φ und nimmt das erste Integral von $\psi = 0$ bis $\psi = \psi$, das zweite von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \mu$, wo μ die vorige Bedeutung hat, so ergiebt sich

$$S = \frac{1}{3} a^3 \int_0^\mu \sin^3\psi \, d\varphi .$$

Ist nun ψ eine solche Function von φ, dass dieses Integral einen algebraischen Ausdruck giebt, so ist der gesuchte Körper cubirbar. Aus dieser Formel erhält man auf kürzestem Wege für $\psi = \varphi$, $\psi = n\varphi$, $\sin\psi = \sin n\varphi$, die schon bekannten Resultate. Für $\sin\psi = n \sin\varphi$ wird

$$\int \sin^3\psi \, d\varphi = -n^3 \int (1 - \cos^2\varphi) \, d\cos\varphi = -n^3\left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right);$$

daher, wenn $\sin\mu = \frac{1}{n}$, also $\cos\mu = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$, was $n \geqq 1$ voraussetzt,

$$S = \frac{1}{9} a^3 \left[2n^3 - (2n^2 + 1)\sqrt{n^2 - 1}\right].$$

Für $\mu = \frac{\pi}{2}$ wird

$$S = \frac{2}{9} n^3 a^3 .$$

Unter Leibniz's Voraussetzung, dass $\sin\psi = 1 - n\sin\varphi$, wird

$$\int \sin^3\psi\, d\varphi = \int (1 - n\sin\varphi)^3 d\varphi = \int (1 - 3n\sin\varphi + 3n^2\sin^2\varphi - n^3\sin^3\varphi)\, d\varphi$$
$$= \varphi + 3n\cos\varphi + \tfrac{3}{2}n^2\varphi - \tfrac{3}{2}n^2\sin\varphi\cos\varphi + n^3(\cos\varphi - \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi);$$

daher, wenn $\mu = \frac{\pi}{2}$, was $n \leqq 1$ voraussetzt,

$$S = a^3\left[\left(1 + \tfrac{3}{2}n^2\right)\tfrac{\pi}{2} - 3n\left(1 + \tfrac{2}{9}n\right)\right];$$

also der Rest

$$\left(1 + \tfrac{3}{2}n^2\right)\tfrac{\pi}{2}a^3 - S = 3n\left(1 + \tfrac{2}{9}n\right)a^3$$

cubirbar.

34.

Sei ferner (Fig. 6) *HNI* die Projection der sphärischen Curve *KML* auf die Aequatorebene, so ist, da $ON = QM = a\cos\psi$ der Radiusvector dieser ebenen Curve, das Bogenelement derselben

$$NN' = \sqrt{(a\cos\psi\, d\varphi)^2 + (d.a\cos\psi)^2} = a\sqrt{\cos^2\psi\, d\varphi^2 + \sin^2\psi\, d\psi^2};$$

woraus sich für ihre Länge, die λ heisse, findet

$$\lambda = a\int_0^\mu d\varphi \sqrt{\cos^2\psi + \frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\sin^2\psi},$$

ohne dass die Gleichung der Curve gesucht zu werden braucht. Da nun $MN = a\sin\psi$, so ist das Element $NN'mM$ der Cylinderfläche, welche die ebene Curve zur Basis hat, $= a^2\sin\psi\, d\varphi\sqrt{\cos^2\psi + \frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\sin^2\psi}$; folglich die Cylinderfläche Σ, welche von der Aequatorebene, der 1sten und μten Meridianebene und der Kugelfläche begrenzt wird, bestimmt durch die Gleichung

$$\Sigma = a^2\int_0^\mu \sin\psi\, d\varphi\sqrt{\cos^2\psi + \frac{d\psi^2}{d\varphi^2}\sin^2\psi}.$$

Endlich ist das Bogenelement MM' der sphärischen Curve *KML* selbst $= \sqrt{(a\cos\psi\, d\varphi)^2 + (a\, d\psi)^2}$, daher die zwischen dem 1sten und μten Meridian enthaltene Länge dieser Curve

$$\sigma = a\int_0^\mu d\varphi\sqrt{\cos^2\psi + \frac{d\psi^2}{d\varphi^2}}.$$

Setzt man den Radiusvector $ON = a\cos\psi$ der ebenen Curve *HNI*, wie früher $= v$ und substituirt $\cos\psi = \frac{v}{a}$ in den beiden vorstehenden Formeln für Σ und σ, so kommt man auf die Formeln (2) in Nr. 6 und Nr. 7 zurück. Durch dieselbe Substitution führen die Ausdrücke für $\mathfrak{S}$ und S in Nr. 31 und 33 auf die Formeln (2) in Nr. 4 und Nr. 5. — Die An-

wendung der vorstehenden Formeln auf die in den vorigen Nummern gebrauchten Beispiele giebt Integrale, die sich nur durch elliptische Functionen bestimmen lassen.

35.

Die in Nr. 31 bestimmte Fläche $\mathfrak{S} = AKLD$ (Fig. 6) kann auf die Ebene des Aequators projicirt werden. Sie giebt dann die Fläche $s = AHNIDPA$, welche zwischen den Projectionen der sphärischen Curve, KL, denen der Bogen AK und LD und dem Umfange des Aequators enthalten ist. Da nun, nach Nr. 33, die Projection des sphärischen Flächenelements $MmM'm'$ auf die Aequatorebene $= a^2 \sin\psi \cos\psi \, d\psi \, d\varphi$ ist, so giebt die successive Integration dieses Ausdrucks nach ψ und φ resp. zwischen den Grenzen $\psi = 0$, $\psi = \psi$ und $\varphi = 0$, $\varphi = \mu$,

$$s = \frac{1}{2} a^2 \int_0^\mu \sin^2\psi \, d\varphi,$$

ein Ausdruck, dessen Aehnlichkeit mit den Formeln für $\mathfrak{S}$ und S, zwischen denen er gleichsam in der Mitte steht, bemerkenswerth ist. Für $\psi = n\varphi$ giebt dieser Ausdruck, wenn $\mu = \frac{\pi}{2n}$, $s = \frac{\pi a^2}{8n}$; für $\sin\psi = n \sin\varphi$ und $\mu = \frac{\pi}{2}$, $s = \frac{1}{8}\pi n^2 a^2$.

Wird $\mathfrak{S}$ auf die Ebene des ersten Meridians projicirt, so erhält man die Fläche s', die von den Projectionen der sphärischen Curve KL und des Bogens LD, sowie dem Bogen AK und Halbmesser OA eingeschlossen wird. Die Neigung des Flächenelements $MmM'm'$ gegen die Ebene des ersten Meridians ist aber, wenn CE der 90ste Meridian, gegeben durch den Winkel MOE, der mit den Winkeln $MOP = \psi$ und $EOP = 90 - \varphi$ eine Ecke bildet, welcher ein sphärisches Dreieck entspricht, in dem die den beiden letztgenannten Winkeln zugehörigen Bogen einen rechten Winkel einschliessen. Es ist daher $\cos MOE = \cos\psi \sin\varphi$, folglich die Projection des Flächenelements auf die Ebene des ersten Meridians $= a^2 \cos^2\psi \sin\varphi \, d\psi \, d\varphi$, daher

$$s' = \frac{1}{2} a^2 \int_0^\mu (\psi + \sin\psi \cos\psi) \sin\varphi \, d\varphi .$$

Endlich ist die Neigung des Elements $MmM'm'$ gegen die Ebene des 90sten Meridians gegeben durch den Winkel MOA, und $\cos MOA = \cos\psi \cos\varphi$. Daher ist die Projection des Elements auf diese

Ebene $= a^2 \cos^2\psi \cos\varphi \, d\psi \, d\varphi$, folglich die Projection s'' der Fläche $\mathfrak{S}$ auf dieselbe

$$s'' = \frac{1}{2} a^2 \int_0^\mu (\psi + \sin\psi \cos\psi) \cos\varphi \, d\varphi .$$

36.

Zwischen der sphärischen Fläche $\mathfrak{S}$, ihrer Projection s' auf die Ebene des 1sten Meridians und den die Bogen, welche $\mathfrak{S}$ einschliessen, projicirenden Ebenen ist ein Körper enthalten, dessen Inhalt S' zu bestimmen sei. Er ergiebt sich, wie folgt. Die Projection des Elements $MmM'm'$ auf die genannte Ebene ist, nach der vorigen Nr., $= a^2 \cos^2\psi \sin\varphi \, d\psi \, d\varphi$; der Abstand des Punktes M von derselben Ebene $= a \cos MOE = a \cos\psi \sin\varphi$; folglich der Inhalt des senkrecht über der Projection des Elements errichteten, von der Kugelfläche begrenzten Prismas $= a^3 \cos^3\psi \sin^2\varphi \, d\psi \, d\varphi$. Hieraus erhält man sofort durch doppelte Integration

$$S' = \frac{1}{3} a^3 \int_0^\mu (3 - \sin^2\psi) \sin\psi \sin^2\varphi \, d\varphi .$$

Ebenso erhält man den Inhalt des Körpers S'' zwischen $\mathfrak{S}$ und seiner Projection s'' auf die Ebene des 90sten Meridians. Die Projection des Elements von $\mathfrak{S}$ auf diese Ebene war nämlich $= a^2 \cos^2\psi \cos\varphi \, d\psi \, d\varphi$. Nun ist der Abstand des Punktes M von derselben Ebene $= a \cos MOA$ $= a \cos\psi \cos\varphi$; daher der Inhalt des senkrecht über jener Projection des Elements errichteten, von der Kugelfläche begrenzten Prismas $= a^3 \cos^3\psi \cos^2\varphi \, d\psi \, d\varphi$; folglich

$$S'' = \frac{1}{3} a^3 \int_0^\mu (3 - \sin^2\psi) \sin\psi \cos^2\varphi \, d\varphi .$$

Addirt man diese beiden Formeln zu der in Nr. 33 gefundenen Formel $S = \frac{1}{3} a^3 \int_0^\mu \sin^3\psi \, d\varphi$, so erhält man das Resultat

$$S + S' + S'' = a^3 \int_0^\mu \sin\psi \, d\varphi ,$$

d. i., nach Nr. 31,

$$S + S' + S'' = a\mathfrak{S}.$$

Die Summe der drei zwischen der sphärischen Fläche $\mathfrak{S}$ und ihren drei Projectionen s, s', s'' auf die Ebenen des Aequators, des 1sten und 90sten Meridians enthal-

tenen prismatischen Körper ist also gleich einem Prisma, dessen Basis gleich der Fläche $\mathfrak{S}$, und dessen Höhe gleich dem Kugelhalbmesser a ist.

Aus diesem allgemeinen Satze lassen sich die in Nr. 10 und Nr. 22 gefundenen Resultate als specielle Fälle ableiten. In Nr. 10 nämlich haben $\frac{1}{8}R$, $\frac{1}{8}R'$, $\frac{1}{8}R''$ dieselbe Bedeutung wie hier S, S', S''. Nach Viviani's Auflösung ist aber $\mathfrak{S}$, welches hier die quadrirbare Fläche bedeutet, $= a^2$, indem dieses $\mathfrak{S}$ in jenem Falle den Rest bezeichnet, den die durch den halben Cylinder über der Basis in der Kugelfläche hervorgebrachte Oeffnung vom achten Theile derselben übrig lässt. Daher ist

$$R + R' + R'' = 8\,(S + S' + S'') = 8\,a\mathfrak{S} = 8\,a^3 = (2\,a)^3 = \delta^3.$$

Das Resultat in Nr. 22 fordert eigentlich eine doppelte Anwendung des vorstehenden Satzes, die sich aber auf eine einfache reduciren lässt. Man kann nämlich in der vorstehenden Formel $\mathfrak{S}$ dem vierten Theil des Werthes von $4\,\pi a^2 - (\mathfrak{S} + \mathfrak{S}') = 16\,a\sqrt{b\,(a - b)}$ in Nr. 12 gleichsetzen. Alsdann haben S, S', S'' resp. die Bedeutung von $\frac{1}{4}R_0$, $\frac{1}{4}R_1$, $\frac{1}{4}R_2$ in Nr. 22, und giebt die obige Formel dasselbe Resultat wie dort.

37.

Der in der vorigen Nr. gefundene Satz lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\tfrac{1}{3}\,(S + S' + S'') = \tfrac{1}{3}\,a\mathfrak{S}.$$

Es ist aber $\frac{1}{3}a\mathfrak{S}$ der Inhalt eines Kugelsectors, der zur Basis die Fläche $\mathfrak{S}$ hat. Der Satz lässt sich daher auch so ausdrücken: Das arithmetische Mittel aus dem Inhalt der drei prismatischen Körper S, S', S'', die zwischen den drei Projectionen der Fläche $\mathfrak{S}$ auf die Ebenen des Aequators, 1sten und 90sten Meridians enthalten sind, ist gleich dem Inhalt des Kugelsectors, der die Fläche $\mathfrak{S}$ zur Basis hat.

Die Sätze in Nr. 11 und Nr. 23 sind specielle Anwendungen dieser Form des Satzes. Im Uebrigen erhellt aus dem Satze in beiden Formen auch noch, dass, wenn $\mathfrak{S}$ eine quadrirbare Fläche, die Summe der drei Körper S, S', S'' ein cubirbarer Raum ist, und dass, wenn $\mathfrak{S}$ eine cubirbare Fläche und einer der drei Körper cubirbar ist, es auch die beiden andern zusammengenommen sein müssen.

Da in allen durchgeführten Beispielen zugleich $\mathfrak{S}$ quadrirbar und S cubirbar war, so wird es nicht überflüssig sein, zu bemerken, dass keins von beiden nothwendig aus dem andern folgt. Sei z. B. $\sin\psi = \frac{1}{1+\varphi}$, so dass also für $\varphi = 0$, $\sin\psi = 1$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, und für $\varphi = 1$, $\sin\psi = \frac{1}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{6}$, so wird, da $\int \sin\psi\, d\varphi = \lg n\,(1+\varphi)$, $\mathfrak{S} = a^2 \lg n\, 2$ und ist also nicht quadrirbar Dagegen ist, da $\int \sin^3\psi\, d\varphi = -\frac{1}{2(1+\varphi)^2}$; $S = \frac{1}{3}a^3(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}) = \frac{1}{8}a^3$, also cubirbar. Sei dagegen $\sin\psi = \frac{1}{(1+\varphi)^{\frac{1}{3}}}$, so dass für $\varphi = 0$, ebenfalls $\sin\psi = 1$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, und für $\varphi = 7$, $\sin\psi = \frac{1}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{6}$, so ist, da jetzt $\int \sin\psi\, d\varphi = \frac{3}{2}(1+\varphi)^{\frac{2}{3}}$, $\mathfrak{S} = \frac{3}{2}(4-1)a^2 = \frac{9}{2}a^2$, also quadrirbar. Dagegen ist $\int \sin^3\psi\, d\varphi = \lg n\,(1+\varphi)$, folglich $S = \frac{1}{3}a^3.\lg n\, 8 = a^3 \lg n\, 2$, also nicht cubirbar.

38.

Es lässt sich leicht zeigen, dass der gerade Cylinder eine der so eben für die Kugel gefundenen Relation ganz ähnliche Eigenschaft besitzt.

Sei (Fig. 7) $OA = a$ der Halbmesser des Cylinders, KML eine beliebige Curve auf seiner Oberfläche, $MP = z$ und LD senkrecht auf der Grundebene, OP und OD gezogen, $AOP = \varphi$, $AOD = \mu$, so ist, wenn $\mathfrak{S}$ die Fläche des Vierecks $AKLD$ auf der Cylinderfläche bezeichnet und z als Function von φ gegeben ist,

$$\mathfrak{S} = a\int_0^\mu z\, d\varphi.$$

Projicirt man diese Fläche auf die durch OA und die Axe des Cylinders OC gelegte Ebene AOC, so erhält man einen prismatischen Körper, dessen Inhalt $= S'$ sei. Die Neigung des Elements der Cylinderfläche $az\, d\varphi$ gegen diese Ebene ist $= 90 - \varphi$, daher die Fläche der Projection des Elements auf dieselbe $= az \sin\varphi\, d\varphi$. Der Abstand des Punktes M von derselben Ebene ist aber $= a \sin\varphi$, daher das prismatische Element von $S' = a^2 z \sin^2\varphi\, d\varphi$, folglich

$$S' = a^2\int_0^\mu z \sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Sei ebenso S'' der Inhalt des prismatischen Körpers, der durch Projection der Fläche $\mathfrak{S}$ auf die Ebene $FOCG$ entsteht, welche senkrecht auf der Ebene $AOCE$ ist. Da die Neigung des Elements der Cylin-

derfläche gegen diese Ebene $= \varphi$, und der Abstand des Punktes M von derselben $= a \cos\varphi$, so ist offenbar

$$S'' = a^2 \int_0^\mu z \cos^2\varphi \, d\varphi .$$

Hieraus folgt, dass

$$S' + S'' = a^2 \int_0^\mu z \, d\varphi = a\mathfrak{S}.$$

Der dritte, im Vorigen mit S bezeichnete Körper ist hier nicht vorhanden, da die Projection von $\mathfrak{S}$ auf die Grundebene keine Fläche, sondern nur den Bogen $AD = a\varphi$ giebt, zwischen welchem und der Curve KML die Fläche $\mathfrak{S}$ selbst liegt.

Beispielsweise sei $z = a\sqrt{2}.\sin\frac{1}{2}\varphi$, welche Gleichung stattfindet, wenn KL eine Curve ist, die auf die Ebene $AOCB$ projicirt eine Parabel giebt, deren Scheitel A, Hauptaxe AO und Parameter $= a$ ist. Hieraus folgt, wenn $\mu = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, sofort

$$\mathfrak{S} = 2a^2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\tfrac{1}{2}\varphi \, d.\tfrac{1}{2}\varphi = 2a^2(\sqrt{2}-1).$$

Ferner ist

$$S' = -8a^3\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi - \cos^4\tfrac{1}{2}\varphi)\, d\cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$= \frac{2a^3}{15}(8\sqrt{2} - 7);$$

$$S'' = -2a^3\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (4\cos^4\tfrac{1}{2}\varphi - 4\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi + 1)\, d\cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$= \frac{2a^3}{15}(7\sqrt{2} - 8);$$

also

$$S' + S'' = 2a^3(\sqrt{2} - 1) = a\mathfrak{S}.$$

39.

Untersuchen wir jetzt in derselben Beziehung den geraden Kegel. Sei (Fig. 8) $CA = b$ der Halbmesser seiner Basis ADB, OC seine Axe, durch die Spitze desselben, O, parallel zu CA, OX und, senkrecht auf OX, OY gezogen; ferner OP eine beliebige Seitenlinie des Kegels und M ein willkürlicher Punkt in ihr, KML eine durch M gehende beliebige konische Curve, HNI ihre senkrechte Projection auf die Ebene XOY. Sei ferner $\angle ACP = \angle XON = \varphi$, und $OM = \rho$, so ist die Curve KML gegeben, wenn ρ eine gegebene Function von φ ist. Wenn nun M' ein

M nächstbenachbarter Punkt der Curve, N' dessen Projection auf die Ebene XOY ist, und man zieht $OM'P'$ und CP', so ist $\angle PCP' = \angle NON' = d\varphi$. Ist ferner MQ senkrecht auf OC, wird mit MQ als Halbmesser aus Q der Bogen Mm eines Parallelkreises zur Basis beschrieben, und ist $M'm'$ ebenfalls ein solcher Bogen, so wird $Mm' = d\varrho$, und stellt das Viereck $MmM'm'$ ein Element der Fläche des Kegels dar. Ist nun noch $\angle AOC = \angle POC = \alpha$ gegeben, so ist $MQ = \varrho \sin\alpha$, daher $Mm = \varrho \sin\alpha \,.\, d\varphi$, folglich $MmM'm' = \varrho \sin\alpha \,.\, d\varrho\, d\varphi$; mithin die Fläche $MM'O = \frac{1}{2}\varrho^2 \sin\alpha\, d\varphi$. Ist nun $\angle ACD = \angle XOI = \mu$ gegeben, und wird der von der konischen Curve KML und den Seitenlinien OK, OL begrenzte Theil der Kegelfläche durch $\mathfrak{S}$ bezeichnet, so folgt aus dem Vorstehenden

$$\mathfrak{S} = \tfrac{1}{2}\sin\alpha \int_0^\mu \varrho^2\, d\varphi\,.$$

Da $ON = QM = \varrho \sin\alpha$, so drückt $\frac{1}{2}\sin^2\alpha \int_0^\mu \varrho^2\, d\varphi$ die Fläche $HOINH$ der Projection der konischen Curve auf die Grundebene aus. Bezeichnen wir diese Fläche durch s, so ist also $\mathfrak{S} = \frac{s}{\sin\alpha}$. Ist daher s quadrirbar, so ist es auch der senkrecht über ihr liegende Theil der Kegelfläche $\mathfrak{S}$ (das *velum Camaldulense* des P. Grandi). Diesen Satz hat zuerst Johann Bernoulli gefunden (*Acta Erudit.* 1696, p. 269) und zugleich bemerkt, was sich leicht erweisen lässt, dass er auch für jede geradlinige Figur in der Grundebene gilt.

Sei z. B. $\varrho = \frac{b}{2\sin\alpha \cos^2\frac{1}{2}\varphi}$, welche Gleichung sich ergiebt, wenn man für die Projection der konischen Curve eine Parabel annimmt, deren Brennpunkt O und Scheitel X, die Projection von A, ist. Dann wird, wenn $\mu = \frac{\pi}{2}$,

$$\mathfrak{S} = \frac{b^2}{8\sin\alpha} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\cos^4\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{3}\,\frac{b^2}{\sin\alpha}\,.$$

40.

Sei nun der Inhalt des cylindrisch-prismatischen Körpers zu bestimmen, der zwischen der Fläche $\mathfrak{S} = OKML$ und ihrer Projection $OHNI$ enthalten ist und durch S bezeichnet werden mag. Da die Neigung des Flächenelements $MmM'm'$ gegen die Grundebene $= 90 - \alpha$, so ist seine Projection auf diese Ebene $= \varrho \sin^2\alpha\, d\varrho\, d\varphi$; und da der

Abstand des Punktes M von der Grundebene $= \varrho \cos\alpha$, so ist der Inhalt des Elementarprismas $dS = \varrho^2 \sin^2\alpha \cos\alpha \, d\varrho \, d\varphi$, folglich

$$S = \tfrac{1}{3} \sin^2\alpha \cos\alpha \int_0^\mu \varrho^3 \, d\varphi \, .$$

Werde ferner gesucht der Inhalt S' desjenigen cylindrisch-prismatischen Körpers, der zwischen $\mathfrak{S}$ und seiner Projection auf die Ebene COX liegt, so ist der Cosinus der Neigung von $MmM'm'$ gegen diese Ebene $= \cos\alpha \sin\varphi$. Denn bedeutet jetzt MQ die Normale des Punktes M, so ist $\angle MQO = 90 - \alpha$. Ist ferner QY' parallel zu OY, so bilden QY', QO, QM eine Ecke, der ein sphärisches Dreieck entspricht, dessen Seiten die Maasse der Winkel MQY', $Y'QO = 90$, $OQM = 90 - \alpha$ sind, und in welchem die beiden letzteren den sphärischen Winkel $90 - \varphi$ einschliessen, der die Neigung dieser Winkelebenen gegen einander ausdrückt. Da nun MQY' demselben gegenübersteht und die Neigung von $MmM'm'$ gegen die Ebene COX darstellt, so folgt hieraus der obige Ausdruck des Cosinus dieser Neigung. Es ist demnach die Projection des Elements auf die Ebene $COX = \varrho \sin\alpha \cos\alpha \sin\varphi \, d\varrho \, d\varphi$; folglich, da sein Abstand von derselben $= \varrho \sin\alpha \sin\varphi$, das Elementarprisma $dS' = \varrho^2 \sin^2\alpha \cos\alpha \sin^2\varphi \, d\varrho \, d\varphi$, folglich

$$S' = \tfrac{1}{3} \sin^2\alpha \cos\alpha \int_0^\mu \varrho^3 \sin^2\varphi \, d\varphi \, .$$

Endlich ergiebt sich auf gleiche Weise auch der Inhalt S'' des Körpers, der zwischen $\mathfrak{S}$ und seiner Projection auf die Ebene COY liegt. Da nämlich durch eine ähnliche Betrachtung wie die vorstehende der Cosinus der Neigung von $MmM'm'$ gegen diese Ebene $= \cos\alpha \cos\varphi$ gefunden wird, und der Abstand des Punktes M von derselben $= \varrho \sin\alpha \cos\varphi$ ist, so folgt

$$S'' = \tfrac{1}{3} \sin^2\alpha \cos\alpha \int_0^\mu \varrho^3 \cos^2\varphi \, d\varphi \, .$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke für S, S' und S'' giebt nun sofort das Resultat

$$S' + S'' = S \, .$$

Es findet hier also zwar zwischen den drei Körpern S, S', S'', nicht aber zwischen ihnen und der Fläche $\mathfrak{S}$ eine allgemeine Relation statt.

Im Beispiel der vorigen Nr. wird

$$S = \frac{b^3 \cos\alpha}{12 \sin\alpha} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d.\frac{1}{2}\varphi}{\cos^6 \frac{1}{2}\varphi} = \frac{7}{45} b^3 \cot\alpha;$$

$$S' = \frac{b^3 \cos\alpha}{8 \sin\alpha} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\varphi \, d.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{9} b^3 \cot\alpha;$$

$$S'' = \frac{b^3 \cos\alpha}{12 \sin\alpha} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(2\cos^2 \frac{1}{2}\varphi - 1)^2 d.\frac{1}{2}\varphi}{\cos^6 \frac{1}{2}\varphi} = \frac{2}{45} b^3 \cot\alpha;$$

woraus, wie es nach dem Obigen sein muss, in der That $S' + S'' = S$ folgt.

41.

Man erhält jedoch auch für den Kegel ein Resultat, das dem für die Kugel und den Cylinder gefundenen vollkommen analog ist, wenn statt der Fläche *OKML* (Fig. 8) die Fläche *AKMLDPA* $= \mathfrak{S}_1$ betrachtet wird, welche zwischen der konischen Curve und dem Umfange der Basis des Kegels liegt. Sei nämlich $MP = \varrho_1$, so ist, da $OP = \frac{b}{\sin\alpha}$, $\varrho = \frac{b}{\sin\alpha} - \varrho_1$, $QM = b - \varrho_1 \sin\alpha$, daher $d\mathfrak{S}_1 = (b - \varrho_1 \sin\alpha)\, d\varrho_1\, d\varphi$, folglich

$$\mathfrak{S}_1 = b\int_0^{\mu} \varrho_1 \, d\varphi - \tfrac{1}{2} \sin\alpha \int_0^{\mu} \varrho_1^2 \, d\varphi.$$

Ferner ist, wenn S_1 den zwischen $\mathfrak{S}_1$ und *ACD* liegenden cylindrisch-prismatischen Körper bezeichnet, $dS_1 = d\mathfrak{S}_1\, \varrho_1 \sin\alpha \cos\alpha$

$$= \sin\alpha \cos\alpha\, (b\varrho_1 - \varrho_1^2 \sin\alpha)\, d\varrho_1\, d\varphi;$$

folglich

$$S_1 = \sin\alpha \cos\alpha \left[\tfrac{1}{2} b \int_0^{\mu} \varrho_1^2 \, d\varphi - \tfrac{1}{3} \sin\alpha \int_0^{\mu} \varrho_1^3 \, d\varphi\right].$$

Ebenso ist, wenn S_1' der Körper zwischen $\mathfrak{S}_1$ und seiner Projection auf die Ebene *COX*,

$$dS_1' = d\mathfrak{S}_1 \cos\alpha \sin^2\varphi\, (b - \varrho_1 \sin\alpha) = (b - \varrho_1 \sin\alpha)^2 \cos\alpha \sin^2\varphi\, d\varrho_1\, d\varphi;$$

folglich

$$S_1' = \cos\alpha \left[b^2 \int_0^{\mu} \varrho_1 \sin^2\varphi\, d\varphi - b \sin\alpha \int_0^{\mu} \varrho_1^2 \sin^2\varphi\, d\varphi + \tfrac{1}{3} \sin^2\alpha \int_0^{\mu} \varrho_1^3 \sin^2\varphi\, d\varphi\right].$$

Endlich ist, wenn S_1'' der Körper zwischen $\mathfrak{S}_1$ und seiner Projection auf die Ebene *COY*,

$$dS_1'' = d\mathfrak{S}_1 \cos\alpha \cos^2\varphi\, (b - \varrho_1 \sin\alpha) = (b - \varrho_1 \sin\alpha)^2 \cos\alpha \cos^2\varphi\, d\varrho_1\, d\varphi;$$

folglich

$$S_1'' = \cos\alpha \left[b^2 \int_0^{\mu} \varrho_1 \cos^2\varphi\, d\varphi - b \sin\alpha \int_0^{\mu} \varrho_1^2 \cos^2\varphi\, d\varphi + \tfrac{1}{3} \sin^2\alpha \int_0^{\mu} \varrho_1^3 \cos^2\varphi\, d\varphi\right].$$

Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar

$$S_1 + S_1' + S_1'' = \cos\alpha\,[b^2\int_0^\mu \varrho_1\,d\varphi - \tfrac{1}{2} b \sin\alpha \int_0^\mu \varrho_1^2\,d\varphi]$$
$$= b\cos\alpha\,.\,\mathfrak{S}_1\,.$$

42.

Hiernach drückt nun die Gleichung $S + S' + S'' = a\mathfrak{S}$ eine den Oberflächen der Kugel, des geraden Cylinders und geraden Kegels gemeinsame Eigenschaft aus, wenn $\mathfrak{S}$ einen Theil dieser Flächen bedeutet, der von einer auf denselben gezogenen beliebigen Curve, den Durchschnitten der Flächen mit der Basis und zwei durch ihre Axe gelegten, gegen einander beliebig geneigten Ebenen begrenzt ist; wenn ferner S, S', S'' die cylindrisch-prismatischen Räume bezeichnen, welche zwischen $\mathfrak{S}$ und den Projectionen dieses Flächentheils auf die Ebene der Basis, auf die eine der so eben erwähnten, durch die Axe gelegten Ebenen und auf eine zweite, ebenfalls durch die Axe gehende, gegen die erste senkrechte Ebene enthalten sind; endlich a der Abstand der die Oberfläche des Körpers durch Rotation erzeugenden Linie (für die Halbkugel der Quadrant, für Cylinder und Kegel die Seitenlinie) vom Mittelpunkt der Basis ist. Dividirt man beide Theile der obigen Gleichung durch drei, so ergiebt sich der Satz, dass das arithmetische Mittel aus den drei Räumen S, S', S'' gleich ist einer Pyramide, deren Basis $= \mathfrak{S}$ und Höhe $= a$.

Denkt man sich auf der Oberfläche der genannten drei Rotationskörper eine zweite Curve gezogen, welche, wie die erste, die Durchschnittslinien der beiden durch die Axe gelegten Ebenen mit der Oberfläche (z. B. AK, DL Fig. 6) treffe, ohne jedoch innerhalb dieser Grenzen die erste Curve zu schneiden, so ist, wenn $\mathfrak{S}_1$, S_1, S_1', S_1'' für sie dieselbe Bedeutung haben, wie $\mathfrak{S}$, S, S', S'' für die erste, wie zuvor, $S_1 + S_1' + S_1'' = a\mathfrak{S}_1$; daher

$$(S - S_1) + (S' - S_1') + (S'' - S_1'') = a(\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1)\,.$$

Da nun $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1$ der zwischen den beiden Curven und denselben übrigen Grenzen wie $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ enthaltene Theil der Oberfläche ist, $S - S_1$, $S' - S_1'$, $S'' - S_1''$ aber die zwischen diesem Flächentheil und seinen drei Projectionen enthaltenen Räume bedeuten, so gilt der obige Satz auch für den durch diese beiden Curven begrenzten Flächentheil $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1$.

Treffen sich beide Curven in den durch die Axe gelegten Ebenen, deren Durchschnitte mit der Oberfläche die Figuren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ begrenzen, so ist $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1$ die Fläche eines von den Curven allein eingeschlossenen Bilineums. Sind nun die beiden Curven nur die Theile einer und derselben Curve, so wird $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1$ die Fläche einer von einer einzigen, in sich zurücklaufenden krummen Linie auf der Oberfläche eingeschlossenen Figur, für die also der Satz ebenfalls gilt.

Der Satz lässt sich überhaupt für jede von beliebig vielen Curven eingeschlossene Figur auf der Oberfläche der drei Körper erweisen. Denn jede solche Figur wird sich immer durch eine algebraische Summe von Figuren ausdrücken lassen, für die, nach dem Vorstehenden, der Satz gilt.

43.

Es erhebt sich hier nun weiter die Frage, ob diese den genannten drei Flächen gemeinsame Eigenschaft noch andern Rotationsflächen zukommt. Um sie zu beantworten, sei (Fig. 9) OC die Rotationsaxe, mit welcher die Axen OA, OB, sowie unter sich, rechte Winkel machen; AE die in der Ebene AOC liegende, die Rotationsfläche erzeugende (krumme oder gerade) Linie; PMF die Lage dieser Linie, nachdem sich ihre Ebene um den Winkel $AOP = \varphi$ gedreht hat; M ein beliebiger Punkt dieser Linie, dessen rechtwinklige Coordinaten $OQ = x$, $QN = y$, $NM = z$; KML eine durch M gehende beliebige Curve auf der Rotationsfläche; die Fläche der Figur $AKLD$, welche von dieser Curve und den Durchschnitten der Ebenen AOB, AOC und DOC, von denen die letztere mit der ersteren den Winkel $DOA = \mu$ bildet, begrenzt wird, $= \mathfrak{S}$; endlich seien, wie zuvor, S, S', S'' die zwischen $\mathfrak{S}$ und dessen Projectionen auf die durch die drei Axen gelegten Ebenen enthaltenen cylindrisch-prismatischen Räume. Nehmen wir nun an, die Projection der Curve KML auf die Ebene AOB sei durch die Gleichung $r = f(\varphi)$ zwischen den polaren Coordinaten $AON = \varphi$ und $ON = r$ bestimmt, und bezeichnen den Neigungswinkel des Flächenelements $d\mathfrak{S}$ gegen dieselbe Ebene AOB durch ν, so ist $d\mathfrak{S} = \frac{r\,dr\,d\varphi}{\cos\nu}$, oder da, wenn die Gleichung der erzeugenden Linie $z = \chi(r)$, $\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dr^2}}}$ ist,

$d\mathfrak{S} = r\,dr\,d\varphi\sqrt{1+\frac{dz^2}{dr^2}} = r\,dr\,d\varphi\sqrt{1+\chi'(r)^2}$; daher, wenn überdies der Halbmesser des Quadranten $APB = a$,

$$\mathfrak{S} = \int_0^\mu d\varphi \int_{f(\varphi)}^a r\,dr\sqrt{1+\chi'(r)^2}.$$

Ferner ist offenbar $dS = zr\,dr\,d\varphi = \chi(r)\,r\,dr\,d\varphi$, folglich

$$S = \int_0^\mu d\varphi \int_{f(\varphi)}^a \chi(r)\,r\,dr.$$

Zur Bestimmung des Elements dS genügt die Bemerkung, dass es das Product aus der Projection von $d\mathfrak{S}$ auf die Ebene AOC in $y = r\sin\varphi$ ist. Bedeutet nun ν' die Neigung von $d\mathfrak{S}$ gegen diese Ebene, oder, was dasselbe, der Normale MR gegen eine durch R gezogene Parallele zur y-Axe, so findet man, auf dieselbe Weise wie in Nr. 35, $\cos\nu' = \sin\varphi\sin\nu$; folglich ist die bezeichnete Projection $= r\operatorname{tg}\nu\sin\varphi\,dr\,d\varphi = -r\frac{dz}{dr}\sin\varphi\,dr\,d\varphi$ $= -r\chi'(r)\sin\varphi\,dr\,d\varphi$;

daher $$dS' = -r^2\chi'(r)\sin^2\varphi\,dr\,d\varphi,$$

folglich $$S' = -\int_0^\mu \sin^2\varphi\,d\varphi \int_{f(\varphi)}^a \chi'(r)\,r^2\,dr.$$

Ebenso ist das Element dS'' das Product aus der Projection von $d\mathfrak{S}$ auf die Ebene BOC in $x = r\cos\varphi$. Bedeutet nun ν'' die Neigung von $d\mathfrak{S}$ gegen diese Ebene, oder, was dasselbe, der Normale MR gegen eine durch R gezogene Parallele zur x-Axe, so findet sich $\cos\nu'' = \cos\varphi\cos\nu$; folglich ist die bezeichnete Projection $= r\operatorname{tg}\nu\cos\varphi\,dr\,d\varphi = -r\frac{dz}{dr}\cos\varphi\,dr\,d\varphi$ $= -r\chi'(r)\cos\varphi\,dr\,d\varphi$;

daher $$dS'' = -r^2\chi'(r)\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi,$$

folglich $$S'' = -\int_0^\mu \cos^2\varphi\,d\varphi \int_{f(\varphi)}^a \chi'(r)\,r^2\,dr.$$

Da nun alle diese Ausdrücke für $\mathfrak{S}$, S, S' und S'' Integrale zwischen denselben Grenzen sind, so erhellt, dass $S + S' + S'' = a\mathfrak{S}$ sein wird, wenn

$$\chi(r) - r\chi'(r) = a\sqrt{1+\chi'(r)^2},$$

d. i. $$z\,dr - r\,dz = a\sqrt{dr^2 + dz^2}.$$

Diese Differentialgleichung hat bekanntlich zu ihrem completen Integral die Gleichung

$$z = cr + a\sqrt{1+c^2},$$

in der c die willkürliche Constante bezeichnet, ausserdem aber noch die particuläre Auflösung

$$r^2 + z^2 = a^2.$$

Hiernach ist also die Erzeugende der Rotationsfläche, welche die in Rede stehende Eigenschaft hat, entweder ein Kreis, oder eine denselben berührende Gerade, die unter einem beliebigen Winkel gegen die Axen, auf die sich r und z beziehen, geneigt ist und für $c = 0$ in eine Parallele zur z-Axe übergeht. Die Rotationsfläche ist demnach entweder die Fläche einer Kugel, oder die eines geraden Kegels oder eines geraden Cylinders. Hierdurch ist nun erwiesen, dass ausser diesen keine andere Rotationsfläche die vorgedachte Eigenschaft besitzt. Für die Cylinderfläche wird $S = 0$, weil bei dieser $r = f(\varphi) = a$ ist, mithin in dem Ausdruck von S die Grenzen des Integrals von $\chi(r)\, r\, dr$ zusammenfallen.

11.

Wir können uns nun auch noch die allgemeinere Frage stellen, ob es ausser den gefundenen drei Rotationsflächen noch andere Flächen überhaupt giebt, die mit ihnen die mehrerwähnte Eigenschaft theilen. Hierbei wird es offenbar nur darauf ankommen, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen allgemein $dS + dS' + dS'' = a\,d\mathfrak{S}$ ist.

Seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes der gesuchten Fläche, so ist, wenn ν, ν', ν'' dieselbe Bedeutung haben, wie zuvor,

$$dS = z \cos\nu\, d\mathfrak{S}, \quad dS' = y \cos\nu'\, d\mathfrak{S}, \quad dS'' = x \cos\nu''\, d\mathfrak{S};$$

folglich da, wenn zur Abkürzung $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ gesetzt wird, bekanntlich

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\nu' = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\nu'' = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

und

$$d\mathfrak{S} = dx\, dy \sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$dS = z\, dx\, dy, \quad dS' = -\, qy\, dx\, dy, \quad dS'' = -\, px\, dx\, dy.$$

Es wird demnach die obige Bedingung immer erfüllt werden, wenn

$$z - (px + qy) = a\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Dieser Differentialgleichung kommt aber, wie zuerst Lagrange (*Mémoires de l'Acad. de Berlin* 1774) erwiesen hat, als completes Integral die Gleichung

$$z = cx + c'y = a\sqrt{1+c^2+c'^2}$$

zu, in der c und c' die beiden willkürlichen Constanten bedeuten, ausserdem aber noch als particuläre Auflösung die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Die letztere stellt die Fläche einer Kugel vom Halbmesser a, die erstere jede Ebene dar, welche diese Kugel berührt. Die Cosinus der Neigungen dieser Ebene gegen die xy-, yz-, xz-Ebene sind resp. $\frac{1}{\sqrt{1+c^2+c'^2}}$, $\frac{-c}{\sqrt{1+c^2+c'^2}}$, $\frac{-c'}{\sqrt{1+c^2+c'^2}}$. Denkt man sich nun c als unabhängige Veränderliche und c' als eine beliebige Function derselben $\varphi(c)$, so beschreibt, wenn c sich stetig ändert, vorstehende Ebene eine krumme Fläche, welche die Kugel in einer stetigen Reihe von Punkten berührt. Die Gleichung dieser Fläche ergiebt sich aus der der Ebene

$$a\sqrt{1+c^2+\varphi(c)^2} + cx + \varphi(c)y - z = 0$$

und ihre Differentialgleichung nach c

$$a[c+\varphi(c)\varphi'(c)] + [x-\varphi'(c)y]\sqrt{1+c^2+\varphi(c)^2} = 0\,.$$

Sei z. B. $\sqrt{1+c^2+c'^2} = \frac{1}{\cos\nu}$, also $c^2+c'^2 = \operatorname{tg}^2\nu = \varkappa^2$, wo $\varkappa$ constant, folglich $\varphi(c) = \sqrt{\varkappa^2-c^2}$, so ist die Gleichung der Ebene

$$a\sqrt{1+\varkappa^2} + cx + y\sqrt{\varkappa^2-c^2} - z = 0,$$

ihre Differentialgleichung nach c

$$x\sqrt{\varkappa^2-c^2} - cy = 0\,.$$

Die Elimination von c aus diesen beiden Gleichungen giebt

$$\varkappa\sqrt{x^2+y^2} = z - a\sqrt{1+\varkappa^2}\,.$$

Setzt man $z - a\sqrt{1+\varkappa^2} = z'$ und $\varkappa = \cot\alpha$, wo α der Winkel, unter dem die Ebene gegen die z-Axe geneigt ist, so erhält man

$$z'\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{x^2+y^2},$$

die Gleichung des die Kugel berührenden Rotationskegels.

Da der Durchschnitt je zwei nächstbenachbarter Lagen der vorstehenden Ebene eine die Kugel berührende Gerade ist, so wird die gefundene Fläche auch durch die Bewegung einer solchen Berührenden erzeugt. Ihre Gleichungen erhält man durch successive Elimination von x und y aus der Gleichung der Ebene und ihrer Differentialgleichung.

Hiernach kommt nun also die in Rede stehende Eigenschaft überhaupt ausser der Kugel allen krummen Flächen zu, welche durch Bewegung einer die Kugel stetig berührenden Geraden erzeugt werden.

45.

Auf ähnliche Weise können wir endlich noch untersuchen, ob die in Nr. 40 für den geraden Kegel nachgewiesene Gleichung $S'+S'' = S$ noch für andere Flächen gilt. Da nämlich hier S den zwischen $\mathfrak{S}$ und

seiner Projection auf eine der xy-Ebene parallele Ebene enthaltenen Raum bezeichnet, indess S' und S'', folglich auch dS' und dS'' ihre bisherige Bedeutung behalten, so hat man nur in $dS = z\,dx\,dy$ für z zu setzen $h - z$, wo h den Abstand der parallelen Ebene ausdrückt, so wird $dS' + dS'' = dS$, wenn

$$z - h = px + qy.$$

Dies ist die Differentialgleichung einer konischen Fläche, deren Mittelpunkt der Punkt der z-Axe ist, dessen Entfernung vom Coordinatenanfang $= h$. Die obige Eigenschaft kommt also nicht bloss der Fläche des geraden Kegels, sondern allen konischen Flächen zu. Für die Rotationsflächen überhaupt ist bekanntlich $\sqrt{x^2 + y^2} = f(z)$; daher, wenn zur Abkürzung $f(z) = u$ gesetzt wird, $p = \frac{x}{u}\frac{dz}{du}$, $q = \frac{y}{u}\frac{dz}{du}$. Die Substitution dieser Werthe in die vorstehende Bedingungsgleichung giebt

$$(z - h)\,du - u\,dz = 0,$$

oder, wenn $z - h = z'$ gesetzt wird,

$$z'\,du - u\,dz' = 0,$$

woraus, wenn c eine willkürliche Constante bezeichnet, folgt

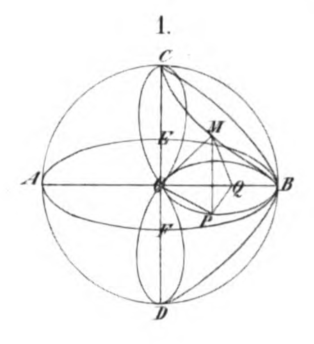
$$z' = cu.$$

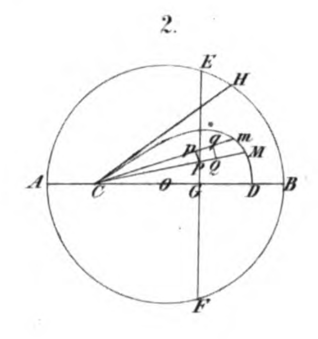
Die einzige Rotationsfläche, welche die obige Eigenschaft besitzt, wird also durch eine Gerade erzeugt, welche die z-Axe in dem festen Abstand h vom Coordinatenanfang schneidet und eine beliebige Neigung gegen sie hat, ist also die Fläche des geraden Kegels.

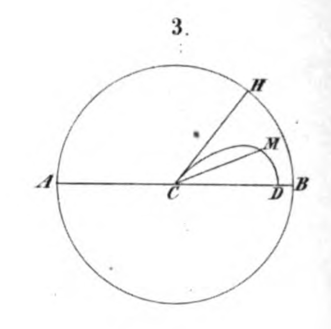
Anmerkung zu Nr. 6.

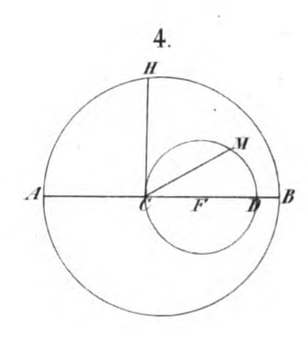
Der gegebene Beweis des Satzes setzt stillschweigend voraus, dass f^2 sowohl als g^2 positive Werthe haben, was immer stattfindet, wenn $c < a - b$ ist. Mit Ausnahme des Falles, wo $c = a - b$, in welchem $\sqrt{f^2 + g^2} = \sqrt{f^2 - g^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$ wird, daher die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser $\sqrt{a^2 - b^2}$ übergeht, kann dies aber allgemein angenommen werden. Denn wenn (Fig. 4) $AF = AC + CF > a$ ist, so wird $BF = BD + DF < a$; es ist also dann nur $BD = c$ zu setzen. Der Beweis des Satzes gilt daher auch für diesen Fall, wenn unter $b + c$ immer der kleinste Abstand des Mittelpunkts F vom Umfange des Kreises $AHBA$ verstanden wird.

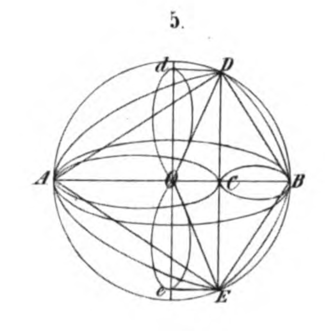
S. 462 Z. 2 lies: über der Curve.

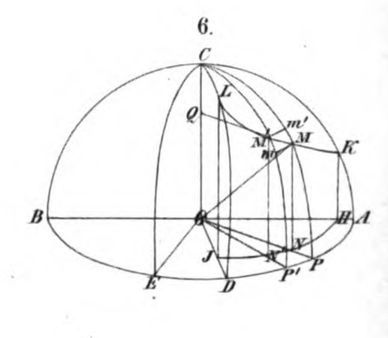

1.
C
M
E
A
O
Q
B
F
P
D

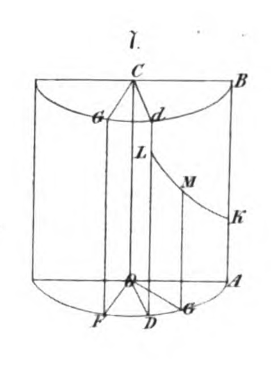

2.
E
H
p
q
m
M
P
Q
A
C
O
G
D
B
F

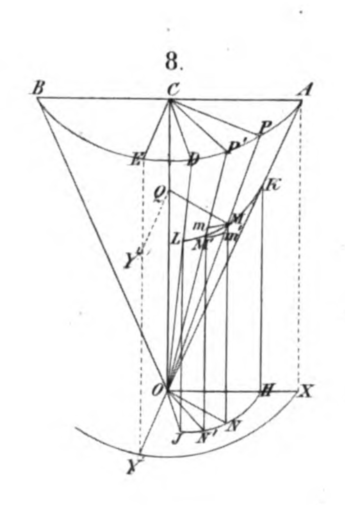

3.
H
M
A
C
D
B

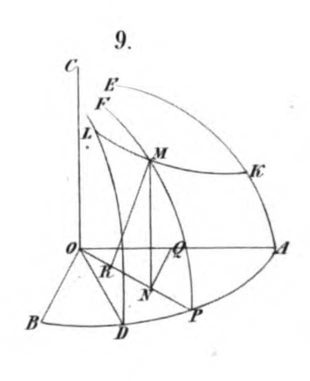

4.
H
M
A
C
F
D
B


5.
d
D
A
O
C
B
e
E


6.
C
L
Q
m'
M'
M
m
K
B
O
H
A
J
N'
N
E
D
P'
P


7.
C
B
G
d
L
M
K
O
A
F
D
G


8.
B
C
A
P
E
D
P'
K
Q
m
M
L
M'
m'
Y'
O
H
X
J
N'
N
Y


9.
C
E
F
L
M
K
O
Q
A
R
N
B
D
P

ELEKTRODYNAMISCHE
MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE ÜBER

DIAMAGNETISMUS

VON

WILHELM WEBER.

Der Diamagnetismus ist in den wenigen Jahren seit seiner Entdeckung Gegenstand vielseitiger Forschungen gewesen, welche nicht bloss zu einer Erweiterung seines Gebiets, sondern auch zur Entdeckung und Untersuchung mehrerer anderen neuen Naturerscheinungen geführt haben. Das Interesse an diesen Forschungen ist dadurch immer mehr gewachsen. Jedoch bedarf die Lehre vom Diamagnetismus noch eines Fundamentalgesetzes, wenn sie der Lehre vom Magnetismus, Elektromagnetismus und von der Magnetelektricität, womit sie innigst zusammen zu hängen scheint, gehörig begründet zur Seite gestellt werden soll. Auch zu diesem Fundamentalgesetze zu gelangen, schien nun gleich anfangs eine Aussicht dadurch eröffnet zu sein, dass es Faraday gelungen war, die beiden hauptsächlichsten von ihm entdeckten Thatsachen, nämlich die diamagnetische Abstossung und die äquatoriale Stellung diamagnetischer Körper in der Nähe eines starken Magnets, unter einen sehr einfachen und allgemeinen Ausdruck zu bringen, der, wenn er auch nicht selbst als Fundamentalgesetz betrachtet werden konnte, doch in nächster und engster Beziehung mit einem solchen stehen zu müssen schien. Faraday führte nämlich diese diamagnetischen Wirkungen auf die Gesetze veränderlicher Magnete (Eisenmagnete) zurück, indem er die Wirkungen diamagnetischer Körper den Wirkungen von magnetischem Eisen verglich, worin Nord- und Südmagnetismus mit einander vertauscht wären. Die hiernach vorhandene Relation des Diamagnetismus zum Magnetismus bildet das von ihm aufgestellte Gesetz der diamagnetischen Polarität.

Um keine Ungewissheit über den Sinn zu lassen, welcher mit dem Worte magnetische oder diamagnetische Polarität zu verbinden sei, möge hier sogleich eine Erklärung desjenigen Sinnes, in welchem dieser Ausdruck in folgender Abhandlung genommen wird, bei-

gefügt werden. Es ist bekannt, dass Gauss bewiesen hat, dass alle Wirkungen, die irgend ein Magnet (oder ein Körper, welcher geschlossene galvanische Ströme enthält) auf andere Körper ausübt, auf die Wirkungen zweier magnetischen Fluida zurückgeführt werden können, welche auf seiner Oberfläche auf eine bestimmte Weise vertheilt sind. Gauss hat diese Vertheilung die ideale Vertheilung der magnetischen Fluida genannt. Demnach soll nun in der folgenden Abhandlung unter magnetischer oder diamagnetischer Polarität eines Körpers ein solcher Zustand desselben verstanden werden, vermöge dessen er Wirkungen auf andere Körper ausübt, welche so beschaffen sind, dass sie sämmtlich aus einer idealen Vertheilung magnetischer Fluida erklärt werden können.

In diesem Sinne folgt also aus dem Gesetze der diamagnetischen Polarität, dass alle Wirkungen eines diamagnetischen Körpers sich aus einer idealen Vertheilung der beiden magnetischen Fluida auf seiner Oberfläche erklären lassen. Da nun aus dem Gesetze der magnetischen Polarität derselbe Ausspruch sich für magnetische Körper ergiebt, so folgt, dass, wenn es in dem angegebenen Sinne wirklich eine diamagnetische Polarität giebt,

> diamagnetische Körper von magnetischen sich nicht wesentlich durch ihre Wirkungen, sondern bloss durch die Art und Weise ihrer Entstehung oder Veränderung unterscheiden;

denn vorausgesetzt, dass die von ihrer Entstehung (oder Veränderung) abhängige ideale Vertheilung gegeben ist, so sind auch alle Wirkungen gegeben, gleichgültig ob es Magnetismus oder Galvanismus oder Diamagnetismus sei, an dessen Stelle jene ideale Vertheilung gesetzt worden.

Soll nun aber das Gesetz der diamagnetischen Polarität wirklich eine allgemeine Geltung haben, so darf seine Anwendbarkeit nicht bloss auf diejenigen Erscheinungen beschränkt bleiben, welche Faraday zuerst entdeckt hatte, die nämlich auf der Wechselwirkung des diamagnetischen Körpers mit demjenigen Magnet, durch dessen Einfluss er diamagnetisch geworden war, beruhen, sondern sie muss auf alle Arten von Erscheinungen erstreckt werden können, die ein Körper durch eine bestimmte Vertheilung seiner magnetischen Fluida hervorbringen kann, wenn er auf andere Körper wirkt. Alle diese verschie-

denen Arten von Erscheinungen werden eingetheilt in rein magnetische, elektromagnetische und magnetelektrische. Es war daher von besonderem Interesse, das wirkliche Vorhandensein dieser verschiedenen Wirkungsarten thatsächlich festzustellen. Die zweite Wirkung würde nämlich, wenn sie bei diamagnetischen Körpern wirklich vorhanden wäre, den Fundamentalversuch des Elektrodiamagnetismus, die dritte den Fundamentalversuch der Diamagnetelektricität (oder der diamagnetischen Induction elektrischer Ströme) geben. Fänden dagegen nicht alle diese Wirkungen statt, so hiesse das so viel, als das Gesetz der diamagnetischen Polarität wäre nicht allgemein gültig, wodurch es seine ganze Wichtigkeit und Bedeutung in theoretischer Beziehung verlöre.

Ueber den Thatbestand dieser verschiedenen Wirkungsarten diamagnetischer Körper stimmen nun die von verschiedenen Beobachtern gefundenen Resultate noch nicht mit einander überein, was leicht erklärlich ist, wenn man bedenkt, wie schwach nothwendiger Weise namentlich die letzteren Arten von Wirkungen sein müssen, und wie leicht es daher geschehen kann, dass es nicht allen Beobachtern sie darzustellen gelingt, zumal wenn sie nicht alle ganz gleiche Instrumente gebrauchen. Namentlich ist es Faraday nicht gelungen, sich von dem Vorhandensein der letzten (inducirenden) Wirkung diamagnetischer Körper zu überzeugen, ungeachtet er auf die Wiederholung der darüber gemachten Versuche grosse Mühe und Sorgfalt verwendet hat.

Wie schwach zum Beispiel die Wirkungen eines diamagnetischen Körpers auf eine Boussole sein müssen, leuchtet daraus ein, dass selbst die von starken Elektromagneten auf einen von ihnen diamagnetisirten Körper auch in kleiner Entfernung ausgeübten Kräfte sehr schwach sind, obgleich sie den grossen Kräften der Elektromagnete proportional sind. Betrachtet man nun aber, statt der Wechselwirkung eines in gegebener Weise diamagnetisirten Körpers mit so kraftvollen Elektromagneten, die Wechselwirkung desselben diamagnetischen Körpers mit einer schwachen Boussole, so leuchtet ein, dass aus dieser letzteren Wechselwirkung bei gleichem Abstande eine Kraft hervorgeht, welche in dem Verhältnisse der magnetischen Kraft jener Elektromagnete zu der dieser Boussole noch kleiner ist als die aus der ersten Wechselwirkung entsprungene Kraft, die selbst schon sehr klein war.

Unter diesen Verhältnissen, wo man *a priori* übersehen kann, dass

die fraglichen Wirkungen, wenn sie vorhanden sind, ausserordentlich schwach sein müssen, bedarf es besonderer Vorkehrungen, um sie von andern kleinen Wirkungen genau zu unterscheiden und zu einem sicheren Resultate über ihr Dasein zu gelangen. Es reicht nicht hin, dass man die Beobachtungsmittel zu schärfen und zu verfeinern sucht, sondern man muss sich auch von der wirklich erreichten Schärfe und Feinheit dieser Mittel, und von der Stärke der fraglichen Wirkungen, welche damit beobachtet werden sollen, nähere Kenntniss zu verschaffen suchen, um darüber gewiss zu werden, dass das Beobachtete dem Gesuchten wirklich entspricht, — kurz, die Beobachtung so schwacher Wirkungen bedarf, um zu sicheren Resultaten zu führen, der quantitativen Controle, an der es bisher gänzlich gefehlt hat. Namentlich kann die Frage über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer diamagnetischen Induction elektrischer Ströme, um die es sich vorzüglich handelt, auf dem Wege des Versuchs nur dann sicher entschieden werden, wenn die Stärke des Stroms, welcher diamagnetisch inducirt werden müsste, d. i. der Gegenstand, um den es sich handelt, einigermaassen ihrer Grösse nach vorausbestimmt ist, weil nur hiernach die Mittel bemessen werden können, welche zur Prüfung nothwendig sind und genügen.

Um nun aber zu einer solchen quantitativen Controle der Beobachtungen zu gelangen, muss diejenige Betrachtung, welche auf die Vermuthung einer diamagnetischen Induction elektrischer Ströme geführt hat, genauer verfolgt werden. Nach dieser Betrachtung wird nämlich angenommen, dass alle Wirkungen eines diamagnetischen Körpers aus einer bestimmten Vertheilung der beiden magnetischen Fluida auf seiner Oberfläche erklärt werden können, und dass umgekehrt ein diamagnetischer Körper alle Wirkungen der so vertheilten magnetischen Fluida ausübe. Hieraus folgt nun, das jedem diamagnetischen Körper ein bestimmtes magnetisches Moment müsse beigelegt, und dass jede Art von diamagnetischer Wirkung müsse benutzt werden können, um dieses magnetische Moment seiner Grösse nach zu bestimmen, und dass sich daraus wieder alle andern Arten von diamagnetischen Wirkungen ihrer Grösse nach entweder genau oder wenigstens näherungsweise müssen vorausbestimmen lassen. Es würde also durch diese Betrachtung, wenn sie richtig ist, der Weg gebahnt sein, von bekannten diamagnetischen Erscheinungen auf unbekannte zu schliessen

und dieselben ihrer Grösse nach vorauszubestimmen, so dass jeder Versuch, welcher die dadurch bedingte Feinheit nicht besitzt, sogleich im Voraus verworfen werden kann; jeder Versuch dagegen, welcher bei solcher Feinheit doch kein Resultat, oder ein ganz verschiedenes, ergäbe, zur Widerlegung der ganzen Betrachtung genügen würde. Eine gründliche Entscheidung ist nur auf diesem Wege möglich.

Diesen Weg habe ich nun in der folgenden Untersuchung einzuschlagen versucht und glaube so weit gelangt zu sein, dass die dadurch gewonnenen Resultate keinem Zweifel unterliegen, wenn auch zu wünschen bleibt, dass die quantitativen Bestimmungen künftig noch grössere Präcision erlangen. Wäre mir ein reicheres Material vergönnt gewesen, so würde ich meine Beobachtungsmittel leicht bedeutend haben verstärken und dadurch den quantitativen Bestimmungen schon jetzt einen höheren Grad von Präcision verschaffen können, welcher in jeder Beziehung wünschenswerth bleibt, auch wenn das Hauptresultat hinreichend festgestellt erscheint.

Elektrodiamagnetismus und Messung des Moments eines Elektrodiamagnets.

1.

Wie Eisenmagnete in gewöhnliche (deren Magnetismus vom Einfluss anderer Magnete herrührt) und in Elektromagnete eingetheilt werden, ebenso können auch Diamagnete in gewöhnliche (deren Diamagnetismus von magnetischem Einfluss herrührt) und in Elektrodiamagnete eingetheilt werden. Nur ist zwischen Elektromagneten und Elektrodiamagneten darin ein grosser für die Beobachtung wichtiger Unterschied, dass wenn man gleiche galvanische Ströme um einen Eisenstab und einen Wismuthstab herumführt, das Eisen magnetische Kräfte in die Ferne ausübt, gegen welche die Kräfte des galvanischen Stroms fast verschwinden, während die vom Wismuth ausgeübten diamagnetischen Kräfte gegen die des galvanischen Stroms verschwinden. Hierin liegt der Grund, dass das Vorhandensein des Elektrodiamagnetismus schwer nachzuweisen ist. Diese Schwierigkeit kann aber überwunden werden und es ergiebt sich dann sogar, dass die Kraft eines Elektrodiamagnets sich zu wirklichen Maassbestimmungen weit besser eignet als die eines gewöhnlichen Diamagnets. Doch

bedarf es einer besonderen Einrichtung, um reine Wirkungen einer solchen elektrodiamagnetischen Kraft darzustellen und den Einfluss des galvanischen Stroms dabei ganz zu beseitigen. Ich will hier nun zuerst die Einrichtung beschreiben, mit der ich die reine Wirkung eines Elektrodiamagnets dargestellt und die Grösse seiner Kraft mit der eines Elektromagnets verglichen habe; sodann werde ich die Resultate der damit gemachten Versuche folgen lassen.

2.

Elektrodiamagnetischer Messapparat.

Es sollte die Wirkung beobachtet werden, welche ein Elektrodiamagnet auf eine in einiger Entfernung davon aufgestellte Magnetnadel ausübt. Es ist schon oben bemerkt worden, wie klein die Wirkung sei, welche man von der von einem diamagnetischen Körper auf eine gewöhnliche Magnetnadel ausgeübten Kraft zu erwarten habe, zumal wenn diese Nadel vom Diamagnete einige Zoll entfernt ist. Je kleiner die zu erwartende Wirkung war, desto feinere Methoden der Beobachtung mussten gebraucht werden. Es wurde daher ein kleines Magnetometer angewendet, dessen Nadel 100 Millimeter lang und mit Spiegel versehen war, um nach der Gauss'schen Methode mit Fernrohr und Skala beobachtet zu werden. Es liessen sich damit Ablenkungen der Nadel von einzelnen Bogenminuten genau messen. Die Empfindlichkeit einer solchen Nadel hängt, wie bekannt, von der Grösse der horizontalen Richtkraft ab, die der Erdmagnetismus auf sie ausübt. Die Schwingungsdauer der Nadel betrug bei ungeschwächter Richtkraft des Erdmagnetismus 7,687 Secunden; nun wurde aber diese Richtkraft, um die Empfindlichkeit zu steigern, so vermindert, dass die Schwingungsdauer auf 18,45 Secunden wuchs, was auf sehr einfache Weise durch einen starken Magnetstab Fig. 2 *SN* bewirkt wurde, welcher, mit verkehrten Polen, in der Richtung der Nadel *NS* in angemessener Entfernung fest aufgestellt wurde. Durch eine kleine Verrückung dieses Magnetstabes konnte die Empfindlichkeit der Nadel ganz beliebig regulirt werden; doch wird durch zu grosse Empfindlichkeit die Präcision der Beobachtung leicht gefährdet. Ausserdem ergab sich, dass der oben angegebene Grad der Empfindlichkeit genügte. Uebrigens war die Nadel mit einem kupfernen Dämpfer versehen, welcher eine Abnahme der Schwin-

gungsbögen in dem Verhältnisse von 3 : 2 bewirkte, oder genauer das *decrementum logarithmicum* war

$$= 0{,}17887.$$

Von dieser Beschreibung des magnetischen Messapparats gehen wir zur Darstellung des Elektrodiamagnets selbst und seiner Aufstellung über. Der Elektrodiamagnet bestand erstens aus zwei gleichen Wismuthcylindern, 92 Millimeter lang, 16 Millimeter dick, beide zusammen 343500 Milligramm schwer, welche, wie Fig. 1. *aa* darstellt, in

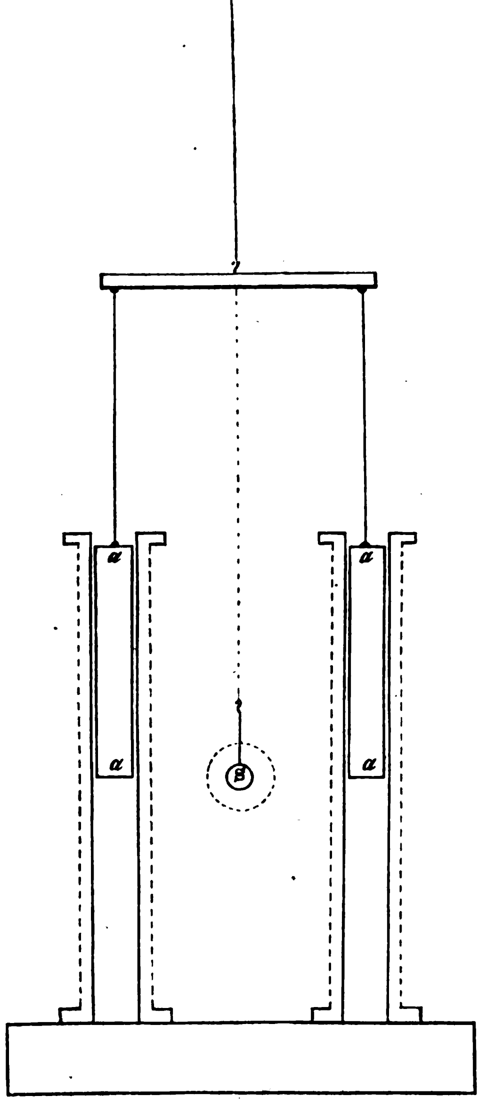


Fig. 1.

verticaler Stellung und 100 Millimeter Abstand fest mit einander verbunden waren und durch eine einfache Hebelvorrichtung höher oder tiefer gestellt werden konnten; zweitens aus zwei spiralförmig aufgewundenen kupfernen Leitungsdrähten. Jede dieser Spiralen war 190 Millimeter lang, hatte 17 Millimeter inneren Durchmesser und bestand aus 4 Lagen, jede Lage aus 146 Umwindungen. Sie waren vertical wie Säulen, 100 Millimeter von einander, auf einem Statife befestigt und ihre Drähte so mit einander verbunden, dass ein Strom, welcher von der einen zur andern ging, sie in entgegengesetztem Sinne durchlief. Beide Wismuthcylinder konnten zugleich in diese beiden Spiralen herabgelassen werden und wurden dann durch den galvanischen Strom in Elektrodiamagnete verwandelt, deren einer seinen Nordpol nach oben, der andere nach unten kehrte. Zur Darstellung des Stroms dienten 6 Grove'sche Becher.

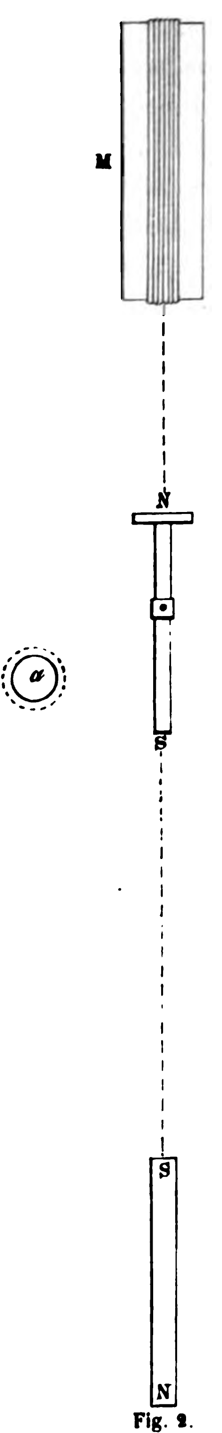


Fig. 2.

Diese beiden Spiralen wurden nun so aufgestellt, dass eine durch die Nadel gelegte Horizontalebene sie halbirte; das Südende *S* der Nadel schwebte genau in der Mitte zwischen beiden Spiralen. Fig. 2 stellt die gegenseitige Lage der Nadel *NS* und der beiden Spiralen um *aa* im horizontalen Durchschnitte dar. Die beiden Wismuthcylinder wurden entweder in den Spiralen so tief herabgesenkt, dass ihr oberes Ende bis zum Niveau der Nadel herauf, oder sie wurden so hoch gehoben, dass ihr unteres Ende bis zum Niveau der Nadel herabreichte.

Die Gründe dieser Einrichtung sind folgende. Es kam erstens darauf an, dass der galvanische Strom, welcher durch beide Spiralen ging, gar keine Wirkung unmittelbar auf die Nadel ausübte, trotz seiner Stärke

und Nähe und trotz der Empfindlichkeit der Nadel. Durch die symmetrische Stellung der beiden Spiralen halb über halb unter der Horizontalebene der Nadel wurde die Ablenkung aufgehoben; durch die gleiche Entfernung der beiden Spiralen von der Nadel und durch die entgegengesetzte Richtung ihres Stromes wurde auch die senkrechte Kraft aufgehoben, welche sonst die Nadel in verticale Schwankung setzen würde. Da aber eine vollkommene Symmetrie dieser Verhältnisse praktisch nicht erreichbar ist, so bedurfte es noch einer besondern Einrichtung, um die unvermeidlichen kleinen Abweichungen zu compensiren. Dazu diente ein dritter Leitungsdraht, welcher in 18 Windungen um einen 4eckigen Rahmen *M* gewunden war und in die Kette eingeschaltet wurde. Dieser Rahmen war 244 Millimeter lang, 146 Millimeter hoch und wurde vertical in der Ebene der Nadel aufgestellt. Derselbe Strom, welcher durch die beiden Spiralen ging, übte, indem er auch diesen dritten Draht durchlief, ein Drehungsmoment auf die Nadel aus, welches durch Näherung oder Entfernung des Rahmens leicht vergrössert oder verkleinert werden konnte, bis die beabsichtigte Compensation vollkommen erreicht war.

Zweitens kam es darauf an, dass die beiden Wismuthcylinder abwechselnd in die untere Stellung, wo ihre oberen Enden stärker auf die Nadel wirkten, und in die obere Stellung, wo ihre unteren Enden stärker wirkten, gebracht werden konnten, ohne dass die Stärke ihres Diamagnetismus sich änderte und ohne dass durch diese Bewegung im Wismuth als Leiter ein Strom inducirt wurde. Hierbei trat nun der Vorzug des Elektrodiamagnets vor einem gewöhnlichen hervor. Denn der gewöhnliche, durch die Nähe eines Magnetpols hervorgebrachte, Diamagnetismus ändert sich mit jeder Verrückung seines Trägers und zugleich werden dabei in diesem Träger, wenn er ein Leiter ist, stets Ströme inducirt. Ganz anders verhält es sich mit einem Elektrodiamagnete, wo der diamagnetische Wismuthcylinder von allen Seiten von der galvanischen Spirale umschlossen ist. Ist diese Spirale gleichförmig gewunden und so lang, dass der Wismuthcylinder stets von den Enden der Spirale entfernt bleibt, so ergiebt sich die elektromagnetische Kraft der Spirale für alle Theile des Raumes, in denen der Wismuthcylinder sich befindet, nach bekannten elektromagnetischen Gesetzen, nahe constant, und der Wismuthcylinder kann also in dem mittleren Raume der



Spirale hin und her geschoben werden, ohne dass sein Diamagnetismus verändert, und ohne dass galvanische Ströme in demselben als Leiter inducirt werden. Dazu kommt noch, dass die ganze Wismuthmasse darin gleichmässig diamagnetisirt wird, welches bei der gewöhnlichen, durch die Nähe eines Magnetpols hervorgebrachten Diamagnetisirung nicht der Fall ist, weil hier diejenigen Theile, welche dem Pole am nächsten liegen, weit stärker werden, als die entfernteren, ein Umstand, welcher alle Maassbestimmungen verhindert.

Fand nun bei der beschriebenen Aufhebung kein directer Einfluss des Stroms auf die Nadel statt, und wurde in den Wismuthcylindern als Leitern bei ihrer Auf- und Abschiebung kein Strom inducirt, so musste die Ablenkung der Nadel, welche beobachtet wurde, als eine reine Wirkung der diamagnetischen Kraft der Wismuthstäbe betrachtet werden, und diese Ablenkung musste nach dem Gesetze der diamagnetischen Polarität positiv oder negativ sein, je nachdem die Wismuthstäbe ihre untere oder obere Stellung in den Drahtspiralen erhielten. Es ergiebt sich daraus der für die schärfere Beobachtung günstige Umstand, dass sich diese Ablenkung durch Multiplication verstärken lässt; indem man die Stellung der Wismuthstäbe immer in dem Augenblicke wechselt, wo die Nadel das Ende ihres Schwingungsbogens erreicht, so lange, bis endlich durch die Wirkung des Dämpfers, womit die Nadel versehen ist, ihr Schwingungsbogen während jeder Schwingung um eben so viel abnimmt, als er durch die diamagnetische Wirkung der Wismuthstäbe zunimmt. Der zugehörige Grenzwerth lässt sich aus allen nach einander beobachteten Schwingungsbögen mit grosser Schärfe berechnen und kann bei bekannter Dämpfung als Maass der Stärke des Elektrodiamagnetismus der Wismuthstäbe dienen.

Setzt man alsdann für die Wismuthstäbe einen Eisencylinder von gleicher Länge und wiederholt damit die nämlichen Versuche, so gelangt man zu einer Vergleichung der Stärke eines Elektrodiamagnets mit der eines Elektromagnets. Nur leuchtet ein, dass man bei der grossen Empfindlichkeit des Apparats die Wirkung des Elektromagnets dadurch möglichst schwächen muss, dass man einen sehr dünnen Eisenstab gebraucht. Bei den folgenden Versuchen war der Eisenstab so dünn, dass sein Gewicht nur den 59200sten Theil von dem Gewichte der beiden Wismuthstäbe betrug, und auch dann ergab

sich seine Wirkung noch viel stärker, als die der beiden Wismuthstäbe zusammen.

Endlich kam es drittens bei diesen Versuchen hauptsächlich noch darauf an, die Richtung der Ablenkung für jede Stellung der Wismuthstäbe zu bestimmen und mit der Richtung zu vergleichen, welche die Ablenkung bei gleicher Stellung des Eisenstäbchens hatte. Es wurde daher die Stellung der Stäbe für jede Schwingungsdauer bei den Beobachtungen bemerkt. Es ergab sich stets, wie die folgenden Versuche zeigen, dass die Ablenkung der Nadel, bei gleicher Stellung der Wismuth- und Eisenstäbe, in entgegengesetzter Richtung erfolgte, dass also, wie für gewöhnliche Diamagnete aus anderen Wirkungen schon bekannt ist, auch bei Elektrodiamagneten das nördliche und südliche magnetische Fluidum, unter gleichen Stromverhältnissen, auf entgegengesetzte Weise wie bei Elektromagneten vertheilt gedacht werden muss, was eben durch diese Versuche bewiesen werden sollte.

3.

Versuche und Messungen.

Die mit dem beschriebenen Apparate angestellten Versuche und Messungen sind von verschiedenen Beobachtern gemacht worden, um die Unsicherheit zu beseitigen, der bei so schwachen Wirkungen ein einzelner Beobachter leichter ausgesetzt erscheinen könnte. Ausser mir haben folgende Herren die Güte gehabt, dieselben Messungen an verschiedenen Tagen zu wiederholen, nämlich Professor Listing, Professor Sartorius von Waltershausen, Dr. von Quintus Icilius und Dr. Riemann. Ich werde beispielsweise statt des Protocolls meiner eigenen Messungen das Protocoll der von Herrn Professor Listing sehr sorgfältig gemachten Messungen hier vollständig mittheilen, indem ich nur bemerke, dass die meinigen sowohl wie alle anderen sämmtlich damit nahe übereinstimmen.

Göttingen 1851. Juni 21.

Beobachter: Herr Professor Listing.

Galvanischer Strom von 6 Grove'schen Platin-Zinkbechern.

1. Versuche mit den beiden Wismuthstäben.

Nr. der Schwingung.	Stellung der Stäbe.	Stand der Nadel am Anfange oder Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.
		500,0		
1.	oben	467,0	487,6	— 40,0
2.	unten	513,9	488,3	— 50,4
3.	oben	459,9	488,3	— 56,3
4.	unten	518,5	489,2	— 58,5
5.	oben	460,0	487,3	— 55,2
6.	unten	512,0	489,3	— 46,5
7.	oben	471,1	484,9	∓ 29,7
8.	oben	489,7	487,3	± 7,0
9.	unten	494,2	489,3	— 8,9
10.	oben	480,9	488,9	— 15,6
11.	unten	498,9	482,7	— 30,0
12.	oben	457,0	483,1	— 50,4
13.	unten	516,0	487,2	— 57,8
14.	oben	459,3	484,2	— 50,9
15.	unten	504,4	487,6	∓ 35,6
16.	unten	478,3	483,1	± 12,4
17.	oben	476,9	485,6	— 14,7
18.	unten	504,9	485,7	— 36,6
19.	oben	459,6	480,6	— 42,6
20.	unten	499,4	479,6	— 39,6
21.	oben	460,1	484,1	— 46,6
22.	unten	513,9	488,2	— 51,7
23.	oben	464,2	486,8	— 45,9
24.	unten	506,2	480,0	— 50,6
25.	oben	446,9	474,1	— 55,2
26.	unten	498,0	476,4	∓ 44,5
27.	unten	460,0	465,6	± 15,5
28.	oben	453,1	462,5	— 16,8
29.	unten	479,8	464,6	— 29,8
30.	oben	446,9	467,8	— 40,3
31.	unten	494,6	471,8	— 46,0
32.	oben	450,4	471,3	— 42,2
33.	unten	490,5	468,2	— 44,0
34.	oben	442,6		

2. Versuche mit einem Eisenstäbchen.

Um bei der Empfindlichkeit der Nadel die Wirkung des Eisens zu vermindern, wurde nur ein einfaches Stäbchen gebraucht und damit zwei Versuchsreihen gemacht, wobei das Stäbchen erst in der einen, dann in der andern Spirale auf- und abgeschoben wurde. Das Eisenstäbchen wog, bei gleicher Länge mit den Wismuthstäben, nur 5,8 Milligramm, d. i. 59200 Mal weniger als die beiden Wismuthstäbe zusammen. Dennoch war die Wirkung so stark, dass die Ablenkung nur ohne Multiplication einfach gemessen werden konnte.

Nr.	Erste Reihe.			
	Stellung des Eisenstäbchens.	Elongationen der Nadel.	Ruhestand der Nadel.	Mittel.
1.	unten	428,1 215,2 362,8 261,0	300,4 303,8 301,7	302,0
2.	oben	451,2 652,0 515,0 609,9 544,4	571,7 569,8 571,9 570,6	571,0
3.	unten	435,5 206,7 364,7 254,6 336,9	298,2 301,5 298,6 304,0	300,6
4.	oben	503,2 598,0 536,9	560,1 561,3	560,7

Nr.	Zweite Reihe.			
	Stellung des Eisenstäbchens.	Elongationen der Nadel.	Ruhestand der Nadel.	Mittel.
1.	oben	524,0 590,5 549,3	563,9 565,8	564,9
2.	unten	227,4 387,1 275,4 357,9	323,2 320,1 324,9	322,7
3.	oben	450,9 661,8 525,3 600,0	577,4 579,9 570,1	575,8
4.	unten	217,8 392,2 270,0 349,4	322,4 318,9 317,6	319,6
5.	oben	439,7 638,8 495,8 595,0	559,2 553,0 555,3	555,8

Es ist hierbei noch zu bemerken, dass die Intensität des von 6 Grove'schen Bechern hervorgebrachten Stromes mit einer Tangentenboussole, deren Ring 211 Millimeter Durchmesser hatte, gemessen wurde. Der Strom lenkte die Boussole um 28° 21′ ab, wonach die Intensität des Stroms (den horizontalen Theil der erdmagnetischen Kraft = 1,8 gesetzt) gefunden wird

$$= 105,5 . \frac{1,8}{2\pi} . \text{tang } 28^{\circ}\, 21' = 16,31.$$

4.

Berechnung der Versuche.

In der Tafel der mit den beiden Wismuthstäben gemachten Versuche sind die Nadelstände, wie sie am Anfange und Ende jeder Schwingung beobachtet worden sind, in der dritten Columne angegeben. Aus je drei von diesen unmittelbar beobachteten Nadelständen sind in der vierten und fünften Columne der entsprechende Ruhestand und Schwingungsbogen mit Rücksicht auf die Dämpfung berechnet. Ein positives Vorzeichen vor dem Schwingungsbogen bedeutet, dass die Nadel bei der oberen Stellung der Wismuthstäbe von kleineren auf grössere, oder bei der unteren Stellung von grösseren auf kleinere Skalentheile ging; das Umgekehrte gilt für das negative Vorzeichen. Nachdem die Stellung der Wismuthstäbe mehrmals regelmässig am Ende jeder Schwingung gewechselt worden war und der Schwingungsbogen seinen Grenzwerth fast erreicht hatte, wurde eine Unterbrechung dadurch hervorgebracht, dass die Stellung der Wismuthstäbe während zweier Schwingungen unverändert gelassen, darauf aber wieder regelmässig gewechselt wurde. Der negative Schwingungsbogen wurde dadurch in einen positiven verwandelt, der aber schnell bis auf Null abnahm und sehr bald wieder in einen negativen überging, wodurch die Richtung der von den Wismuthstäben hervorgebrachten Ablenkung am augenscheinlichsten hervortrat. — Zählt man die Schwingungsbögen von demjenigen an, welcher der Null am nächsten ist, so lassen sich die beobachteten dem Grenzwerthe am nächsten kommenden Werthe mit Hülfe des bekannten *decrementum logarithmicum* leicht auf den Grenzwerth reduciren, und daraus ein genauerer Mittelwerth des letzteren finden. In dem vorliegenden Falle, wo das *decrementum logarithmicum* nahe $= \log \frac{3}{2}$ war, genügt es, den Werth des $n$ten Schwingungsbogens mit $(1 - (\frac{2}{3})^n)$ zu dividiren, oder genauer, weil das *decrementum logarithmicum* $= 0{,}17887$ war, mit $(1 - 0{,}6624^n)$. Hiernach ergeben sich folgende reducirte Werthe.

Nr.	beobachtet	reducirt	Mittel.
1.	— 40,0	— 63,4	
2.	— 50,4	— 66,6	
3.	— 56,3	— 67,1	— 61,8
4.	— 58,5	— 65,5	
5.	— 55,2	— 59,4	
6.	— 46,5	— 48,8	
11.	— 30,0	— 47,5	
12.	— 50,4	— 66,6	— 59,8
13.	— 57,8	— 68,5	
14.	— 50,9	— 56,8	
19.	— 42,6	— 67,5	
20.	— 39,6	— 52,3	
21.	— 46,6	— 55,5	
22.	— 51,7	— 57,9	— 56,1
23.	— 45,9	— 49,4	
24.	— 50,6	— 53,1	
25.	— 55,2	— 57,0	
30.	— 40,3	— 63,9	
31.	— 46,0	— 60,2	— 55,8
32.	— 42,2	— 50,0	
33.	— 44,0	— 49,3	

Aus allen Beobachtungen zusammen ergiebt sich also der gesuchte Grenzwerth

$$x = -58,4.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Nadel bei der unteren Stellung der Wismuthstäbe auf grössere, bei der oberen auf kleinere Skalentheile getrieben wurde. Bei diesen nach der Methode der Multiplication gemachten Versuchen ergiebt sich nun ferner aus dem gefundenen Grenzwerthe der Schwingungsbögen $= x$, nach der in der vorigen Abhandlung (in diesem Bande S. 348) von mir gege-

benen Regel, die dem Gleichgewichte der Nadel entsprechende Ablenkung E

$$E = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}},$$

worin $\log e^{\lambda}$ das logarithmische Decrement bezeichnet, also $\log e^{\lambda} = 0{,}17887$ ist. Hieraus ergiebt sich die dem Gleichgewichte der Nadel entsprechende Ablenkung

$$E = -5{,}93.$$

Aus den mit dem Eisenstäbchen ohne Multiplication gemachten Versuchen haben sich abwechselnd für die obere und für die untere Stellung folgende Ruhestände der Nadel ergeben:

	erste Reihe	zweite Reihe
oben	—	564,9
unten	302,0	322,7
oben	571,0	575,8
unten	300,6	319,6
oben	560,7	555,8

Hieraus ergeben sich unmittelbar die Werthe der Ablenkung E:

erste Reihe	zweite Reihe
+ 134,50	+ 121,10
+ 135,20	+ 126,55
+ 130,05	+ 128,10
	+ 118,10

also im Mittel aus beiden Reihen die Ablenkung

$$E' = +128{,}4.$$

Das positive Vorzeichen bedeutet, dass die Nadel bei der unteren Stellung des Eisenstäbchens auf kleinere, bei der oberen auf grössere Skalentheile getrieben wurde, d. i. gerade umgekehrt wie bei den Wismuthstäben.

Das Moment des Magnetismus des Eisenstäbchens verhält

sich hiernach zum Momente des Diamagnetismus der beiden Wismuthstäbe, wie

$$+128,4 : -5,93,$$

d. h. das Moment des Eisens ist dem 21,7fachen des Wismuths entgegengesetzt gleich, ungeachtet die Masse des Eisens 59200 Mal kleiner war. Hiernach würde also, auf gleiche Massen reducirt, der Diamagnetismus des Wismuth 1285000 Mal kleiner zu setzen sein, als der Magnetismus des Eisens.

Aus einer eben solchen von Herrn Professor Sartorius von Waltershausen ausgeführten Versuchsreihe hatte sich der Grenzwerth

$$x = -48,2,$$

aus einer dritten von Herrn Dr. von Quintus Icilius gemachten,

$$x = -47,3,$$

aus einer vierten von Herrn Dr. Riemann gemachten,

$$x = -45,0,$$

aus der von mir gemachten

$$x = -55,8$$

ergeben. Im Mittel aus allen diesen Versuchen ist also

$$x = -50,9$$
$$E = -5,17$$

und hiernach ist der Diamagnetismus des Wismuths 1470000 Mal kleiner zu setzen, als der Magnetismus des Eisens.

Die obigen Versuche genügen, um dadurch den Elektrodiamagnetismus des Wismuths nachzuweisen. Die für seine Stärke daraus abgeleitete Bestimmung kann nun zwar, wie man leicht übersieht, nur als eine ungefähre betrachtet werden; es reicht aber eine solche ungefähre Bestimmung hin, um als ein fester Stützpunkt bei der folgenden Untersuchung über diamagnetische Induction galvanischer Ströme gebraucht zu werden.

5.

Bequemste Einrichtung zur Beobachtung der diamagnetischen Polarität.

Die vorhergehenden Versuche beweisen dreierlei:

erstens, dass bei der Darstellung von Diamagneten, ebenso wie bei der Darstellung von Magneten, die rein magnetischen Kräfte durch elektromagnetische Kräfte galvanischer Ströme ersetzt werden können;

zweitens, dass an einem seiner Länge nach gleichförmig diamagnetisirten Wismuthstabe, wie er durch die elektromagnetische Kraft einer galvanischen Spirale, in die er gelegt wird, dargestellt werden kann, die diamagnetische Polarität deutlich und sicher beobachtet wird, indem er auf eine Magnetnadel entgegengesetzte Drehungskräfte ausübt, jenachdem er ihr mit seinem einen oder mit seinem andern Ende genähert wird, — gerade so wie die magnetische Polarität an einem durch denselben Strom magnetisirten Eisenstabe;

drittens, dass sich endlich unter den angegebenen Verhältnissen die von dem diamagnetisirten Wismuthstabe auf eine Magnetnadel ausgeübte Drehungskraft sowohl ihrer Richtung als Grösse nach bestimmen und mit der Richtung und Grösse der von einem durch dieselben Kräfte magnetisirten Eisenstabe auf dieselbe Magnetnadel ausgeübten Drehungskraft vergleichen lässt, woraus sich die Richtung der Drehungskraft stets entgegengesetzt ergiebt, während die Bestimmung der Grösse zu einer Vergleichung sich entsprechender magnetischer und diamagnetischer Momente führt:

Alle diese Versuche lassen sich mit geringen Hülfsmitteln, wenn sie zweckmässig verwendet werden, ausführen, was um so mehr Beachtung verdient, als nach der in der Einleitung gemachten Bemerkung, die Kräfte, um die es sich hierbei handelt, ausserordentlich klein sind, und man daher gefasst sein musste, dass die Beobachtung deutlich wahrnehmbarer Wirkungen dieser kleinen Kräfte die Anwendung sehr starker Mittel fordern würde, was in der That aber nicht der Fall ist. Denn eine Grove'sche oder Bunsen'sche Säule von 6 bis 8 Bechern und ein Paar Pfund Kupferdraht von angemessener Stärke sind Gegenstände, die zu vielen andern Versuchen gebraucht werden, und ausserdem bedarf es blos noch einer kleinen Magnetnadel, die mit einem Spiegel versehen ist, um wie beim Magnetometer mit einem Fernrohre (wozu ein Sextantenfernrohr genügt) beobachtet zu werden.

Um die Ausführung dieser für die Begründung der Lehre vom Diamagnetismus besonders wichtigen Versuche möglichst zu erleichtern, namentlich die auf die Aufstellung des Apparats zu verwendende Mühe zu vermindern, habe ich folgende Einrichtung getroffen, welche zur Wiederholung der Versuche als die bequemste empfohlen werden kann.



Sie besteht wesentlich darin, dass, statt zweier galvanischen Spiralen, welche bei obigen Versuchen (Art. 2) vertical so aufgestellt wurden, dass der eine Pol einer geraden Magnetnadel symmetrisch zwischen ihnen lag, nur eine solche Spirale gebraucht wird, welche symmetrisch mitten zwischen den beiden Polen einer hufeisenförmig gebogenen Magnetnadel aufgestellt wird. Fig. 3 stellt *A* den Querschnitt dieser Spirale dar, welcher symmetrisch zwischen den Polen *N*, *S* der hufeisenförmig gekrümmten Magnetnadel *NBS* liegt. Diese Magnetnadel wird von der Klemme *DE* gehalten, in deren Mitte *C* der Aufhängungsfaden befestigt ist. Fig. 4 und 5 stellt das Instrument in zwei Seitenansichten dar. Es ist vortheilhaft, der Spirale eine beträchtliche Länge

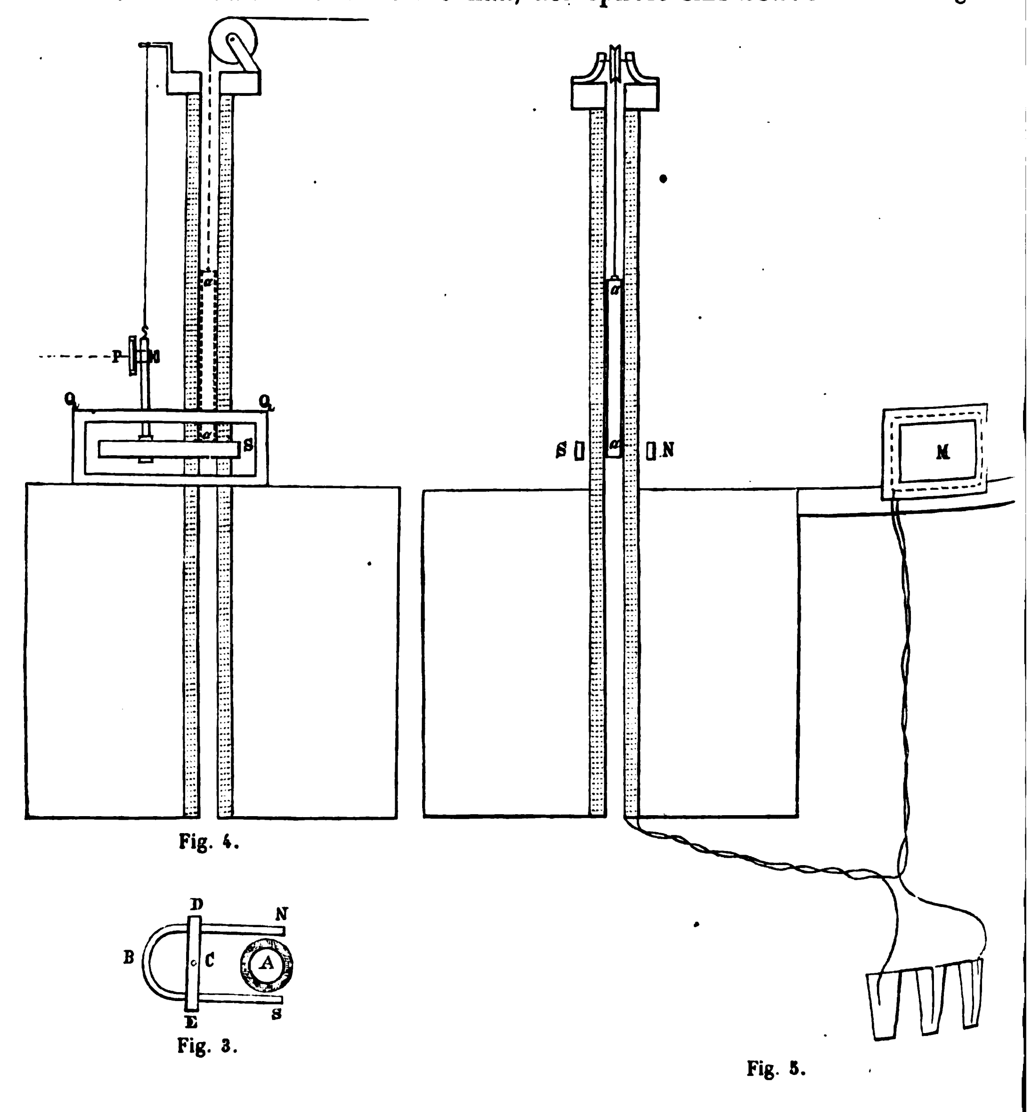


Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 5.

zu geben, z. B. von 400 bis 500 Millimeter, wodurch es leichter wird, die Aufhängung der Nadel so zu reguliren, dass sie in der die Länge der Spirale halbirenden Horizontalebene schwebt, wo dann der durch die Spirale gehende Strom auf die Nadel kein Drehungsmoment ausübt. Sollte aber auch ein kleines Drehungsmoment vorhanden sein, so lässt sich dies leicht auf die Art. 2 schon angegebene Weise durch einen aus wenigen Windungen bestehenden Multiplicator Fig. 5 *M* compensiren, indem man denselben Strom hindurchleitet und ihn der Magnetnadel nähert. Zur Beobachtung der Magnetnadel ist es nothwendig, sie mit einem Spiegel Fig. 4 *P* zu versehen und darin mit einem Fernrohre das Spiegelbild einer entfernten Skala zu beobachten. Die Magnetnadel wird ausserdem mit einem Dämpfer Fig. 4 *QQ* umgeben. Der Wismuthstab *aa* Fig. 4 und 5 wird an einem Faden vertical in der Spirale aufgehangen; er kann gehoben oder gesenkt werden, so dass entweder, wie Fig. 4 und 5 darstellt, sein unteres Ende zwischen den beiden Polen der Magnetnadel zu liegen kommt, oder sein oberes Ende. Die Beobachtungen lassen sich am bequemsten machen, wenn durch Rollen oder durch eine einfache Hebelvorrichtung die Einrichtung getroffen wird, dass der Beobachter am Fernrohre selbst durch Hebung oder Senkung des Fusses die Senkung oder Hebung des Wismuthstabes bewirken kann. Ist der Strom geschlossen und die Magnetnadel ganz in Ruhe, so hebt man den Wismuthstab und beobachtet darauf eine kleine Bewegung der Nadel. Sobald dann die Nadel ihre grösste Elongation erreicht hat, wird der Wismuthstab wieder gesenkt, und die Magnetnadel bewegt sich dann schon mit grösserer Geschwindigkeit zurück. Hat sie die grösste Elongation nach dieser Seite erreicht, so wird der Wismuthstab wieder gehoben u. s. w. Zwischen je zwei Elongationen bemerkt man die Stellung, welche der Wismuthstab während der dazwischen verflossenen Zeit gehabt hat. Vertauscht man den Wismuthstab mit einem gleich langen aber sehr dünnen Eisendrahte, so kann man sich überzeugen, dass bei gleicher Stellung des Eisendrahts die Ablenkung der Nadel in entgegengesetzter Richtung geschieht, wie beim Wismuthstabe.

Diamagnetelektricität und Messung der diamagnetisch inducirten elektrischen Ströme.

6.

Die Versuche über diamagnetelektrische Induction bieten, wie man leicht übersehen kann, wegen ihrer grösseren Feinheit der Beobachtung mehr Schwierigkeit dar, als die vorhergehenden Versuche über den Elektrodiamagnetismus, und es bedarf einer besonderen Kunst in der Einrichtung und Anordnung der Versuche, um mit einem Aufwande von mässigen Hülfsmitteln hier wirklich zum Ziele zu gelangen. Die folgenden Versuche werden zeigen, wie dies dennoch möglich ist, und wenn die mit Hülfe solcher Mittel dargestellten Wirkungen auch nur klein sind, so zeigen sie doch eine solche Uebereinstimmung, dass bei einiger Beachtung der Verhältnisse kaum etwas zu wünschen übrig bleibt, wenn es sich bloss darum handelt, das Factum der diamagnetischen Induction zu begründen und vor Täuschungen durch fremdartige Einflüsse sicher zu stellen. Die dargestellten Wirkungen können sogar, wie man sehen wird, zu quantitativen Bestimmungen über die Stärke der diamagnetischen Induction gebraucht werden, die sich zu solchen Prüfungen benutzen lassen, zu welchen ein geringerer Grad von Genauigkeit genügt. Nur der Wunsch, diesen quantitativen Bestimmungen die für einige besondere Untersuchungen nothwendige grössere Präcision zu geben, wird es künftig nöthig machen, grössere Mittel in Anwendung zu bringen. Ich werde die Beschreibung des hier gebrauchten diamagnetischen Inductionsapparats vorausschicken und darauf die der damit ausgeführten Versuche folgen lassen.

7.

Beschreibung des diamagnetischen Inductionsapparats.

Ich werde hier einen andern diamagnetischen Inductionsapparat beschreiben, als derjenige war, mit dem ich früher (Berichte 1847 und Poggendorffs Annalen 1848. Bd. 73.) eine schwache Spur von einer diamagnetischen Induction beobachtet habe, der aber nicht ganz die zu diesen Versuchen wünschenswerthe Feinheit und Genauigkeit besass. Jener Apparat war im Wesentlichen derselbe, dessen sich später

Faraday bediente und in den *Philos. Transact.* 1850. *P. I* beschrieb, mit dem ihm aber die Beobachtung der diamagnetischen Induction nicht gelungen ist, wiewohl er viele andere interessante Anwendungen davon gemacht hat. Der Grund dieses verschiedenen Erfolgs ist wohl in den von mir gebrauchten feineren galvanometrischen Mitteln zu suchen; denn auch ich würde, wie Faraday, ohne die Anwendung eines Galvanometers, dessen Nadel nach Art des Gauss'schen Magnetometers mit Spiegel und Fernrohr beobachtet wird, gar keine Spur einer solchen diamagnetischen Induction zu beobachten im Stande gewesen sein. Indessen können auch die von mir mit jenem Apparate gemachten Versuche nicht als genügend betrachtet werden, weil dabei die an sich schwachen Wirkungen mit anderen Wirkungen verbunden erscheinen, von denen sie schwer geschieden werden können. Auch gestatten dabei die Verhältnisse keine quantitative Controle. Der hier zu beschreibende Inductionsapparat unterscheidet sich von dem früheren wesentlich dadurch, dass

1) ein Elektrodiamagnet, statt eines gewöhnlichen, zur Induction benutzt wird, dessen Moment durch die vorhergegangene Untersuchung seiner Grösse nach wenigstens näherungsweise bekannt ist, wonach das Verhältniss der inducirenden Wirkung des Apparats bei Anwendung eines Wismuthstabes im Vergleiche zu der bei Anwendung eines Eisenstabs vorausgesagt werden kann;

2) dadurch, dass die Induction durch blosse Bewegung des diamagnetischen Körpers in einer ruhenden Drahtspirale hervorgebracht wird, indem der Diamagnetismus unverändert bleibt, wodurch vermieden wird, dass in dem Wismuth, als Leiter, galvanische Ströme inducirt werden, welche sonst leicht mit den diamagnetisch inducirten Strömen verwechselt werden könnten.

Der zur Induction benutzte Elektrodiamagnet.

Der zur Induction benutzte Elektrodiamagnet bestand aus einem Wismuthstabe in einer langen Drahtspirale, *cccc* Fig. 6 *A*, durch welche der Strom von 8 Bunsen'schen Kohlenzinkbechern geleitet wurde.

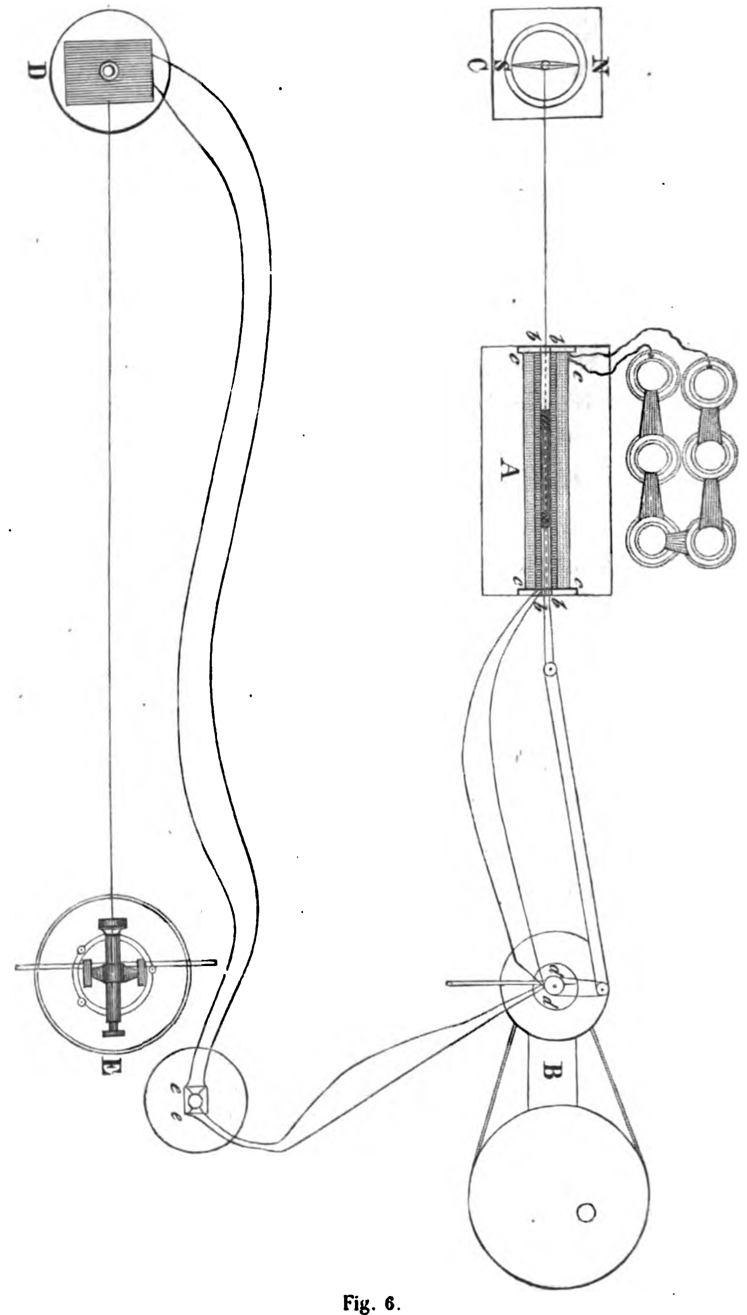


Fig. 6.

Der Wismuthstab war 186 Millimeter lang und wog 339300 Milligramm. Die Drahtspirale bestand aus Kupferdraht, welcher mit Wolle übersponnen und ausserdem noch durch eine Guttaperchadecke isolirt war. Der reine Kupferdraht war 2,3 Millimeter dick, der aufgewundene Draht bildete 8 Lagen über einander, jede zu 120 Umwindungen. Die ganze Spirale war 383 Millimeter lang und hatte 23,9 Millimeter inneren und 70 Millimeter äusseren Durchmesser.

Die Inductionsspirale.

Die Inductionsspirale *bbbb* Fig. 6 *A* ist diejenige Spirale, in welcher durch die Bewegung des Elektrodiamagnets ein Strom inducirt werden soll. Diese Spirale muss von der zum Elektrodiamagnet selbst gehörigen, durch welche der Strom der galvanischen Säule geht, sorgfältig isolirt und, zum Zwecke der Beobachtung des inducirten Stromes, mit dem Multiplicator eines Galvanometers verbunden werden. Diese Spirale bestand aus einem 1 Millimeter dicken, mit Seide übersponnenen Kupferdrahte, welcher 3 Lagen übereinander, jede von 294 Umwindungen, bildete. Die Länge war 383 Millimeter, der innere Durchmesser 19, der äussere 23 Millimeter. Nachdem sie, zur besseren Isolirung, noch mit dünnem Gutta percha umwickelt war, war sie fest in die weitere Röhre der zum Elektrodiamagnet gehörigen Spirale eingeschlossen, oder vielmehr die letztere Spirale wurde darum gewunden.

Der wesentlichste Punkt, der bei dieser Spirale in Betracht kommt, ist der, dass sie ihrer Länge nach in zwei ganz symmetrische und symmetrisch gewundene Hälften zerfällt. Das heisst, der Draht ist nicht der ganzen Länge nach gleichförmig in derselben Richtung fortgewunden, sondern die Spirale zerfällt ihrer Länge nach in zwei Hälften, in denen der Draht entgegengesetzt gewunden ist. Es ist dieses nothwendig, wenn durch die Bewegung eines diamagnetischen Wismuth- oder eines magnetischen Eisenstabs in dieser Spirale ein Strom inducirt werden soll, welcher mit dem damit verbundenen Galvanometer beobachtet werden könne; denn wird dieser inducirende Stab in die Mitte der Spirale gelegt und darauf bewegt, so ist die von seinem nördlichen Ende in der einen Hälfte der Spirale ausgeübte Inductionskraft der von seinem südlichen Ende in der andern Hälfte ausgeübten gerade entgegengesetzt, und die Wirkung beider würde sich aufheben, wenn beide



Hälften der Spirale in gleichem Sinne gewunden wären. Durch ihre entgegengesetzte Windung wird bewirkt, dass die beiden Inductionskräfte einander nicht aufheben, sondern verdoppeln.

Diese zum Zwecke der Induction nothwendige Einrichtung gewährt ausserdem zugleich noch einen für die praktische Ausführung der Versuche wichtigen Vortheil. Es leuchtet nämlich ein, dass der Strom der galvanischen Säule in der Spirale des Elektrodiamagnets zwar, so lange er constant ist, keine inducirende Kraft auf die Inductionsspirale ausüben könne, gegen welche er eine feste, unveränderliche Lage hat; durch die geringste Aenderung seiner Intensität würde aber in der Inductionsspirale ein Strom hervorgebracht werden, welcher viel stärker wäre, als der diamagnetisch inducirte Strom, und die Beobachtung des letztern stören würde. Nun leuchtet aber ein, dass dieselbe Einrichtung der Inductionsspirale, durch welche bewirkt wird, dass die diamagnetische Induction in beiden Hälften dieser Spirale sich verdoppelt, zugleich eine Aufhebung der von dem Strome der galvanischen Säule in der äussern Spirale auf beide Hälften der Inductionsspirale ausgeübten Inductionskräfte bewirkt, so dass, wenn nur die Symmetrie beider Hälften vollkommen ist, auch die grössten Intensitätsänderungen des Stroms der galvanischen Säule gar keinen Einfluss haben. Dazu kommt noch, 1) dass es sehr leicht zu prüfen ist, ob diese Aufhebung genau vorhanden ist, indem man, statt kleine Aenderungen hervorzubringen, den ganzen Strom löst oder commutirt; 2) dass, wenn es sich findet, dass diese Aufhebung nicht vollkommen ist, es sehr leicht dahin gebracht werden kann, bloss dadurch, dass das eine Drahtende der Inductionsspirale noch ein oder einige Male um die Spirale, durch die der Strom der galvanischen Säule geht, herumgewunden wird. Es ist auf diese Weise leicht, die Wirkungen der diamagnetischen Induction von allen fremdartigen Einflüssen zu befreien.

Die übrigen Theile des Inductionsapparats.

Ueber die Einrichtung der übrigen Theile des Inductionsapparats, welche mehr oder weniger der Willkür des Beobachters überlassen bleibt, füge ich nur folgende Bemerkungen bei. Um den Wismuthstab in der Inductionsspirale hin und her zu schieben, verbinde ich denselben mit der Kurbel eines Rads Fig. 6 *B*; damit ferner der in der Indu-

ctionsspirale bei der Zurückschiebung des Wismuthstabes inducirte Strom im Galvanometer dieselbe Richtung habe, wie bei der Hinschiebung, so ist am Rade ein Commutator *dd* angebracht, welcher sich mit dem Rade dreht, und durch welchen bei jeder halben Umdrehung des Rads (in dem Augenblicke, wo der Wismuthstab den Anfangs- oder Endpunkt seiner Bahn erreicht) die Verbindung der Drahtenden der Inductionsspirale mit denen des Multiplicators des Galvanometers gewechselt wird. Die hiernach immer gleiche Richtung, in welcher alle inducirten Ströme durch den Multiplicator des Galvanometers gehen, würde die Nadel immer nach derselben Seite ablenken. Um nun den Beobachter in den Stand zu setzen, auch eine Ablenkung der Nadel nach der andern Seite hervorzubringen, ist neben dem Beobachtungsfernrohre Fig. 6 *E* noch ein zweiter Commutator *ee* aufgestellt, welcher nur von dem Beobachter selbst gewechselt wird. Dieser Commutator heisse der Hülfscommutator; er verbindet die beiden Drahtenden des Multiplicators mit den Enden der beiden vom rotirenden Commutator kommenden Leitungsdrähte. Uebrigens ist besondere Aufmerksamkeit noch auf folgende zwei Punkte zu wenden: 1) dass man die Induction mehr durch die Beschleunigung der Drehung des Rads zu verstärken sucht, als durch die Grösse der Bahn, in welcher man den Wismuthstab hin und her schiebt. In den folgenden Versuchen wurde der Wismuthstab in einer nur 58,2 Millimeter langen Bahn hin und her geschoben, diese Bahn durchlief er aber in jeder Secunde 10,58 Mal. Durch eine grössere Schiebung würde wenigstens ein Theil des Wismuthstabs sich dem Ende der Spirale, durch welche der Strom der galvanischen Säule ging, genähert haben, wo nicht allein die Stärke seines Diamagnetismus geändert, sondern auch in ihm, als Leiter, ein Strom inducirt worden sein würde, der einen secundär inducirten Strom in der Inductionsspirale erzeugt hätte. Dieser muss vermieden werden, wenn man eine reine Wirkung der diamagnetischen Induction erhalten will — 2) ist besondere Aufmerksamkeit auf den rotirenden Commutator zu verwenden, wo leicht ein thermomagnetischer Strom entsteht. Man muss daher diesen Commutator so einrichten, dass sich gleiche Metalle (Messing an Messing) an einander reiben. Auch dadurch werden die thermomagnetischen Ströme nur geschwächt, nicht ganz vermieden. Nun heben sich zwar die an den verschiedenen Reibungsstellen erregten thermomagnetischen Ströme wechselseitig auf; da aber diese Aufhebung oft

nicht vollständig stattfindet, so muss man den dadurch hervorgebrachten, wenn auch geringen, Einfluss unschädlich machen, indem man ihn in Rechnung bringt, was leicht geschehen kann, wenn man den Beobachtungen, bei welchen der Wismuthstab hin und her geschoben wird, ganz gleiche Beobachtungen unmittelbar vorausschickt und nachfolgen lässt, wobei der rotirende Commutator ohne den Wismuthstab bewegt wird. Uebrigens kann man die ersteren Beobachtungen selbst leicht auch so anordnen, dass die kleinen Wirkungen des thermomagnetischen Stroms abwechselnd die Wirkungen der diamagnetischen Induction verstärken und schwächen, wodurch ein von dem Einflusse des thermomagnetischen Stroms unabhängiger Mittelwerth erhalten wird. Dies geschieht dadurch, dass man von Zeit zu Zeit durch Umkehrung des Stroms der galvanischen Säule den Diamagnetismus des Wismuthstabs umkehrt.

Zum Galvanometer Fig. 6 *D* gebrauchte ich, wie bei dem elektrodiamagnetischen Messapparate, ein kleines Magnetometer nach der Gauss'schen Einrichtung, welches mit einem sehr starken Multiplicator versehen war. Die Länge der Nadel war dabei auf 30 Millimeter reducirt. Die Richtkraft des Erdmagnetismus wurde, zur Vermehrung der Empfindlichkeit, hier ebenso wie früher vermindert. Die Nadel war ebenfalls mit einem dicken Kupferringe als Dämpfer umgeben. Dass der Inductionsapparat so weit von dem Galvanometer entfernt werden müsse, dass der Strom der dabei gebrauchten galvanischen Säule nicht unmittelbar auf die Nadel wirke, oder dass, wenn dies der Raum nicht gestattet, der Inductionsapparat durch besondere Orientirung in eine solche Lage gebracht werden müsse, wo seine ablenkende Kraft auf die Nadel Null oder wenigstens sehr klein ist, bedarf kaum der Erwähnung. Um endlich eine ungefähre Kenntniss von der Stärke des Stroms der galvanischen Säule selbst zu erhalten, wurde eine gewöhnliche Boussole Fig. 6 *C* in einer angemessenen Entfernung von der Spirale, durch welche der Strom ging, so aufgestellt, dass die durch den Strom hervorgebrachte Ablenkung der Boussole zur Bestimmung der Stromintensität benutzt werden konnte.

8.

Versuche.

Auch die folgenden Versuche sind nicht von mir allein ausgeführt worden, sondern es haben daran die Herren Professoren Listing und Sartorius von Waltershausen, Dr. von Quintus Icilius und Dr. Riemann, ebenso wie an den vorhergehenden elektrodiamagnetischen Theil genommen. Beispielshalber werde ich auch hier das Protocoll der von Herrn Professor Listing gemachten Versuche vollständig mittheilen, mit denen alle anderen nahe übereinstimmten.

Der Inductionsapparat war so aufgestellt worden, dass eine durch die Mitte des Galvanometers und durch die Mitte der Drahtspirale, durch welche der Strom der galvanischen Säule ging, gelegte Verticalebene mit dem magnetischen Meridiane einen Winkel von 45° bildete; die Axe jener Drahtspirale lag senkrecht gegen den magnetischen Meridian. Aus den Gesetzen des Elektromagnetismus ergiebt sich, was die Erfahrung unmittelbar bestätigt, dass bei dieser Anordnung der Strom die Galvanometernadel nicht ablenkt. Unter diesen Umständen war es nun ferner am vortheilhaftesten, die Boussole, durch welche die Stromintensität bestimmt werden sollte, in der Richtung der verlängerten Axe der Drahtspirale, durch welche der Strom ging, aufzustellen. Es geschah dies in 708 Millimeter Abstand von der Mitte auf der westlichen Seite. Derjenige Strom, durch welchen diese Boussole mit ihrem Nordende westlich abgelenkt wurde, soll als der normale Strom, derjenige, durch welchen das Nordende östlich abgelenkt wurde, als umgekehrter Strom bezeichnet werden. Ferner heisse die Schiebung des Wismuthstabs im Inductionsapparate in der Richtung von Westen nach Osten die normale Schiebung, in der Richtung von Osten nach Westen die umgekehrte Schiebung. Endlich heisse diejenige Stellung, welche der rotirende Commutator während der normalen Schiebung des Wismuthstabs hatte, seine normale Stellung, und die, welche er während der umgekehrten Schiebung des Wismuthstabs hatte, die umgekehrte Stellung. Die Drehung des Schwungrads geschah taktförmig nach dem Schlage einer Pendeluhr und es ergab sich, dass alsdann der Wismuthstab in jeder Secunde seine Bahn 10,58 Mal durchlief. Der Horizontalabstand des Spiegels der Magnetnadel von der Skala des Galvanometers betrug 1400 Skalentheile. Die Schwingungsdauer

der Galvanometernadel, welche für die ganze Richtkraft des Erdmagnetismus nahe 9 Secunden war, wurde nach der schon oben beschriebenen Methode durch Aufhebung eines Theils der erdmagnetischen Kraft auf 20,437 Secunden gebracht. Das logarithmische Decrement für die Abnahme der Schwingungsbögen war dabei = 0,12378.

Bei unveränderter Richtung des Stroms der galvanischen Säule in der Spirale des Elektrodiamagnets, und bei unveränderter Stellung des Hülfscommutators wurde die Galvanometernadel durch die diamagnetische Induction des von Westen nach Osten bewegten Wismuthstabs in demselben Sinne abgelenkt, wie wenn der Wismuthstab umgekehrt von Osten nach Westen bewegt wurde, wegen des dazwischen stattfindenden Wechsels des Rotationscommutators; die Ablenkung erfolgt daher bei schneller Hin- und Herschiebung wie wenn ein constanter Strom sie hervorbrächte. Wird aber die Stellung des Hülfscommutators gewechselt, so erfolgt eine Ablenkung der Nadel nach der entgegengesetzten Seite, woraus sich ergiebt, dass man zum Zwecke schärferer Beobachtung die Ablenkung der Nadel durch Multiplication verstärken kann, indem man die Stellung des Hülfscommutators immer in dem Augenblicke wechselt, wo die Nadel das Ende ihres Schwingungsbogens erreicht, so lange, bis endlich durch die Dämpfung der Nadel ihr Schwingungsbogen während jeder Schwingung um so viel verkleinert, wie durch den inducirten Strom vergrössert wird. Es wurde daher zwischen je zwei beobachteten Elongationen der Nadel die mit + oder — bezeichnete Stellung des Hülfscommutators bemerkt. War die Nadel zu Anfange der Beobachtungen schon in Schwingung, so wurde mit derjenigen Stellung des Hülfscommutators begonnen, bei welcher der inducirende Strom eine Abnahme des vorhandenen Schwingungsbogens hervorbrachte, welcher dann bei regelmässigem Wechsel bis Null abnahm und dann umgekehrt von Null an wuchs, bis er den Grenzwerth erreichte. Wenn die Nadel während der mit + bezeichneten Stellung des Hülfscommutators von kleineren auf grössere Skalentheile ging, ist in der folgenden Zusammenstellung das Vorzeichen + vor den Schwingungsbogen selbst gesetzt worden, im entgegengesetzten Falle das Vorzeichen —. Die Vorzeichen der Schwingungsbögen ergaben sich dann bei der diamagnetischen Induction des Wismuths denen bei der magnetischen Induction des Eisens entgegengesetzt und zugleich waren die letzteren Schwingungsbögen weit grösser,

wiewohl der Eisenstab viel dünner als der Wismuthstab war. Der Eisenstab wog nämlich bei gleicher Länge 790,86 Milligramm, der Wismuthstab 339300 Milligramm. Man brauchte daher, um die Wirkung der magnetelektrischen Induction zu messen, den Eisenstab nicht so schnell wie den Wismuthstab hin und herzu schieben, sondern es genügte eine einzige Schiebung desselben während jeder Schwingung der Nadel, in demjenigen Augenblicke, wo die schwingende Nadel ihre Ruhelage passirte. Die beiden Commutatoren blieben dabei in ihrer normalen Stellung und zwischen je zwei Elongationsbeobachtungen wurde allemal die Richtung bemerkt, nach welcher der Eisenstab verschoben wurde und zwar wurde die Richtung von Westen nach Osten mit +, die von Osten nach Westen mit — bezeichnet, wodurch die Vergleichung mit dem Wismuthstabe gegeben war. Die Beobachtungen ergeben dann für gleiche Schiebung des Eisen- und Wismuthstabs, wie schon erwähnt ist, entgegengesetzte Wirkungen.

Die Versuche wurden damit begonnen, dass 1) geprüft wurde, ob ein Einfluss des thermomagnetischen Stroms vorhanden, und wie gross derselbe war. Dazu wurde der Rotationscommutator in Bewegung gesetzt, ohne jedoch den Wismuthstab hin und her zu schieben. Die Wirkung wurde durch Wechsel des Hülfscommutators bei jeder Elongation multiplicirt. Sodann wurde 2) der Wismuthstab zugleich in Bewegung gesetzt und eine Reihe Beobachtungen bei normalem Strome gemacht; 3) dieselbe Reihe bei umgekehrtem Strome; 4) dieselbe Reihe wieder bei normalem Strome; 5) bei umgekehrtem Strome und 6) endlich nochmals bei normalem Strome. Darauf wurde 7) die Prüfung, ob ein Einfluss des thermomagnetischen Stroms vorhanden sei, wiederholt, und 8) der Wismuthstab mit dem Eisenstabe vertauscht und die Inductionswirkung des letzteren gemessen.

Göttingen, 1851. Juli 13.

Beobachter: Herr Professor Listing.

Galvanischer Strom von 8 Bunsen'schen Kohlen-Zinkbechern.

Nr. der Schwingung.	1. Thermomagnetischer Strom.			
	Stellung des Hülfscommutators.	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.
		497,0		
1.	+	496,2	496,45	— 0,5
2.	—	496,4	496,35	— 0,1
3.	+	496,4	496,30	+ 0,2
4.	—	496,0	496,15	+ 0,3
5.	+	496,2		

Hiernach war also fast gar kein Einfluss des thermomagnetischen Stroms vorhanden.

Nr. der Schwingung.	2. Induction des Wismuthstabes bei normalem Strome.				
	Stellung des Hülfscommutators.	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.	Ablenkung der Boussole.
		475,3			
1.	—	472,8	474,65	+ 3,70	32° 10' westlich.
2.	+	477,7	475,00	+ 5,40	
3.	—	471,8	475,20	+ 6,80	
4.	+	479,5	475,32	+ 8,35	
5.	—	470,5	475,33	+ 9,65	
6.	+	480,8	475,52	+ 10,55	
7.	—	470,0	475,70	+ 11,40	
8.	+	482,0	475,87	+ 12,25	
9.	—	469,5	475,85	+ 12,70	
10.	+	482,4	475,90	+ 13,00	
11.	—	469,3			

Nr. der Schwingung.	Stellung des Hülfscommutators.	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.	Ablenkung der Boussole.
	3. bei umgekehrtem Strome.				
		503,5			
1.	+	515,9	511,15	+ 9,50	31° 50′
2.	—	509,3	511,13	+ 3,65	östlich.
3.	+	510,0	510,62	— 1,25	
4.	—	513,2	510,82	— 4,75	
5.	+	506,9	510,58	— 7,35	
6.	—	515,3	510,85	— 8,90	
7.	+	505,9	510,70	— 9,60	
8.	—	515,7	510,72	— 9,95	
9.	+	505,6	510,53	— 9,85	
10.	—	515,2			
	4. bei normalem Strome.				
		480,5			
1.	+	471,0	474,57	— 7,15	31° 48′
2.	—	475,8	474,40	— 2,80	westlich.
3.	+	475,0	474,58	+ 0,85	
4.	—	472,5	474,40	+ 3,80	
5.	+	477,6	474,47	+ 6,25	
6.	—	470,2	474,23	+ 8,05	
7.	+	478,9	474,27	+ 9,25	
8.	—	469,1	474,10	+ 10,00	
9.	+	479,3	473,93	+ 10,75	
10.	—	468,0	473,65	+ 11,30	
11.	+	479,3	473,65	+ 11,30	
12.	—	468,0			

Nr. der Schwingung.	5. bei umgekehrtem Strome.				
	Stellung des Hülfscommutators.	Stand der Nadel am Anfange oder Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.	Ablenkung der Boussole.
		501,5			
1.	+	515,0	509,93	+ 10,15	32° 13′
2.	—	508,2	510,35	+ 4,30	östlich.
3.	+	510,0	510,02	— 0,05	
4.	—	511,9	510,20	— 3,40	
5.	+	507,0	509,80	— 5,60	
6.	—	513,3	509,68	— 7,25	
7.	+	505,1	509,42	— 8,65	
8.	—	514,2	509,38	— 9,65	
9.	+	504,0	509,05	— 10,10	
10.	—	514,0	508,72	— 10,55	
11.	+	502,9	508,40	— 11,00	
12.	—	513,8	508,15	— 11,30	
13.	+	502,1	507,83	— 11,45	
14.	—	513,3	507,67	— 11,25	
15.	+	502,0			
	6. bei normalem Strome.				
		486,0			
1.	+	461,0	471,20	— 20,40	31° 39′
2.	—	476,8	470,60	— 12,40	westlich.
3.	+	467,8	470,87	— 6,15	
4.	—	471,1	470,48	— 1,25	
5.	+	471,9	470,52	+ 2,75	
6.	—	467,2	470,08	+ 5,75	
7.	+	474,0	470,45	+ 7,10	
8.	—	466,6	470,25	+ 7,30	
9.	+	473,8	469,92	+ 7,75	
10.	—	465,5	469,83	+ 8,90	
11.	+	475,0	470,02	+ 9,70	
12.	—	465,1	470,13	+ 10,05	
13.	+	475,3	470,17	+ 10,25	
14.	—	465,0	470,08	+ 10,15	
15.	+	475,0	469,95	+ 10,10	
16.	—	464,8			

Nr. der Schwingung.	7. Thermomagnetischer Strom.				
	Stellung des Hülfscommutators.	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.	Ablenkung der Boussole.
		486,1			
1.	+	486,5	486,30	+ 0,40	
2.	—	486,1	486,22	+ 0,25	
3.	+	486,2	486,25	— 0,10	
4.	—	486,5	486,35	— 0,30	
5.	+	486,2	486,20	0,00	
6.	—	485,9	486,25	+ 0,70	
7.	+	487,0	486,48	+ 1,05	
8.	—	486,0	486,72	+ 1,45	
9.	+	487,9	487,05	+ 1,70	
10.	—	486,4	487,35	+ 1,90	
11.	+	488,7			
	8. Induction des Eisenstabs bei normalem Strome.				
		461,0			
1.	+	457,2	464,85	— 15,30	31° 48′
2.	—	484,0	467,17	— 33,65	westlich.
3.	+	443,5	466,30	— 45,60	
4.	—	494,2	466,73	— 54,95	
5.	+	435,0	466,10	— 62,20	
6.	—	500,2	466,47	— 67,45	
7.	+	430,5	466,25	— 71,50	
8.	—	503,8	466,55	— 74,50	
9.	+	428,1	466,55	— 76,90	
10.	—	506,2	466,90	— 78,60	
11.	+	427,1	467,05	— 79,90	
12.	—	507,8	467,38	— 80,85	
13.	+	426,8	467,35	— 81,10	
14.	—	508,0	467,35	— 81,30	
15.	+	426,6	467,35	— 81,50	
16.	—	508,2	467,33	— 81,75	
17.	+	426,3			

9.

Berechnung der Versuche.

Zählt man die Schwingungsbögen von demjenigen an, welcher der Null am nächsten ist, so lassen sich die dem Grenzwerthe am nächsten kommenden, mit Hülfe des bekannten logarithmischen Decrements der Abnahme der Schwingungsbögen = 0,12378, auf den Grenzwerth reduciren durch Division des *n*ten Schwingungsbogens mit $(1 - 0{,}752^n)$. Hiernach ergeben sich für die mit Wismuth gemachten Versuche folgende reducirte Werthe:

	Schwingungsbogen	beobachtet	reducirt	Mittel.
2.	8.	+ 11,40	+ 13,20	+ 13,60
	9.	+ 12,25	+ 13,65	
	10.	+ 12,70	+ 13,75	
	11.	+ 13,00	+ 13,80	
3.	8.	— 9,60	— 14,12	— 13,08
	9.	— 9,95	— 13,10	
	10.	— 9,85	— 12,02	
4.	9.	+ 10,00	+ 13,17	+ 13,06
	10.	+ 10,75	+ 13,12	
	11.	+ 11,30	+ 13,08	
	12.	+ 11,30	+ 12,88	
5.	10.	— 10,10	— 12,33	— 12,16
	11.	— 10,55	— 12,21	
	12.	— 11,00	— 12,25	
	13.	— 11,30	— 12,24	
	14.	— 11,45	— 12,15	
	15.	— 11,25	— 11,76	
6.	11.	+ 8,90	+ 10,86	+ 10,95
	12.	+ 9,70	+ 11,23	
	13.	+ 10,05	+ 11,20	
	14.	+ 10,25	+ 11,10	
	15.	+ 10,15	+ 10,77	
	16.	+ 10,10	+ 10,56	

Bezeichnet man den geringen Einfluss, welchen der thermomagnetische Strom auf das Resultat dieser Messungen ausübte, mit x, so erhält man aus obigen Angaben den der diamagnetischen Induction allein entsprechenden Grenzwerth auf normalen Strom reducirt:

aus 2.	$+ 13{,}60 + x$	
3.	$+ 13{,}08 - x$	$+13{,}34$
4.	$+ 13{,}06 + x$	$+13{,}07$
5.	$+ 12{,}16 - x$	$+12{,}61$
6.	$+ 10{,}95 + x$	$+11{,}555$

also im Mittel aus allen Beobachtungen

$$= + 12{,}644.$$

Aus diesem Grenzwerthe der Schwingungsbögen, welcher nach der Methode der Multiplication gefunden worden ist, bei gleichförmiger Vertheilung der Inductionsstösse auf die ganze Schwingungsdauer der Nadel, lässt sich nun leicht auch derjenige Grenzwerth ableiten, welcher nach derselben Methode der Multiplication erhalten worden wäre, wenn alle Inductionsstösse, statt gleichförmig auf die ganze Schwingungsdauer vertheilt, auf den Augenblick, wo die Nadel ihre Ruhelage passirte, concentrirt gewesen wären, wodurch das für Wismuth erhaltene Resultat mit dem für Eisen vergleichbar gemacht wird. Setzt man nämlich das bekannte logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbögen $0{,}12378 = \lambda \log e$, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet; so findet man aus obigem Grenzwerthe den gesuchten durch Multiplication mit

$$\frac{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}{1 + e^{-\lambda}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} = 1{,}574235,$$

erhält also den gesuchten Grenzwerth

$$+ 1{,}574235 \,.\, 12{,}644 = + 19{,}905.\text{*)}$$

*) Sind die Inductionsstösse sehr zahlreich und gleichförmig auf die ganze Schwingungsdauer vertheilt, so wirken sie wie ein constanter Strom auf die Nadel und es lässt sich dann auf den nach der Methode der Multiplication erhaltenen Grenzwerth x die S. 348. 501 angeführte Regel anwenden, wonach $x = \frac{1 + e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \cdot 2E$ ist, wenn E die dem Gleichgewichte der Nadel bei constantem Strome entsprechende Ablenkung und



Die Reduction der mit Eisen gemachten Versuche auf ihren Grenzwerth giebt folgende Resultate:

Schwingungsbogen.	beobachtet	reducirt	Mittel.
8.	— 71,50	— 84,98	
9.	— 74,50	— 84,60	
10.	— 76,90	— 84,47	
11.	— 78,60	— 84,28	
12.	— 79,90	— 84,16	— 83,876
13.	— 80,85	— 84,04	
14.	— 81,10	— 83,50	
15.	— 81,30	— 83,10	
16.	— 81,50	— 82,85	
17.	— 81,75	— 82,78	

$\lambda \log e$ das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbögen bezeichnet. Bei dieser Gleichgewichtslage der Nadel ist nun die ablenkende Kraft der aus der Directionskraft der Nadel resultirenden Kraft gleich, welche bekanntlich durch $\frac{\pi\pi}{TT}\cdot E$ dargestellt wird, wenn T die Schwingungsdauer ohne Einfluss der Dämpfung bezeichnet. Ist nun τ die wirkliche Schwingungsdauer, unter dem Einflusse der Dämpfung, so ist die Geschwindigkeit, welche die auf die ganze Schwingungsdauer gleichförmig vertheilte Stromkraft, wenn sie auf einen Augenblick concentrirt wirkte, der Nadel ertheilen würde $=\frac{\pi\pi}{TT}\cdot E\tau$. Aus dieser Geschwindigkeit lässt sich aber der Grenzwerth der Schwingungsbögen berechnen, dem man sich nach der Methode der Multiplication nähern würde, wenn jene concentrirte Kraft allemal in dem Augenblicke auf die Nadel wirkte, wo sie ihre Ruhelage passirt. Bezeichnet man nämlich diesen Grenzwerth mit y, so ist nach der in der vorigen Abhandlung S. 348 f. gegebenen Regel, wenn man den angegebenen Werth der Geschwindigkeit $=\frac{\pi\pi}{TT}\cdot E\tau$ einsetzt:

$$\frac{\pi\pi}{TT}\cdot E\tau = \frac{y}{2}\cdot\frac{\pi}{T}(1-e^{-\lambda})\,e^{\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Die Vergleichung des hieraus sich ergebenden Werths von y mit dem oben angegebenen von x führt zu der Proportion:

$$y : x = \frac{\pi\tau}{T}\,e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}} : (1+e^{-\lambda}),$$

worin nach der Theorie der Dämpfung für den Quotienten $\frac{\tau}{T}$ auch $\sqrt{\left(1+\frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}$ gesetzt werden kann.

Es folgt hieraus das Verhältniss der beiden dem Wismuthstabe und dem Eisenstabe entsprechenden Grenzwerthe wie

$$+ 19{,}905 : - 83{,}876.$$

Aehnliche Versuchsreihen sind von mir, Herrn Dr. von Quintus Icilius und von Herrn Dr. Riemann ausgeführt und auf gleiche Weise berechnet worden, woraus statt des angegebenen Verhältnisses folgende gefunden worden waren:

$$+ 18{,}158 : - 83{,}82$$
$$+ 15{,}357 : - 82{,}80$$
$$+ 14{,}890 : - 83{,}45.$$

Im Mittel aus allen Reihen ergiebt sich hiernach das Verhältniss

$$+ 16{,}956 : - 83{,}49.$$

Nun verhält sich die Intensität der vom Wismuthstabe und Eisenstabe inducirten Ströme diesen Grenzwerthen direct proportional, und umgekehrt proportional der Zahl der Inductionsstösse während einer Schwingung, für welche sie gelten, d. i. der Zahl $10{,}58 . 20{,}437 = 216{,}2$ für den Wismuthstab und der Zahl 1 für den Eisenstab. Die vom diamagnetischen Wismuthstabe inducirten elektrischen Ströme sind also ihrer Richtung nach den vom magnetischen Eisenstabe inducirten elektrischen Strömen entgegengesetzt und verhalten sich ihrer Intensität nach wie

$$16{,}956 : 83{,}49 . 216{,}2 = 1 : 1064{,}5,$$

ungeachtet der Wismuthstab 339300 Milligramm und der Eisenstab bloss 790,86 Milligramm wog. Hiernach kann man rechnen, dass wenn der Wismuthstab auch ein so geringes Gewicht wie der Eisenstab gehabt hätte, die Stärke des von ihm diamagnetisch inducirten Stroms 456700 Mal geringer gewesen sein würde, als die des vom Eisenstabe magnetisch inducirten Stroms.

10.

Vergleichung der beiden Bestimmungen der Stärke eines Elektrodiamagnets aus seiner magnetischen und magnetelektrischen Wirkung.

Nachdem in den beiden vorhergehenden Abschnitten die magnetische und die magnetelektrische Wirkung eines Elektrodiamagnets einzeln betrachtet worden sind, gehen wir endlich zur quan-

titativen Vergleichung beider Arten von Wirkungen unter einander über. Es könnte scheinen, dass sich diese Vergleichung ganz einfach ausführen liesse, indem man bloss 1) die beobachtete magnetische Wirkung des Elektrodiamagnets in Theilen der ebenfalls beobachteten magnetischen Wirkung des Elektromagnets, 2) die beobachtete magnetelektrische Wirkung des Elektrodiamagnets in Theilen der ebenfalls beobachteten magnetelektrischen Wirkung des Elektromagnets ausdrückte, wie dies schon oben geschehen ist und zu folgenden Resultaten geführt hat:

$$1)\quad \frac{\text{Magnetische Wirkung des Elektrodiamagnets}}{\text{Magnetische Wirkung des Elektromagnets}} = \frac{1}{1470000},$$

$$2)\quad \frac{\text{Magnetelektrische Wirkung des Elektrodiamagnets}}{\text{Magnetelektrische Wirkung des Elektromagnets}} = \frac{1}{456700}.$$

Diese einfache Vergleichung würde aber nur dann richtig sein, wenn 1) derselbe Elektrodiamagnet, welcher zur Darstellung der magnetischen Wirkungen gebraucht wurde, auch zur Darstellung der magnetelektrischen Wirkungen gedient hätte, und wenn ebenso 2) derselbe Elektromagnet zur Darstellung beider Arten von Wirkungen angewendet worden wäre, und wenn endlich 3) sowohl jener Elektrodiamagnet als auch dieser Elektromagnet dabei aus grösserer Entfernung gewirkt hätte, im Vergleiche zu ihren eigenen Dimensionen und zu denen des Körpers, auf welchen gewirkt wurde. Diese Bedingungen sind aber bei obigen Versuchen nicht erfüllt worden, und es war auch nicht möglich sie zu erfüllen, weil die Darstellung der magnetelektrischen Wirkungen die Anwendung ganz anderer Apparate als die der magnetischen Wirkungen und möglichste Verkleinerung der Entfernungen der auf einander wirkenden Körper nothwendig machte.

Werden aber, wie dies geschehen ist, zur Darstellung der magnetischen und magnetelektrischen Wirkungen verschiedene Elektrodiamagnete und verschiedene Elektromagnete gebraucht, so lässt sich, auch wenn sie aus grösseren Entfernungen wirkten, keine Gleichheit in den angegebenen Verhältnissen erwarten, und die darin sich zeigende Ungleichheit (dass nämlich das eine Verhältniss etwa 3 Mal grösser als das andere war) würde noch weit grösser ausgefallen sein, wenn nicht schon bei der Bestimmung dieser Verhältnisse auf die Verschiedenheit der Massen Wismuth und Eisen, welche zu den verschiedenen Elektrodiamagneten und Elektromagneten gebraucht wurden, Rücksicht genommen worden wäre. Durch diese Berücksichtigung der

Ungleichheit der Massen wurde die gröbste stattfindende Verschiedenheit ausgeglichen und es ist interessant zu bemerken, dass durch diese Berücksichtigung die oben angeführten Verhältnisse einander schon wirklich so nahe gebracht worden sind, dass sie als Grössen derselben Ordnung betrachtet werden können.

Es kommt daher darauf an, auch noch die anderen Verschiedenheiten aufzusuchen und zu bestimmen, welche nächst der Massenverschiedenheit den grössten Einfluss haben, um zu prüfen, wie dadurch die oben angeführten Verhältnisse geändert und ob sie der Gleichheit dadurch noch näher gebracht werden.

Diese Untersuchung ist darum von Wichtigkeit, weil wenn gar keine Verschiedenheit der gebrauchten Elektrodiamagnete und Elektromagnete stattgefunden und beide aus grösserer Entfernung gewirkt hätten, nach den in der Einleitung aufgestellten Gesetzen der diamagnetischen Polarität die beiden obigen Verhältnisse sich ganz gleich ergeben müssten. Da sich nun aber diese Gleichheit praktisch nicht unmittelbar prüfen lässt, so ist es wichtig, dass man wenigstens prüft, ob man sich dieser Gleichheit desto mehr nähere, je genauer man die factische Verschiedenheit der gebrauchten Elektrodiamagnete und Elektromagnete und den verschiedenen Einfluss, welchen die geringe Entfernung, aus der sie wirken, auf das Verhältniss ihrer Wirkungen ausübt, bestimmt und berücksichtigt, wodurch man näherungsweise dasselbe erreicht, wie wenn man die behauptete Gleichheit unmittelbar zu prüfen im Stande wäre.

Zu diesem Zwecke dient nun die folgende Uebersicht und Erörterung aller hierbei in Betracht kommenden Differenzen.

Erstens müsste eigentlich bei der geringen Entfernung, auf welche sich die beobachteten Wirkungen beziehen, zum Zwecke einer genauen Vergleichung die ideale Vertheilungsweise der magnetischen Fluida, wie sie an der Oberfläche des Wismuthstabes anzunehmen sei, im Vergleiche zu der bei dem Eisenstabe anzunehmenden, näher bekannt sein. Da dies nicht der Fall ist, so leuchtet ein, dass eine solche Vergleichung, auch wenn die Genauigkeit der Beobachtungen nichts zu wünschen liesse, doch nur einen ungefähren Ueberschlag geben kann, weil dabei die in geringen Entfernungen ausgeübten Wirkungen den Momenten proportional gesetzt werden müssen, was genau nur von den Wirkungen in grösseren Entfernungen gilt.

Zweitens sind bei obigen Versuchen zwei verschiedene Eisenstäbchen gebraucht worden, von denen das eine bloss 5,8, das andere 790,86 Milligramm wog. Wir dürfen nicht voraussetzen, dass das Eisen beider Stäbchen in magnetischer Beziehung sich ganz gleich verhalte. Es wurde daher der Magnetismus beider Stäbchen unter Einwirkung desselben galvanischen Stroms verglichen, und in der That ergab sich bei geringerer Intensität dieses Stroms, dass das Verhältniss des magnetischen Moments von dem Verhältnisse ihrer Massen sehr abwich; bei wachsender Intensität des Stroms verschwand aber diese Ungleichheit und der Magnetismus beider Stäbchen ergab sich bald ihren Massen fast genau proportional, woraus folgt, dass bei unsern Versuchen, wo noch stärkere Ströme gebraucht wurden, eine Reduction wegen Verschiedenartigkeit des Eisens nicht nöthig ist.

Drittens sind bei obigen Versuchen verschiedene Wismuthstäbe gebraucht worden, nämlich zwei kleinere zur Beobachtung der magnetischen, und ein grösserer zur Beobachtung der magnetelektrischen Wirkung, von denen auch nicht vorausgesetzt werden kann, dass sie sich in diamagnetischer Beziehung ganz gleich verhielten. Es wurde daher der letztere in zwei Hälften getheilt, die den beiden ersteren an Länge und Dicke nahe gleich waren und darauf mit beiden Paaren abwechselnd einige Versuche zur Vergleichung ihres Diamagnetismus gemacht, aus denen sich allerdings eine nicht ganz unerhebliche Verschiedenheit herausstellte; es verhielt sich nämlich die Wirkung des ersten Paares zu der des zweiten etwa wie 1266 : 1000. Wenn sich also aus den Inductionswirkungen des grösseren Stabs Art. 8. 9 das diamagnetische Moment des Wismuths im Vergleiche zum magnetischen Momente des Eisens $= \frac{1}{456700}$ ergiebt, so würde es für das Wismuth des andern Stabs $= \frac{1}{360740}$ erhalten werden, wodurch die Differenz dieses Verhältnisses von dem aus den magnetischen Wirkungen abgeleiteten nicht verkleinert, sondern sogar noch vergrössert wird.

Viertens kommt aber auch noch die Verschiedenheit der elektromagnetischen Scheidungskraft der beiden gebrauchten Apparate in Betracht. Diese Verschiedenheit lässt sich mit hinreichender Genauigkeit aus den für diese Apparate gegebenen Bestimmungen ableiten und es ergiebt sich daraus, dass die elektromagnetische Scheidungskraft des Inductionsapparats 4,8 Mal grösser als die des elektro-

diamagnetischen Messapparats war*). Zugleich ergiebt sich, dass in beiden Apparaten die elektromagnetische Scheidungskraft eine solche Stärke besass, dass nach Müller's interessanten Versuchen das magnetische Moment der Eisenstäbchen nicht merklich von seinem Maximumwerthe verschieden sein konnte**), dass also die 4,8 Mal

---

*) Die Drahtspirale des elektrodiamagnetischen Messapparats hatte nach Art. 2 4 Lagen jede von 146 Windungen und war 190 Millimeter lang; ihr innerer Durchmesser war 17, der äussere 26 Millimeter, und die Intensität des durchgehenden Stroms war nach Art. 3 = 16,31. Hieraus ergiebt sich die elektromagnetische Scheidungskraft in ihrer Mitte sehr nahe

$$= \frac{4 \cdot 146 \cdot 2\pi \cdot 16,31}{\frac{1}{2} \cdot 190} = 629,9.$$

Die Drahtspirale des Inductionsapparats dagegen hatte nach Art. 7 8 Lagen jede von 120 Windungen und war 383 Millimeter lang; ihr innerer Durchmesser war 23,9, der äussere 70 Millimeter und die Ablenkung einer in 708 Millimeter westlichen Abstand befindlichen Boussole war nach den Versuchen Art. 7 etwa 32°, wobei die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus = 1,8 zu setzen ist. Hieraus lässt sich zunächst die Intensität des Stroms i berechnen und ergiebt sich sehr nahe

$$i = \frac{383}{S} \cdot \frac{1,8 \cdot \tang 32^0}{\frac{1}{(708 - \frac{1}{2}\, 383)^2} - \frac{1}{(708 + \frac{1}{2}\, 383)^2}}$$

wo S den von der Spirale umwundenen Flächenraum, welcher = 1793200 Quadratmillimeter gefunden wird, also $i = 95,6$. Die gesuchte Scheidungskraft der Spirale folgt hieraus sehr nahe $= \frac{8 \cdot 120 \cdot 2\pi \cdot 95,6}{\frac{1}{2} \cdot 383} = 3012$. Es verhält sich aber 3012 : 629,9 sehr nahe wie 4,8 : 1.

**) Ein weicher Eisenstab nimmt bald einen schwächeren bald einen stärkeren Magnetismus an, je nachdem die magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft, die auf ihn wirkt, kleiner oder grösser ist. Herr Professor Joh. Müller in Freiburg hat nun in seinem »Berichte über die neuesten Fortschritte der Physik« Braunschweig 1850, S. 494 ff. eine interessante Untersuchung über die Abhängigkeit des Magnetismus solcher Eisenstäbe von der Stärke der auf sie wirkenden Scheidungskräfte mitgetheilt, welche sich dadurch auszeichnet, dass der Magnetismus der Eisenstäbe für sehr verschiedene, auch sehr grosse, Scheidungskräfte bestimmt worden ist. Es hat sich daraus das merkwürdige Resultat ergeben, dass der Magnetismus des Eisenstabs der Scheidungskraft, welche auf das Eisen wirkt, keineswegs immer proportional bleibt, sondern dass er sich bei grösseren Scheidungskräften einem Grenzwerthe nähert. Müller hat die Resultate seiner mit einer elektromagnetischen Spirale gemachten Messungen in folgender Formel zusammengefasst:

$$s = 0,016 \cdot d^{\frac{3}{2}} \cdot \tang \frac{m}{0,00108 \cdot dd},$$

worin, wenn i die Stromstärke der elektromagnetischen Spirale nach absolutem Maasse bezeichnet (nach S. 252 a. a. O.)

$$i = 66,813 \cdot s,$$

stärkere Scheidungskraft des Inductionsapparats dem Eisenstäbchen keinen stärkeren Magnetismus ertheilte, als er durch die einfache Kraft

---

und (nach S. 511) wenn M den Magnetismus des Eisenstabs in der elektromagnetischen Spirale nach absolutem Maasse bezeichnet,

$$M = 5426021 \, . \, m$$

zu setzen ist. Die von Müller gebrauchten Eisenstäbe waren (nach S. 502) 330 Millimeter lang und lagen in einer Drahtspirale, welche 300 Millimeter lang war, aus der sie auf beiden Seiten 15 Millimeter hervorragten. d bezeichnet die Dicke des Eisenstabs. Die Drahtspirale bestand aus 5 Lagen übereinander, jede zu 76 Windungen; ihr innerer Durchmesser war 49 Millimeter und die Dicke des Drahts 2,8 Millimeter. Hiernach wird die Stärke der Scheidungskraft, welche der Strom einer Lage von Windungen, deren Halbmesser $= r$ ist, auf einen Punkt des Eisenstabs ausübt, welcher in der Entfernung $= a$ von der Mitte der Spirale liegt, durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$\frac{2 \, . \, 76}{300} \pi r r i \int_{a-150}^{a+150} \frac{dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{152}{300} \pi i \left\{ \frac{a+150}{\sqrt{((a+150)^2 + rr)}} - \frac{a-150}{\sqrt{((a-150)^2 + rr)}} \right\}.$$

Im Mittel für den ganzen Eisenstab folgt hieraus die Stärke dieser Kraft

$$\frac{152 \, . \, \pi i}{300 \, . \, 330} \int_{-165}^{+165} \left[\frac{a+150}{\sqrt{((a+150)^2 + rr)}} - \frac{a-150}{\sqrt{((a-150)^2 + rr)}} \right] da$$

$$= \frac{304 \, . \, \pi i}{99000} \left\{ \sqrt{(315^2 + rr)} - \sqrt{(15^2 + rr)} \right\}.$$

Endlich für alle 5 Lagen:

$$\frac{304 \, . \, \pi i}{99000} \cdot \frac{5}{14} \int_{24,5}^{38,5} \left[\sqrt{(315^2 + rr)} - \sqrt{(15^2 + rr)} \right] dr = 13{,}562 \, . \, i.$$

Diese Kraft unterscheidet sich von der erdmagnetischen Kraft nur durch ihre Stärke und kann daher nach demselben absoluten Maasse bestimmt werden, was hier auch geschehen ist. Wir wollen die Stärke dieser Kraft mit X bezeichnen, so ist also

$$X = 13{,}562 \, i.$$

Setzt man nun diese Werthe in die Müller'sche Gleichung, so erhält man

$$X = 14{,}498 \, . \, d^{\frac{3}{2}} \, . \, \text{tang} \, \frac{M}{5860 \, . \, dd}.$$

Diese Formel gilt zunächst für Eisenstäbe von 330 Millimeter Länge; um sie auf andere Stablängen anwendbar zu machen, muss der Bogen $\frac{M}{5860 \, . \, dd}$ mit 330 multiplicirt und mit der Stablänge l dividirt werden, also

$$X = 14{,}498 \, . \, d^{\frac{3}{2}} \, . \, \text{tang} \, \frac{M}{17{,}76 \, . \, ddl},$$

jedoch hat Müller selbst bemerkt, dass der so in Rechnung gebrachte Einfluss der Länge mit der Erfahrung nicht genau übereinstimme und daher noch einer genaueren Prüfung bedürfe. Wendet man nun diese aus den Müller'schen Versuchen abgeleitete Regel an,

erhalten haben würde. Anders verhält es sich mit den Wismuthstäben, deren diamagnetisches Moment auch noch mit den grössten darstellbaren Scheidungskräften proportional wachsend anzunehmen ist*).

---

um den Magnetismus der beiden Eisenstäbchen zu bestimmen, welche sich in den beiden oben beschriebenen Spiralen des elektrodiamagnetischen Messapparats und des Inductionsapparats befanden, so hat man für das erste Stäbchen $l = 92$ und ausserdem sein absolutes Gewicht = 5,8 Milligramm und sein specifisches Gewicht = 7,78, woraus seine Dicke $d = 0{,}1016$ folgt. Der Werth von X für dieses Stäbchen ist in der vorigen Note bestimmt $X = 629{,}9$; man erhält also für dieses Stäbchen

$$\frac{M}{ddl} = 17{,}76 \text{ arc tang } 89^0\ 57'\ 23'' = 27{,}886.$$

Für das zweite Stäbchen ist $l' = 186$, ausserdem ist sein absolutes Gewicht = 790,86 Milligramm und sein specifisches Gewicht = 7,78, woraus seine Dicke $d' = 0{,}8342$ gefunden wird. Der Werth von X' ist für dieses Stäbchen in der vorigen Note bestimmt $X' = 3012$; man erhält daher

$$\frac{M'}{d'd'l'} = 17{,}76 \text{ arc tang } 89^0\ 47'\ 23'' = 27{,}834.$$

Bemerkt man, dass hierin ddl und $d'd'l'$ den Massen der beiden Eisenstäbchen proportional sind, so ergiebt sich hieraus ein ganz nahe gleiches Verhältniss des Magnetismus zur Masse für beide Stäbchen, ungeachtet auf das letztere Stäbchen eine 4,8 Mal grössere Scheidungskraft wirkte. Eine genauere Bestimmung hierüber findet man Art. 24 bis 26, wo auch die von Buff und Zamminer gegen die Müller'schen Versuche erhobenen Bedenken erörtert werden.

*) Aus keiner bisher bekannten Thatsache lässt sich eine Abweichung von dem Gesetze der Proportionalität des Diamagnetismus mit der magnetischen Scheidungskraft entnehmen, vielmehr lassen sich, wenn es auch an Messungen fehlt, verschiedene für dieses Gesetz sprechende Thatsachen anführen. Die wichtigste und auch in anderen Beziehungen interessanteste ist die von Plücker entdeckte und näher untersuchte Thatsache, wonach derselbe Magnetpol je nach der verschiedenen Entfernung in derselben Masse, z. B. in Holzkohle, Diamagnetismus oder Magnetismus hervorruft. Die nähere Untersuchung, welche Plücker hierüber in Poggendorff's Annalen 1848, Bd. 73, S. 616 ff. mitgetheilt hat, beweist, dass hierbei die verschiedene Entfernung des Magnetpols unmittelbar als solche nicht in Betracht kommt, sondern nur indirect, insofern einer grösseren Entfernung eine Abnahme der Kraft entspricht; Plücker hat nämlich bewiesen, dass der Magnetismus der Holzkohle in Diamagnetismus verwandelt werde durch die blosse Zunahme der auf die Holzkohle wirkenden magnetischen Kraft. Diese interessante Thatsache findet nämlich ihre einfachste Erklärung nach obigem Gesetze der Proportionalität des Diamagnetismus mit der magnetischen Scheidungskraft, sobald man dabei nur das von Müller für den Magnetismus des Eisens bewiesene Gesetz auch für den Magnetismus der Holzkohle gelten lässt; denn nähert sich der Magnetismus der Holzkohle bei zunehmender Scheidungskraft einem Grenzwerthe, während der Diamagnetismus der

Reducirt man hiernach das aus den Inductionswirkungen erhaltene Resultat auf eine 4,8 Mal schwächere Scheidungskraft, um es mit dem aus der magnetischen Wirkung erhaltenen Resultate vergleichbar zu machen, so muss das diamagnetische Moment des Wismuths 4,8 Mal kleiner genommen werden, während das magnetische Moment des Eisens unverändert bleibt. Man erhält dann für das erstere Moment im Vergleiche zu dem letzteren, statt $\frac{1}{360740}$, blos $\frac{1}{4,8 . 360740} = \frac{1}{1731560}$.

Dieses aus der magnetelektrischen Wirkung abgeleitete Resultat lässt sich nun mit dem aus der magnetischen Wirkung Art. 4 gefundenen direct vergleichen, wonach nämlich das diamagnetische Moment des Wismuths im Vergleiche zum magnetischen Momente des Eisens $= \frac{1}{1470000}$ erhalten wurde.

Die Differenz der beiden betrachteten Verhältnisse, welche vorher 200 Procent betrug, ist durch Berücksichtigung der angegebenen Verschiedenheit auf etwa 17 bis 18 Procent reducirt worden und diese Annäherung an die Gleichheit muss um so befriedigender erscheinen, als dabei, weil der zuerst angeführte Grund jener Differenz unberücksichtigt bleiben musste, nur von einer ungefähren Vergleichung die Rede sein konnte. Auch ist zu bemerken, dass der zuletzt angegebene, bei weitem einflussreichste Grund jener Differenz noch einer genaueren Berücksichtigung fähig ist, wenn dabei statt der oben angeführten Müller'schen Versuche die genaueren darüber gewonnenen Resultate zum Grunde gelegt werden, die man Art. 24 bis 26 zusammengestellt findet, wodurch, wie in der Note Art. 27 angegeben ist, das Verhältniss $\frac{1}{1470000}$ auf $\frac{1}{1593000}$ vermindert wird, so dass nur noch eine Differenz von etwa 8 Procent im Vergleiche mit dem andern Verhältnisse übrig bleibt.

Nach dieser Vergleichung des Verhältnisses der magnetischen und magnetelektrischen Wirkungen eines Elektrodiamagnets mit dem Verhältnisse der magnetischen und magnetelektrischen Wirkungen eines Elektromagnets findet sich also das Resultat bestätigt, dass in der Natur des Diamagnetismus die elektrodiamagnetische und die diamagnetelektrische Wirksamkeit wirklich ebenso begründet ist,

---

Holzkohle gleichmässig fortwächst, so leuchtet von selbst ein, dass der Diamagnetismus endlich den Magnetismus übertreffen muss, was so viel heisst, als dass der Magnetismus der Holzkohle in Diamagnetismus verwandelt werde.

wie in der Natur des Magnetismus die elektromagnetische und die magnetelektrische, und zwar stehen auch jene Wirkungen ihrer Grösse nach in demselben Verhältnisse zu einander, wie diese, so weit sich dies prüfen lässt, zum Beweise, dass zwischen diamagnetischer und magnetischer Wirksamkeit in den verschiedenartigsten Beziehungen gar kein Unterschied stattfindet, wodurch das in der Einleitung aufgestellte Gesetz der diamagnetischen Polarität bewiesen ist.

Es bliebe hiernach nur noch übrig, die aus den obigen Versuchen gefundenen Resultate zu benutzen, um das Verhältniss zu bestimmen, in welchem die Stärke des Wismuthdiamagnetismus zur Stärke des Eisenmagnetismus steht. Es leuchtet aber aus den vorhergegangenen Erörterungen ein, dass von einem bestimmten Verhältnisse des Diamagnetismus des Wismuths zum Magnetismus des Eisens im Allgemeinen nicht die Rede sein könne, weil, wenn man auch Wismuth- und Eisenstäbe von gleicher Grösse und Gestalt dabei voraussetzt, jenes Verhältniss doch bei verschiedener Stärke der magnetischen Scheidungskraft sehr verschieden erhalten wird, indem der Diamagnetismus bei zunehmender Scheidungskraft gleichmässig wächst, während der Magnetismus sich einem Grenzwerthe nähert. Ein solches Verhältniss lässt sich daher nur unter der Beschränkung bestimmen, dass die magnetischen Scheidungskräfte so klein sind, dass die Abweichung des Eisenmagnetismus von der Proportionalität mit diesen Kräften dabei noch nicht merklich sei. Unter dieser Beschränkung liesse sich nun zwar nach obigen Resultaten, mit Hülfe des in der Note S. 527 angeführten Müller'schen Gesetzes, das Verhältniss des Wismuthdiamagnetismus zum Eisenmagnetismus bestimmen; es ist aber zweckmässiger, diese Bestimmung zu verschieben, um dabei für den Eisenmagnetismus auch diejenigen Versuche zu benutzen, die wir im letzten Abschnitte Art. 25. 26. kennen lernen werden, wo dann die Bestimmung jenes Verhältnisses beigefügt werden soll.

11.

Faraday's Versuche.

Es soll hier nicht von Faraday's früheren Versuchen gehandelt werden, durch die er zuerst zu der Annahme geführt worden war, welche Plücker am kürzesten in den Worten ausspricht: «Im Wismuth inducirt jeder Nordpol eines Magneten einen Nordpol, jeder Südpol einen Südpol.» Plücker sagt von dieser Annahme, dass jeder Physiker darauf verfallen musste, und dass diamagnetische Polarität eine nothwendige Folge derselben sei. Wir beschränken uns hier auf diejenigen Versuche, welche von Faraday neuerlich zur Widerlegung dieser von ihm zuerst vermutheten diamagnetischen Polarität gemacht worden sind.

In der That waren bald, nachdem die Wichtigkeit eingeleuchtet hatte, welche die wirkliche Nachweisung der diamagnetischen Polarität besitzt, so viele und verschiedene Thatsachen dafür gefunden und mitgetheilt worden, dass diese Polarität fast ausser allem Zweifel gesetzt zu sein schien. Ich habe in meinem ersten Aufsatze (Berichte der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften 1847, S. 346 und Poggendorffs Annalen 1848, Bd. 73, S. 242) besonders die Beweiskraft hervorgehoben, welche in dieser Beziehung der von Reich angestellte Versuch besitzt, wonach Nordpol und Südpol, wenn sie von derselben Seite her auf ein Stück Wismuth wirken, keineswegs dasselbe mit der Summe der Kräfte abstossen, welche sie einzeln ausüben würden, sondern vielmehr nur mit der Differenz dieser Kräfte — und habe andere Versuche beigefügt, welche die beiden Pole eines in diamagnetischem Zustande erhaltenen Wismuthstabs durch den Gegensatz von Anziehung und Abstossung unmittelbar erkennen liessen. Endlich fügte ich auch die mit dem in Art. 7 erwähnten Apparate gemachten Versuche bei, welche gleiche von Diamagnetpolen wie von Magnetpolen ausgeübte elektromotorische Kräfte nachzuweisen schienen. Hieran schlossen sich unmittelbar einige Versuche von Poggendorff an (Annalen 1848, Bd. 73, S. 475 f.), welche theils zur Bestätigung, theils zur Ergänzung dienten, indem sie besonders die Nachweisung der beiden Diamagnetpole durch den Gegensatz der Wirkung gaben, welche der galvanische Strom auf sie ausübt, und geradezu bewiesen, dass ein Wismuthstab in der äquatorialen Lage ein wirklicher Transversal-

magnet wäre, der die Linie seiner Nordpole dem Nordpole und die Linie seiner Südpole dem Südpole des Magnets zukehrte, was ausserdem Plücker (Annalen 1848, Bd. 73, S. 613f.) durch eine sehr sinnreiche darauf gegründete Anwendung bestätigt fand, welche ein einfaches und praktisch wichtiges Mittel an die Hand gab, den Diamagnetismus schwingender Körper bedeutend zu verstärken. Plücker erklärte es dabei selbst für unwidersprechlich, dass der Diamagnetismus in einer polaren Erregung bestehe, eine Theorie, die er zuvor nur wegen der grossen Schwierigkeiten ihrer allgemeinen Begründung fallen gelassen habe und erst dann wieder aufgenommen, als die Polarität so entschieden nachgewiesen worden. Endlich hat Plücker an diesem Orte selbst noch eine der hauptsächlichsten der von ihm erwähnten Schwierigkeiten, nämlich die, welche aus dem bei manchen Körpern beobachteten magnetischen Verhalten in grösserer, und dem diamagnetischen Verhalten in kleinerer Entfernung vom Magnetpole entsprang (siehe die Note S. 529), durch die nähere Untersuchung in solcher Weise erledigt, dass, wie er selbst sagt, «das von ihm nicht vermuthete, aber von rein theoretischem Gesichtspunkte aus zu erwartende Resultat statt der früheren Schwierigkeit eine merkwürdige Bestätigung der von Faraday, Reich, Weber und Poggendorff adoptirten Theorie des Diamagnetismus gebe, zu der auch er sich jetzt entschieden bekenne.»

Allen diesen schnell auf einander gefolgten, in demselben 73. Bde. von Poggendorffs Annalen enthaltenen Nachweisungen der von Faraday zuerst vermutheten diamagnetischen Polarität widerspricht nun Faraday durch seine 23ste Versuchsreihe, deren nähere Betrachtung auch für die hier beschriebenen Versuche von Wichtigkeit ist.

Bei der Autorität, welche dieser grosse Naturforscher mit so vollem Rechte geniesst, und dem Interesse, welches seine Arbeiten überall erregen, dürfen die von ihm angeführten Versuche zur Widerlegung der diamagnetischen Polarität als bekannt vorausgesetzt werden. Auch kann es sich nicht um die Richtigkeit dieser Versuche handeln, an der bei Faraday's anerkannter Meisterschaft nicht zu zweifeln ist. Es handelt sich hier wesentlich nur darum, ob und in wie weit diese Versuche gegen diamagnetische Polarität, wie sie hier gleich zu Anfang definirt worden ist, wirklich zeugen und beweisen. Dabei kommt nun hauptsächlich dreierlei in Betracht: erstens, dass Faraday nicht alle Versuche, welche zur Nachweisung der dia-

magnetischen Polarität gemacht worden sind, wiederholt hat; zweitens, dass Faraday, bei aller Meisterschaft im Gebrauche seiner Hülfsmittel, in der Feinheit der Versuche durch die Instrumente, deren er sich bediente, beschränkt war. Drittens endlich hat Faraday nach seinen Ansichten manche Erscheinungen, die von andern Physikern auf diamagnetische Polarität zurückgeführt werden, auf andere Weise zu erklären gesucht. Es erscheint daher sogar zweifelhaft, ob Faraday die diamagnetische Polarität in dem Sinne, in welchem sie hier zu Anfang definirt worden ist, wirklich bestreitet.

Was die von Faraday nicht wiederholten und unberücksichtigt gelassenen Versuche betrifft, so bemerke ich zunächst, dass in Art. 2689 seiner Abhandlung ein von mir mit einem von Reich gemachten Versuche verwechselt zu sein scheint, wodurch es geschehen ist, dass Faraday den von Reich gemachten Versuch, dessen Beweiskraft für diamagnetische Polarität von mir besonders hervorgehoben worden war, ganz übersehen hat, wonach nämlich Nordpol und Südpol, wenn sie zugleich von derselben Seite her auf ein Stück Wismuth wirken, keineswegs dasselbe mit der Summe der Kräfte abstossen, welche sie einzeln ausüben würden, sondern nur mit der Differenz dieser Kräfte. Dieser Versuch ist von Reich mit dem feinsten Instrumente gemacht worden, was dazu gebraucht werden kann, nämlich mit der feinen Torsionswaage, womit er die classische Wiederholung der Cavendish'schen Versuche ausgeführt hatte. Ich kann hier nur wiederholen, was ich über diesen Versuch in meinem ersten Aufsatze gesagt habe, dass daraus allein schon mit grösster Wahrscheinlichkeit geschlossen werden kann, dass der Grund der diamagnetischen Kraft in einem im Wismuth vorhandenen beweglichen imponderablen Bestandtheile zu suchen sei, welcher bei Annäherung eines Magnetpols verschieden bewegt oder vertheilt werde. Die gleichzeitige Annäherung zweier entgegengesetzter Pole von derselben Seite her bewirkt dann nämlich, dass der imponderable Bestandtheil weder die eine noch die andere Bewegung oder Vertheilung annehmen kann, an welche das Hervortreten der diamagnetischen Kraft geknüpft ist, woraus sich das Verschwinden dieser Kraft in diesem Falle ergiebt. — Ferner gehören hierher die von Poggendorff angestellten und in demselben 73. Bde. der Annalen (S. 475—479) beschriebenen Versuche, durch welche er ohne Hülfe so feiner Messungsmittel, wie ich gebraucht habe, dasselbe Resultat durch einen ein-

fachen, augenfällig überzeugenden Versuch sogar auf zweifache Weise erlangt hat. Die Wiederholung dieser Poggendorff'schen Versuche findet keine Schwierigkeit und ist von verschiedenen Beobachtern ausgeführt worden.

Unter den Instrumenten, die eine noch grössere Feinheit und Genauigkeit gestatten, als diejenigen, deren sich Faraday bedient hat, kommen hauptsächlich die nach den Gauss'schen Vorschriften eingerichteten Magnetometer und Galvanometer in Betracht. Auch ich würde ohne diese Instrumente meine Versuche gar nicht auszuführen im Stande gewesen sein. Wenn nun Faraday diese Versuche, aber ohne diese Instrumente anzuwenden, wiederholt hat, so ist es wohl erklärlich, dass er mit seinen wenn auch sonst feinen Hülfsmitteln die von mir beobachteten sehr schwachen Wirkungen nicht wahrnehmen konnte. Faraday's hauptsächliches Bedenken gegen meine im 73. Bde. von Poggendorffs Annalen mitgetheilten Beobachtungen beruht übrigens darauf, dass ich daselbst die von ihm sehr sorgfältig beachteten Erscheinungen der secundären Volta-Induction gar nicht erwähnt hätte, welche desto deutlicher hätten hervortreten müssen, je feiner meine Instrumente gewesen wären. Ich bemerke hier deshalb, dass obiger aus den «Berichten der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften» entlehnte Artikel in Poggendorffs Annalen nur eine vorläufige Notiz meiner Arbeit geben sollte, wobei die speciellere Erörterung für eine spätere Abhandlung vorbehalten wurde. Es wird genügen, hier noch anzuführen, dass ich bei jenen Versuchen den Einfluss der secundären Volta-Induction zwar durch angemessene Combination der Versuche möglichst zu eliminiren gesucht habe; dass es aber jedenfalls weit vorzuziehen ist, diesen Einfluss, wie es bei den in dieser Abhandlung beschriebenen Versuchen geschehen ist, ganz zu beseitigen.

Fassen wir kurz zusammen, welchen Einfluss hiernach diese Faraday'sche Untersuchung auf die Frage der diamagnetischen Polarität habe, in dem Sinne, wie sie hier gleich zu Anfang definirt worden ist, so dürfte derselbe von geringer Bedeutung erscheinen. Faraday hat nämlich mehrere Versuche von Reich und Poggendorff übersehen, bei andern Versuchen, namentlich bei den von Plücker gemachten, hat er bloss eine auf andern Ansichten beruhende Erklärung gegeben, wobei es ungewiss erscheint, ob diese Ansichten mit demjenigen Sinne der diamagnetischen Polarität, welcher in



der hier gleich zu Anfang gegebenen Definition aufgestellt worden ist, in wirklichem Widerspruche stehen. Was endlich noch besonders den Zweifel betrifft, welchen Faraday an der Richtigkeit der Resultate meiner Versuche äussert, so dürfte erstens dieser Zweifel durch die obige Bemerkung gehoben sein, zweitens findet derselbe auf die in dieser Abhandlung beschriebenen Versuche gar keine Anwendung.

12.

Feilitzsch's Versuche und Theorie.

In *Art.* 3 und 4 ist bewiesen worden, dass ein Wismuthstab in einer galvanischen Spirale als Elektrodiamagnet auf eine Magnetnadel ein Drehungsmoment gerade in entgegengesetzter Richtung wie ein Eisenstab in derselben Spirale als Elektromagnet ausübt. Hiermit steht nun aber das Resultat in Widerspruch, zu welchem Feilitzsch gelangt ist, indem er, geleitet durch eine andere theoretische Ansicht, ein anderes Resultat erwartete und durch Versuche zu bestätigen suchte (siehe Poggendorffs Annalen 1851, Bd. 82, S. 90—110), nämlich folgendes: «Wismuth erhält innerhalb der elektrischen Spirale eine zwar schwächere, aber eine gleichgerichtete Polarität, wie das weiche Eisen.»

Der Grund dieses Widerspruchs liegt, wie ich glaube, in einer sehr wesentlichen Verschiedenheit der von mir und Feilitzsch gebrauchten Einrichtung. Feilitzsch sagt: «Die Spirale wurde etwa 200^{mm} entfernt auf der Westseite einer kleinen, an einem Coconfaden aufgehangenen Boussole aufgestellt, und durch einen auf der Ostseite befindlichen Nebenmagnet die Nadel wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht.» Von mir waren dagegen zwei Spiralen gebraucht und diese in Beziehung auf die Boussole so symmetrisch aufgestellt worden, dass es gar keines solchen Nebenmagnets bedurfte, um die Nadel in ihre ursprüngliche Lage zurückzubringen. Der wesentliche Unterschied beider Einrichtungen ist der, dass bei Feilitzsch die Nadel nur bei einer bestimmten Stromintensität im magnetischen Meridiane sich befindet, durch jede Variation der Stromintensität aber bald nach der einen bald nach der andern Seite abgelenkt wird; bei mir dagegen haben die Aenderungen der Stromintensität auf den Ruhestand der Nadel gar keinen Einfluss. Diese Unabhängigkeit des Ruhestands der Nadel von den Schwankungen der Strominten-

sität in der Spirale ist aber nothwendig, wenn die bei Einlegung des Wismuthstabs in die Spirale beobachtete Ablenkung der Nadel der unmittelbaren Wirkung des Wismuthstabs auf die Nadel zugeschrieben werden soll; denn die Einlegung des Wismuthstabs in die Spirale bringt eine kleine Intensitätsänderung des Stroms hervor und darin kann bei Feilitzsch die Ursache der Ablenkung der Nadel gelegen haben. Es bringt nämlich die Einlegung des kalten Wismuthstabs in die durch den Strom erwärmte Spirale eine Abkühlung der Spirale und dadurch eine Verstärkung der Stromintensität hervor, welche eine Ablenkung der Nadel in der von Feilitzsch beobachteten Richtung zur Folge haben muss. Ich habe vor längerer Zeit zahlreiche Versuche nach derselben Methode wie Feilitzsch ausgeführt und dabei ähnliche Resultate gefunden; es zeigte sich aber bei genauerer Prüfung, dass die beobachtete Kraft nicht momentan in dem Augenblicke der Einlegung des Wismuthstabs eintrat, sondern allmählig, und ebenso beim Herausziehen nicht sogleich, sondern allmählig wieder verschwand, was ein genügender Beweis ist, dass es sich um keine unmittelbare Wirkung des Wismuthstabs handelte. Diese Einwirkungen liessen sich auch vermehren, vermindern oder umkehren durch blosse Abkühlung oder Erwärmung des Wismuthstabs. Es ist wahrscheinlich, dass auch die von Feilitzsch beobachteten Ablenkungen der Nadel von diesen Temperatureinflüssen auf die Stromintensität hergerührt haben.

Ueber die Theorie des Diamagnetismus, welche Feilitzsch dabei zu geben versucht hat, möge hier nur Folgendes bemerkt werden. Feilitzsch will die diamagnetischen Erscheinungen ebenfalls aus einer bestimmten Vertheilung der magnetischen Fluida erklären; nimmt aber an, dass diese Vertheilung von einer Scheidung der magnetischen Fluida nach gleicher Richtung wie im Eisen herrühre, und dass der Unterschied nur darin bestehe, dass diese Scheidung im Eisenstabe von der Mitte nach den Enden zu abnehme, im Wismuthstabe dagegen zunehme. Aus dieser Zunahme ergiebt sich zwischen der Mitte und dem Ende des Stabs eine Ausscheidung von entgegengesetztem freien Magnetismus wie am Ende, und wenn dieser entgegengesetzte, zwischen der Mitte und dem Ende ausgeschiedene freie Magnetismus stärker sein könnte, als der am Ende, so würden sich daraus die diamagnetischen Erscheinungen wohl erklären lassen. Hätte aber Feilitzsch die Bedingungen näher geprüft, unter welchen



nach seiner eigenen Darstellung dieser von ihm zur Erklärung der diamagnetischen Erscheinungen vorausgesetzte Fall möglich wäre, so würde er gefunden haben, dass dieser Fall nur dann möglich ist, wenn die magnetischen Fluida in der Mitte des Stabs nicht nach gleicher, sondern nach entgegengesetzter Richtung geschieden sind wie an seinen Enden, was aber seiner Voraussetzung widerspricht. Man sieht überhaupt leicht ein, dass eine Erklärung der diamagnetischen Erscheinungen aus einer Vertheilung der magnetischen Fluida, welche von einer der Richtung nach gleichen Scheidung wie im Eisen herrührt, unmöglich ist.

Ueber den Zusammenhang der Lehre vom Diamagnetismus mit der Lehre von dem Magnetismus und der Elektricität.

13.

In den beiden ersten Abschnitten dieser Abhandlung ist versucht worden, das Gesetz der diamagnetischen Polarität in einer grösseren Allgemeinheit zu begründen, hauptsächlich dadurch, dass seine Gültigkeit auch auf die elektrodiamagnetische und diamagnetelektrische Wirkung ausgedehnt wurde. Durch dieses Gesetz allein wird aber, auch wenn es allgemein ist, noch keine Theorie des Diamagnetismus begründet; denn der Diamagnetismus wird dadurch nur aus seinen Wirkungen definirt: es gehört aber zur Begründung einer Theorie des Diamagnetismus, dass derselbe nicht bloss aus seinen Wirkungen, sondern auch aus seinen Ursachen definirt werde. Ich werde daher in diesem Abschnitte die hiernach nothwendige Ergänzung der Theorie erörtern und dasjenige, was ich über die Ursachen des Diamagnetismus schon in meinem ersten Aufsatze (in den Berichten 1847 und in Poggendorffs Annalen 1848, Bd. 73) gesagt habe, ausführlicher und vollständiger zu entwickeln versuchen.

14.

Ueber den Weg zur Erforschung der Ursachen des Diamagnetismus.

Man unterscheidet in der Lehre vom Magnetismus zwei Arten von Magneten, nämlich beharrliche und veränderliche. Ein Magnet von glashartem Stahle ist z. B. ein beharrlicher, ein Magnet von weichem

Eisen ein veränderlicher. Genau genommen findet nun zwar in der Wirklichkeit kein strenger Gegensatz zwischen beharrlichen und veränderlichen Magneten statt, denn alle Magnete, auch die beharrlichsten, zeigen sich unter der Einwirkung sehr grosser Kräfte veränderlich, und ebenso zeigen sich alle Magnete, auch vom weichsten Eisen, unter der Einwirkung sehr kleiner Kräfte beharrlich. Da man aber in der Regel zu physikalischen Versuchen Magnete wählt und unter Verhältnissen betrachtet, wo entweder der beharrliche oder der veränderliche Theil ihres Magnetismus nicht hervortritt, so kann jene einfache Unterscheidung in den meisten Fällen ohne Nachtheil für die Sache beibehalten werden. Bei der Betrachtung dieser beiden Arten von Magneten soll hier nun hauptsächlich folgender Unterschied, der sich zwischen ihnen machen lässt, hervorgehoben werden, dass nämlich der Magnetismus der beharrlichen Magnete, insofern sie wirklich als beharrlich betrachtet werden, nur aus seinen Wirkungen erforscht werden kann; der Magnetismus der veränderlichen Magnete dagegen auf doppelte Weise, nämlich sowohl aus seinen Wirkungen, als auch aus seinen Ursachen.

Versucht man diese zunächst für Magnete aufgestellte Unterscheidung auch auf Diamagnete anzuwenden, so ergiebt sich, dass es keine beharrlichen Diamagnete giebt, oder vielmehr, dass beharrliche Diamagnete von beharrlichen Magneten nicht unterschieden werden können. Es kommen also nur veränderliche Diamagnete in Betracht, und diese lassen sich gerade so wie veränderliche Magnete auf doppelte Weise erforschen, theils aus ihren Wirkungen, theils aus ihren Ursachen.

Nun ist bekannt, dass man durch Erforschung des Magnetismus eines Magnets aus seinen (auf andere Körper ausgeübten) Wirkungen zur Kenntniss der idealen Vertheilung der magnetischen Fluida an der Oberfläche des Magnets gelangen kann, von welcher Gauss bewiesen hat, dass sie die Kenntniss des wahren inneren Zustands bei der Betrachtung aller Wirkungen vollkommen vertritt, und es ist ein grosser Gewinn für viele Forschungen, dass durch die Betrachtung der idealen Vertheilung ein Weg gegeben ist, alle Wirkungen einfach und vollständig, ohne Hülfe einer Hypothese über das Innere des Körpers, zusammen zu fassen, besonders dann, wenn die Ursachen jener Wirkungen unbekannt sind und erst erforscht werden sollen. Gerade



daraus aber, dass diese Kenntniss von der idealen Vertheilung, welche man aus den beobachteten Wirkungen erwerben kann, zur Uebersicht aller Wirkungen so ganz Genüge leistet, leuchtet von selbst ein, dass man auf dem Grunde der beobachteten Wirkungen allein auch nicht weiter gelangen könne, als zur Kenntniss dieser idealen Vertheilung, welche doch noch von der Kenntniss der wahren inneren Natur des Magnets nothwendig unterschieden werden muss: dass man also auf dem blossen Grunde der beobachteten Wirkungen z. B. nicht im Stande ist, die wirkliche Vertheilung der im Magnete enthaltenen magnetischen Fluida, oder die wirkliche Zahl, Stärke und Anordnung der in ihm enthaltenen elektrischen Ströme zu erfahren.

Dasselbe gilt nun auch von den Wirkungen eines Diamagnets, und man könnte also zwar zur Kenntniss einer solchen idealen Vertheilung magnetischer Fluida an der Oberfläche eines Diamagnets gelangen und diese würde die Kenntniss seines wahren inneren Zustands in der Betrachtung aller seiner Wirkungen vollkommen ersetzen, aber man würde dadurch allein weder einen Aufschluss über den wirklichen inneren Zustand des Diamagnets, noch über das eigentliche Wesen des Diamagnetismus, noch über seine Entstehung und Veränderung erhalten. Um ihnen auf die Spur zu kommen, darf man sich daher auf die Betrachtung der Wirkungen und der davon abhängigen idealen Vertheilung nicht beschränken, sondern es ist nothwendig, eine andere Betrachtung zu Hülfe zu nehmen, welche auf einem von diesen Wirkungen unabhängigen Fundamente beruht.

Alle möglichen Ursachen des Diamagnetismus, ebenso wie des Magnetismus, lassen sich im Allgemeinen in innere und äussere scheiden. Die äussere Ursache ist (gleich den Wirkungen) durch die Beobachtung gegeben: sie ist für Magnetismus und Diamagnetismus dieselbe, nämlich eine ihrer Grösse und Richtung nach bestimmte magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft. Wäre ausser dieser äusseren Ursache die innere, im Körper selbst liegende, bekannt, so würde durch beide der Diamagnetismus bestimmt sein, und umgekehrt öffnet sich ein Weg, die unbekannte innere Ursache zu bestimmen, wenn ausser der bekannten äusseren Ursache der aus beiden resultirende Diamagnetismus (aus den Wirkungen) schon bekannt ist. Folgt man dem hier angedeuteten Wege und stellt die bekannten magnetischen Scheidungskräfte mit der aus den Wirkungen erforschten

idealen Vertheilung sowohl für Eisen als auch für Wismuth zusammen; so ergiebt sich, dass gleiche Scheidungskraft entgegengesetzte ideale Vertheilungen beim Eisen und beim Wismuth hervorbringt, oder umgekehrt, dass eine gleiche ideale Vertheilung bei Eisen und Wismuth entgegengesetzt gerichteten Scheidungskräften entspricht. Der Grund davon, dass entgegengesetzte äussere Ursachen im Eisen und Wismuth gleiche Wirkungen hervorbringen, muss nun in der Verschiedenheit der inneren, im Eisen und Wismuth selbst gelegenen, Ursachen enthalten sein. Um nun die hierdurch gegebene Verschiedenheit der inneren Ursachen im Eisen und Wismuth näher zu bestimmen, ist es nothwendig, alle möglichen inneren Ursachen, welche solche Wirkungen, die aus einer idealen Vertheilung erklärbar sind, haben können, zu classificiren und dann zu prüfen, ob unter allen, die wir aufzählen können, solche enthalten sind, welche von dem soeben erwähnten bei magnetischen und diamagnetischen Körpern thatsächlich vorhandenen Gegensatze Rechenschaft geben können.

15.

Classification der inneren Ursachen, welche den durch eine ideale Vertheilung gegebenen Wirkungen zum Grunde liegen können.

Man kann vier wesentlich verschiedene Arten von inneren, in den Körpern gelegenen, Ursachen angeben, welche solche, aus einer idealen Vertheilung magnetischer Fluida erklärbare, Wirkungen hervorbringen können:

1) die innere Ursache solcher Wirkungen kann in der Existenz zweier magnetischen Fluida, welche (mehr oder weniger) unabhängig von ihrem ponderablen Träger beweglich sind, enthalten sein;

2) sie kann in der Existenz zweier magnetischen Fluida enthalten sein, welche nur mit den Moleculen ihres ponderablen Trägers beweglich sind (drehbare Molecularmagnete);

3) sie kann in der Existenz beharrlicher, von den zwei elektrischen Fluidis gebildeter Molecularströme enthalten sein, welche mit den Moleculen drehbar sind;

4) sie kann in der Existenz zweier beweglicher elektrischer

Fluida enthalten sein, welche in Molecularströmung versetzt werden können.

Diese vier hier angeführten möglichen inneren Ursachen der durch eine ideale Vertheilung an der Oberfläche erklärbaren Wirkungen sind die einzigen, die man kennt und der Prüfung unterwerfen kann. Der erste Fall liegt der von Coulomb und Poisson entwickelten Theorie des Magnetismus zum Grunde; — der dritte Fall liegt dem von Ampère entwickelten Zusammenhange der Lehre vom Magnetismus mit der Elektrodynamik zum Grunde; — der zweite Fall lässt sich auf den dritten reduciren, indem man nach dem von Ampère bewiesenen Theoreme, dass Molecularmagnete und Molecularströme in allen ihren Wirkungen gleich sind, die ersteren für die letzteren substituirt. — Es bleibt also nur noch der vierte Fall übrig, der bisher unbeachtet und unerörtert geblieben ist.

16.

Abhängigkeit der idealen Vertheilung von der magnetischen Scheidungskraft, nach Verschiedenheit der aufgeführten vier möglichen inneren Ursachen.

Für jeden dieser vier Fälle ergiebt sich nun leicht ein bestimmter Zusammenhang zwischen der Art der idealen Vertheilung und der Richtung der magnetischen Scheidungskraft, der sie entspricht. Für den ersten Fall ergiebt sich nach Poisson's Theorie, dass, wenn man in der Richtungslinie der magnetischen Scheidungskraft diejenige Richtung als die positive bezeichnet, nach welcher der Nordpol einer Magnetnadel getrieben wird, und wenn man für die dieser Scheidungskraft entsprechende ideale Vertheilung die Schwerpunkte des nördlichen und südlichen Fluidums bestimmt, der erstere von diesen beiden Schwerpunkten gegen den letzteren in positiver Richtung verschoben ist. — Für den dritten Fall ist dieser Zusammenhang von Ampère entwickelt worden und es hat sich ergeben, dass hier dieselbe Abhängigkeit der idealen Vertheilung von der magnetischen Scheidungskraft stattfindet. Und aus der schon erwähnten Zurückführung des zweiten Falls auf den dritten leuchtet von selbst ein, dass dieselbe Abhängigkeit auch für den zweiten Fall gilt. — Es bleibt also in Beziehung auf diese Abhängigkeit nur noch der vierte Fall zu erörtern übrig.

Dieser vierte Fall setzt elektrische Fluida voraus, welche in Molecularströmung versetzt werden können; die Möglichkeit aber, in eine solche Molecularströmung versetzt zu werden, beruht darauf, dass in den einzelnen Moleculen, oder um sie herum, in sich zurücklaufende Bahnen vorhanden sind, in denen jene Fluida ohne Widerstand beweglich sind, woraus folgt, dass es dann nur einer stromerregenden Kraft (d. i. einer Kraft, welche auf das positive und negative Fluidum nach entgegengesetzten Richtungen wirkt) nach der Richtung dieser Bahn bedarf, um die Fluida in dieser Bahn wirklich zu bewegen. Nun beweist die Lehre von der Magnetelektricität, dass durch die zunehmende oder abnehmende Intensität einer magnetischen Scheidungskraft wirklich eine elektromotorische Kraft gegeben sei, welche auf die beiden beweglichen elektrischen Fluida nach entgegengesetzten Richtungen wirkt und sie also in Strombewegung setzen muss. Die Richtung dieser Molecularströmung ist durch das Grundgesetz der magnetischen Induction in ihrer Abhängigkeit von der Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft gegeben, und die ideale Vertheilung ist wiederum in ihrer Abhängigkeit von diesen Molecularströmen durch den von Ampère für den dritten Fall entwickelten Zusammenhang der Elektrodynamik mit der Lehre vom Magnetismus gegeben. Es ergiebt sich hieraus also mittelbar auch der Zusammenhang zwischen der idealen Vertheilung und der Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft, der sie entspricht.

Es leuchtet aber ferner daraus ein, dass in jedem Augenblicke, wo eine Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft stattfindet, eine solche Molecularströmung hervorgebracht werden muss, und dass sich diese nach einander hervorgebrachten Strömungen, wenn sie nicht von selbst wieder verschwinden, summiren müssen. Diese Strömungen verschwinden aber nicht von selbst; denn Ampère hat bewiesen, dass den elektrischen Molecularströmen Beharrlichkeit zugeschrieben werden muss, d. h. dass die elektrischen Fluida bei ihren Kreisbewegungen um die ponderablen Molecule keinen solchen Widerstand erleiden, wie die elektrischen Fluida, welche einen ponderablen Leiter durchströmen, aus dem sich das schnelle Verschwinden der elektrischen Ströme in diesen Leitern erklärt. (Auf dieser von Ampère bewiesenen Beharrlichkeit der Molecularströme beruht auch der



oben angeführte Satz, dass die Möglichkeit, die elektrischen Fluida in Molecularströmung zu versetzen, voraussetze, dass in den einzelnen Moleculen, oder um sie herum, in sich zurücklaufende Bahnen vorhanden seien, in denen jene Fluida ohne Widerstand beweglich wären.) Hieraus folgt nun, dass mit fortgesetzter Zunahme der magnetischen Scheidungskraft auch in der idealen Vertheilung eine fortgesetzte Anhäufung der magnetischen Fluida eintreten müsse, woraus sich ergiebt, dass jeder gegebenen Stärke der magnetischen Scheidungskraft ein bestimmtes Moment ideal vertheilter magnetischer Fluida entspricht. Es findet aber diese Summation nur bei Molecularströmen statt, weil nur bei ihnen die Bewegung der elektrischen Fluida keinen Widerstand findet. Die anderen Ströme, die von der nämlichen Scheidungskraft in weiteren Bahnen hervorgebracht werden, die aber durch den Widerstand, den sie in diesen Bahnen finden, schnell wieder verschwinden, bringen nur im Augenblicke ihrer Erregung magnetische Wirkungen auf andere Körper hervor, welche mit ihnen sogleich verschwinden, sobald die Scheidungskraft, deren Aenderung sie hervorbrachte, constant geworden ist, und die daher in keinem bestimmten Verhältnisse zur vorhandenen Scheidungskraft stehen, was doch nothwendig wäre, wenn sie von den beobachteten magnetischen Wirkungen Rechenschaft geben sollten, wozu daher nur Molecularströme brauchbar sind. Entwickelt man nun in Beziehung auf die Molecularströme diese Abhängigkeit genauer nach den Gesetzen der magnetischen Induction, so findet man, dass, wenn in der Richtungslinie der magnetischen Scheidungskraft diejenige Richtung als die positive bezeichnet wird, nach welcher der Nordpol einer Magnetnadel getrieben wird, und wenn man für die von dieser Scheidungskraft abhängige ideale Vertheilung die Schwerpunkte des nördlichen und südlichen Fluidums bestimmt, der erstere von diesen beiden Schwerpunkten gegen den letzteren in negativer Richtung verschoben ist, d. i. gerade umgekehrt wie für die drei anderen Fälle.

17.

Innere Ursache des Diamagnetismus.

Dieses merkwürdige Resultat findet nun seine Anwendung auf die Begründung einer Theorie der diamagnetischen Erscheinungen, welche von dem inneren Zustande des diamagnetischen Körpers und von den Kräften, die ihn hervorbringen, Rechenschaft giebt, an der es bisher gefehlt hatte. Zu einer solchen Theorie genügt es nämlich, wie schon oben auseinander gesetzt worden ist, nicht, dass man den diamagnetischen Zustand eines Körpers in Beziehung auf alle seine Wirkungen durch eine ideale Vertheilung magnetischer Fluida an seiner Oberfläche zweckmässig repräsentiren kann, sondern es ist dazu wesentlich erforderlich, dass auch von denjenigen Kräften Rechenschaft gegeben werde, durch welche jener Zustand hervorgebracht wird, ferner davon, worauf diese Kräfte wirken und nach welchen Gesetzen sie wirken.

Aus der obigen Zusammenstellung und Betrachtung der verschiedenen möglichen Fälle, in welchen der durch eine ideale Vertheilung magnetischer Fluida repräsentirbare Zustand eines Körpers zu Stande kommen könne, hat sich nur ein einziger ergeben, in welchem für die Abhängigkeit dieses Zustands von den äusseren Verhältnissen solche Bestimmungen resultiren, die mit den Fundamentalerscheinungen bei der Entstehung des Diamagnetismus vereinbar sind. Daraus folgt, dass von der Entstehung des diamagnetischen Zustands der Körper nur dann Rechenschaft gegeben werden kann, wenn man diesen einzigen Fall als wirklich vorhanden annimmt, wonach der diamagnetische Zustand aus den inducirenden Kräften, welche auf den Körper gewirkt haben, und aus den inducirten im Körper befindlichen elektrischen Fluidis, welche ohne Widerstand in Kreisbahnen um die einzelnen Molecule beweglich sind, hervorgeht. Es wird hiernach also angenommen, dass ein Wismuthstab aus Moleculen besteht, welche in sich zurücklaufende Bahnen (oder Canäle) enthalten, in denen die elektrischen Fluida ohne Widerstand beweglich sind, während sie in allen anderen Bahnen nur mit Ueberwindung eines ihrer Geschwindigkeit proportionalen Widerstands beweglich sind. Die Entstehung eines reinen, mit Magnetismus nicht vermischten Diamagnetismus setzt

ausserdem voraus, dass die Molecule mit jenen Bahnen oder Canälen nicht drehbar sind; denn sonst würden drehbare Molecularströme entstehen, die, wie Ampère bewiesen hat, einen magnetischen Zustand zur Folge haben, wenn sich bei der Drehung ihre Intensität nicht ändert.

18.

Bestimmung der elektromagnetischen Scheidungskraft in einer galvanischen Spirale.

Nach der gegebenen Darstellung ist es nicht die magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft an und für sich selbst, welche den diamagnetischen Zustand eines Körpers hervorbringt, sondern es kommt diese Scheidungskraft bei der Bestimmung des Diamagnetismus nur mittelbar in Betracht, in sofern als dadurch die Summe der elektromotorischen Kräfte bestimmt wird, welche bisher auf den diamagnetischen Körper gewirkt und die elektrischen Fluida in Strombewegung um die einzelnen Molecule gesetzt haben. Von der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche bisher auf den diamagnetischen Körper gewirkt haben, hängt aber die Stärke der jetzt vorhandenen (inducirten) Molecularströme ab, in denen das Wesen des Diamagnetismus besteht. Auf diese Weise dient die Bestimmung der Intensität der vorhandenen magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft nur mittelbar zur Bestimmung des Diamagnetismus, weil sie den Integralwerth aller Aenderungen giebt, welche die magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft erlitten hat, womit die Summe der elektromotorischen Kräfte und folglich die Stärke der jetzt vorhandenen (inducirten) Molecularströme proportional ist.

Ist nun der Leitungsdraht eines galvanischen Stroms gleichförmig um eine cylindrische Röhre gewunden, so ergiebt sich nach den bekannten elektromagnetischen Gesetzen für den Mittelpunkt der Röhre die von dem Strome nach der Richtung der Axe ausgeübte elektromagnetische Scheidungskraft, welche mit X bezeichnet werden soll:

$$X = \frac{2\pi n i}{d}\ ^{*)},$$

*) Denn bezeichnet r den Halbmesser einer Windung, x den Abstand ihres Mittelpunkts von der Mitte der Spirale, $r d\varphi$ die Länge eines Stromelements und i die

wo n die Zahl der Windungen, i die Stromintensität und $2d$ die Diagonale der Röhre (d. i. wenn $2a$ die Länge der Röhre und $2r$ der Durchmesser ist, $d = \sqrt{(aa + rr)}$) bezeichnet. Ist hierin die Stromintensität i nach dem in der vorigen Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen (S. 219 dieses Bandes) festgesetzten absoluten Maasse ausgedrückt, so ist durch obigen Ausdruck die elektromagnetische Scheidungskraft nach demselben Maasse gegeben, welches Gauss zur Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus festgestellt hat.

Der angegebene Werth der elektromagnetischen Scheidungskraft gilt nun zwar genau genommen nur für den Mittelpunkt der Spirale; in den meisten Fällen aber kann derselbe mit hinreichender Näherung für einen sehr grossen Theil des ganzen von der Spirale eingeschlossenen Raums genommen werden, zumal wenn der Durchmesser der Spirale gegen ihre Länge sehr klein ist. Betrachtet man z. B. einen Punkt der Axe, welcher in der Entfernung b von der Mitte der Spirale liegt, so findet man für diesen Punkt

$$X = \frac{\pi ni}{a}\left[\left(1 + \frac{rr}{(a-b)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{rr}{(a+b)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

oder, wenn man $\sqrt{(dd - rr)}$ für a, und ϱ für $\frac{r}{d}$ setzt,

$$X = \frac{2\pi ni}{d}\left[1 - \frac{3\,dd - bb}{2(dd - bb)^2} \cdot \varrho\varrho\, bb + \ldots\right].$$

Soll also die Differenz der elektromagnetischen Scheidungskraft, in Theilen ihres für den Mittelpunkt gültigen Maximumwerthes, den kleinen Bruch m nicht übersteigen, so setze man

$$\frac{3\,dd - bb}{2(dd - bb)^2} \cdot \varrho\varrho\, bb = m$$

oder

$$\frac{bb}{dd} = 1 + \frac{\varrho\varrho}{4m + 2\varrho\varrho}\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{16m}{\varrho\varrho} + 9\right)}\right).$$

Stromintensität, so ist bekanntlich $\frac{irrd\varphi}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}}$ der Ausdruck der von diesem Stromelemente im Mittelpunkte der Spirale nach der Richtung ihrer Axe ausgeübten Kraft. Hieraus folgt der Ausdruck der von der ganzen Windung ausgeübten Kraft $= \frac{2\pi rri}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}}$, und der Ausdruck für n Windungen der Spirale, deren Länge $= 2a$ ist, $= 2\pi rri \cdot \frac{n}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}}$, d. i. wenn $\sqrt{(aa + rr)} = d$ gesetzt wird, $= \frac{2\pi ni}{d}$.

Beträgt also der Durchmesser z. B. den 40sten Theil der Länge, so ist in mehr als $\frac{7}{8}$ des ganzen von der Spirale umschlossenen Raums die elektromagnetische Scheidungskraft bis auf 1 Procent constant, und in fast $\frac{2}{3}$ dieses Raums ist sie bis auf $\frac{1}{10}$ Procent constant.

Solche Spiralen können also dazu dienen, auf eine bequeme Weise einen seiner Länge nach beliebig ausgedehnten Raum darzustellen, für welchen die elektromagnetische Scheidungskraft eine genau bekannte, beliebig grosse und überall als gleich zu betrachtende Stärke besitzt. Die Darstellung eines solchen Raums ist aber für viele Untersuchungen von grosser Wichtigkeit und es können die in den beiden vorhergehenden Abschnitten dieser Abhandlung beschriebenen Versuche als Beispiele dafür dienen; denn diese Versuche würden ohne die Anwendung solcher Spiralen ganz unausführbar gewesen sein.

Die vorhergehende Darstellung bezieht sich eigentlich zunächst nur auf die in der Axe der Spirale gelegenen Punkte; das gefundene Resultat lässt sich aber mit Hülfe des von Gauss in der «Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus» (Resultate aus den Beob. d. magn. V. im Jahre 1838) Art. 38 gegebenen allgemeinen Lehrsatzes leicht auch auf den übrigen von der Spirale umschlossenen Raum ausdehnen.

19.

Bestimmung des Elektrodiamagnetismus aus der elektromagnetischen Scheidungskraft.

Die durch $X = \frac{2\pi n i}{d}$ ausgedrückte elektromagnetische Scheidungskraft bringt nun nach der in der vorigen Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen (S. 221 dieses Bandes) gegebenen Bestimmung auf einen Kreis vom Halbmesser r während der Zeit, in welcher derselbe aus der gegen die Richtung der Scheidungskraft senkrechten Stellung in die damit parallele übergeführt wird, eine Summe oder einen Integralwerth von elektromotorischer Kraft hervor:

$$= \pi r r X.$$

Dieser Integralwerth ist die Summe der Producte aus der nach dem a. a. O. S. 219 festgestellten absoluten Maasse ausgedrückten Intensität in das Zeitelement, in welchem die Kraft mit dieser Intensität wirkt.

Der Ausdruck dieser Summe bleibt unverändert, wenn, statt den Kreis um 90° zu drehen, die elektromagnetische Scheidungskraft $X = \frac{2\pi ni}{d}$ verschwindet. Wächst umgekehrt diese Scheidungskraft von $X = 0$ bis $X = \frac{2\pi ni}{d}$ (beim Schliessen des Stroms), so ist der Ausdruck für jene Summe:

$$-\pi rr\, X = -\frac{2\pi\pi nrri}{d}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass der inducirte Kreisstrom eine solche Richtung hat, dass die Pole eines ihm äquivalenten Molecularmagnets nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, als die, nach welchen die Pole einer Boussole unter dem Einflusse derselben Kraft X getrieben werden.

Dieser Bestimmung des Integralwerths der elektromotorischen Kraft liegt das aus dem absoluten Maasse des Magnetismus abgeleitete Maass elektromotorischer Kräfte, wie es in der schon angeführten Abhandlung S. 219 festgestellt ist, zum Grunde, und der gegebene Ausdruck muss mit $\sqrt{\frac{1}{2}}$ multiplicirt werden, wenn er für das a. a. O. S. 263 angegebene rein elektrodynamische Maass gelten soll, also:

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot rr\, X = -\frac{\pi\pi\sqrt{2} \,.\, nrri}{d}.$$

Und dieser Ausdruck muss nach S. 269 mit $\frac{4}{c}$ multiplicirt werden (wo c denjenigen constanten Werth der relativen Geschwindigkeit bezeichnet, bei welcher zwei elektrische Massen gar keine Wirkung auf einander ausüben), wenn man die elektromotorische Kraft in Theilen des allgemeinen in der Mechanik für Kräfte festgestellten absoluten Maasses ausdrücken will, also:

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \pi rr\, X = -\frac{4\sqrt{2} \,.\, \pi\pi nrri}{cd}.$$

Dieser Ausdruck giebt die elektromotorische Kraft für die Länge der Kreisbahn, vorausgesetzt, dass in jeder Längeneinheit dieser Bahn die Einheit des elektrischen Fluidums sich befindet; man erhält daraus die elektromotorische Kraft, welche auf jede Masseneinheit des elektrischen Fluidums wirkt, durch Division mit der Kreisperipherie $2\pi r$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{c} \cdot r\, X = -\frac{2\sqrt{2} \,.\, \pi nri}{cd},$$

d. i. der Integralwerth der Beschleunigung für den Zeitraum, in welchem die elektromagnetische Scheidungskraft von $X = 0$ bis

$X = \frac{2\pi ni}{d}$ wuchs, wenn an jede Einheit des elektrischen Fluidums eine ponderable Masseneinheit geknüpft wäre. Bezeichnet ε den unbekannten kleinen Bruch, welcher die der Einheit des elektrischen Fluidums zugehörige Masse in Theilen des ponderablen Massenmaasses ausdrückt, so giebt obiger Ausdruck, mit ε dividirt, die Stromgeschwindigkeit u, welche durch das angegebene Wachsthum der elektromagnetischen Scheidungskraft hervorgebracht worden ist. Multiplicirt man diesen Ausdruck der Stromgeschwindigkeit u mit $ae = \frac{4e}{c}$ (siehe a. a. O. S. 268), wo e die Menge des elektrischen Fluidums nach elektrischem Maasse ausdrückt, welche in jeder Längeneinheit der Kreisbahn sich befindet, so erhält man die Intensität des inducirten Kreisstroms nach dem a. a. O. S. 261 nach rein elektrodynamischen Principien aufgestellten Maasse ausgedrückt; multiplicirt man ferner noch mit $\sqrt{2}$, so erhält man diese Intensität nach demjenigen Maasse bestimmt, nach welchem ein Strom von der Intensität $= 1$, wenn er die Flächeneinheit umläuft, mit der Einheit des Magnetismus nach absolutem Maasse identisch wirkt, nämlich:

$$-\frac{8e}{cc\varepsilon} \cdot rX = -\frac{16\pi nrei}{ccd\varepsilon}.$$

i bezeichnet die Intensität des inducirenden Stroms nach demselben Maasse.

Das elektromagnetische Moment dieses inducirten Kreisstroms (Molecularstroms) findet man durch Multiplication der angegebenen Stromintensität mit dem von der Kreisbahn umschlossenen Flächenraume πrr

$$= -\frac{8e}{cc\varepsilon} \cdot \pi r^3 X = -\frac{16\pi\pi nr^3 ei}{ccd\varepsilon}.$$

Hierbei ist angenommen, dass die Normale der Kreisbahnebene mit der Richtung der elektromagnetischen Scheidungskraft parallel sei, was für alle Kreisbahnen nur bei einer bestimmten Anordnung der Molecule stattfinden kann. Beim Wismuth setzen wir keine solche Anordnung voraus, sondern nehmen vielmehr nach dem Begriffe der Homogeneität an, dass die Normalen der Kreisbahnen keine vorherrschende Richtung haben. Darnach muss die Zahl der Kreisbahnen, deren Normalen den Winkel φ mit der Richtung der elektromagnetischen Scheidungskraft machen, mit $\sin\varphi$ proportional gesetzt werden. Die Stromintensität ergiebt sich dann mit $\cos\varphi$ proportional, und die der Scheidungskraft parallele Componente des Moments mit

$\cos\varphi^2$. Multiplicirt man daher obigen Ausdruck mit $\sin\varphi\cos\varphi^2$, so erhält man einen Ausdruck, welcher dem Antheile aller Kreisströme (Molecularströme), deren Normalen mit der Richtung der Scheidungskraft den Winkel φ machen, an dem elektrodiamagnetischen Momente des Wismuths proportional ist, nämlich:

$$-\frac{8e}{cc\varepsilon}\cdot\pi r^3 X\cdot\sin\varphi\cos\varphi^2 = -\frac{16\pi\pi n r^3 ei}{ccd\varepsilon}\cdot\sin\varphi\cos\varphi^2.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $d\varphi$ und dann ferner den zwischen den Grenzen $\varphi=0$ bis $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ genommenen Integralwerth mit der Zahl der Molecularströme m, so erhält man das ganze elektrodiamagnetische Moment des Wismuths ausgedrückt durch

$$-\frac{8e}{3cc\varepsilon}\cdot\pi m r^3 X = -\frac{16\pi\pi m n r^3 ei}{3ccd\varepsilon}.$$

Bezeichnet v das Volumen des Wismuths und a den Abstand der Mittelpuncte seiner Molecularströme, deren Halbmesser $= r$ ist, so ist die Zahl der Molecularströme $m=\frac{v}{a^3}$. Vorausgesetzt nun, dass die Grösse der Molecularströme den Molecularabständen proportional ist, also $\frac{a}{r}=\varkappa$ constant, so ist die Summe der von allen Molecularströmen umlaufenen Flächen $m\pi rr=\frac{\pi v}{\varkappa^2 r}$. Substituirt man diesen Werth in dem obigen Ausdrucke des elektrodiamagnetischen Moments, so erhält man

$$-\frac{8\pi}{3cc\varepsilon}\cdot\frac{e}{\varkappa^3}\cdot vX = -\frac{16\pi\pi ni}{3ccd\varepsilon}\cdot\frac{e}{\varkappa^3}\cdot v.$$

Das elektrodiamagnetische Moment einer Wismuthmasse ist also dem elektromagnetischen Scheidungsmomente X und dem Volumen der Wismuthmasse v proportional und wird daraus durch Multiplication mit einem aus der allgemeinen Elektricitätslehre zu entnehmenden constanten Factor $\frac{8\pi}{3cc\varepsilon}$, und einem von der Beschaffenheit des Wismuths abhängigen constanten Faktor $-\frac{e}{\varkappa^3}$ gefunden. Diesen letzteren Faktor kann man die diamagnetische Constante des Wismuths nennen.

20.

Vergleichung der Wechselwirkung diamagnetischer Molecule mit der Wechselwirkung magnetischer Molecule.

In der im vorigen Artikel gegebenen Bestimmung des elektrodiamagnetischen Moments ist die Induction von Molecularströmen in den Kreisbahnen der Molecule einzeln betrachtet worden, wie wenn



auf jedes Molecule bloss die aus der vorhandenen elektromagnetischen Scheidungskraft bestimmten elektromotorischen Kräfte gewirkt hätten. Dies ist genau genommen nicht der Fall, sondern es haben in jeder Kreisbahn ausserdem noch diejenigen elektromotorischen Kräfte mitgewirkt, welche von der Wechselwirkung der diamagnetischen Molecule herrührten, gerade so, wie auf ein Theilchen eines Eisenstabs nicht bloss die äussere, z. B. vom Erdmagnetismus ausgeübte, Scheidungskraft wirkt, sondern auch diejenigen Scheidungskräfte, welche von der Wechselwirkung der Theilchen des Stabs unter einander herrühren.

Soll nun diese Wechselwirkung der diamagnetischen Molecule in Rechnung gebracht werden, wiewohl sie so klein ist, dass sie einen kaum merklichen Einfluss hat, so verdient dabei zunächst ein merkwürdiger Gegensatz hervorgehoben zu werden, welcher zwischen der Wechselwirkung diamagnetischer und magnetischer Molecule stattfindet.

Befinden sich nämlich zwei Eisentheilchen in einer, der Richtung der auf sie wirkenden magnetischen Scheidungskraft X parallelen, Geraden, und bezeichnet man mit m das magnetische Moment, welches diese Scheidungskraft in jedem von diesen beiden Eisentheilchen, einzeln betrachtet, hervorbringen würde; so resultirt für jedes Theilchen aus der Wirkung des andern eine neue Scheidungskraft, welche das Moment m vergrössert. Diese neue, aus der Wechselwirkung beider Theilchen entspringende, Scheidungskraft wird nach bekannten Gesetzen durch $\frac{2m}{r^3}$ ausgedrückt, wenn r den Abstand der Theilchen bezeichnet, und die gesammte Scheidungskraft $\left(X+\frac{2m}{r^3}\right)$ bringt nun in dem betrachteten Theilchen ein grösseres Moment $=\left(1+\frac{2m}{Xr^3}\right)m$ hervor. — Befinden sich dagegen zwei Wismuththeilchen in einer, der Richtung der auf sie wirkenden elektromagnetischen Scheidungskraft X parallelen, Geraden, und wird das diamagnetische Moment, welches dieser Scheidungskraft entspricht, mit $-\mu$ bezeichnet (das negative Vorzeichen bedeutet, dass für gleichgerichtete Scheidungskräfte das diamagnetische Moment dem magnetischen entgegen gesetzt ist), so resultirt für jedes Theilchen aus der Wirkung des andern eine neue Scheidungskraft $=-\frac{2\mu}{r^3}$, wenn r der Abstand der beiden Theilchen ist, und der gesammten Scheidungskraft $=\left(X-\frac{2\mu}{r^3}\right)$ entspricht dann

das verkleinerte Moment $-\left(1-\frac{2\mu}{Xr^3}\right)\mu$. Es findet also der Gegensatz statt, dass der Magnetismus der in der Richtung der Scheidungskraft liegenden Eisentheilchen durch Wechselwirkung verstärkt, der Diamagnetismus der in dieser Richtung liegenden Wismuththeilchen dagegen durch Wechselwirkung geschwächt wird.

Umgekehrt verhält es sich, wenn die Eisen- und Wismuththeilchen in einer gegen die Richtung der Scheidungskraft senkrechten Geraden liegen, wo der Magnetismus der Eisentheilchen durch Wechselwirkung geschwächt, der Diamagnetismus der Wismuththeilchen dagegen durch Wechselwirkung verstärkt wird. Es ergiebt sich nämlich dann, wenn man dieselben Zeichen gebraucht, der geschwächte Magnetismus des Eisentheilchens $= +\left(1-\frac{m}{Xr^3}\right)m$, der verstärkte Diamagnetismus des Wismuththeilchens $= -\left(1+\frac{\mu}{Xr^3}\right)\mu$.

Hieraus folgt, dass, während man eine gegebene Masse Eisen, um ihr durch eine gegebene Scheidungskraft den stärksten Magnetismus zu ertheilen, in die Form eines langen und dünnen Stabs oder in die eines lang gestreckten Ellipsoids bringt, dessen grosse Axe der Richtung der Scheidungskraft parallel ist, so muss man dagegen eine Wismuthmasse, um ihr den stärksten Diamagnetismus zu ertheilen, in die möglichst dünnste Plattenform oder in die Form eines möglichst abgeplatteten Ellipsoids bringen, dessen kleine Axe der Richtung der Scheidungskraft parallel ist. Diese Folgerung würde sich an der Erfahrung prüfen lassen, doch ist dabei zu beachten, dass beim Wismuth der Einfluss der Wechselwirkung der Theilchen, wegen der Schwäche des einer gegebenen Scheidungskraft entsprechenden Diamagnetismus, sehr gering sein muss. Wendet man aber das gefundene Resultat auf die Prüfung des zuerst von Faraday ausgesprochenen Satzes an, dass sich nämlich Wismuth unter dem Einflusse magnetischer Scheidungskräfte ganz wie Eisen mit dem einzigen Unterschiede verhalte, dass die beiden magnetischen Fluida mit einander vertauscht erschienen, so stellt sich heraus, dass dieser Satz nicht streng richtig ist; denn darnach müsste die gestreckte ellipsoidische Form für Wismuth ebenso wie für Eisen die günstigste sein, dort den stärksten Diamagnetismus wie hier den stärksten Magnetismus darzustellen, was nicht der Fall ist. — Die Entwickelung dieser Gesetze der Wechselwirkung diamagnetischer Molecule im Vergleiche mit der Wechselwirkung magnetischer Molecule

führt zu einer einfachen Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Stoffe, die in dem folgenden Artikel näher betrachtet werden soll.

21.

Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Körper durch positive und negative Werthe einer Constanten.

Statt der nicht ganz richtigen Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Körper, wonach bei gleichgerichteter Scheidungskraft die beiden magnetischen Fluida nur mit einander vertauscht wären, lässt sich eine andere genau richtige und ebenso einfache Unterscheidung geben, die blos auf der Verschiedenheit der Werthe einer aus der Natur jedes Körpers zu bestimmenden Constante beruht.

Beschränkt man sich nämlich der Einfachheit wegen auf die Betrachtung eines Rotations-Ellipsoids von Eisen oder Wismuth, dessen Hauptaxe der Richtung der Scheidungskraft parallel ist, so hat Neumann in Crelle's «Journal für die reine und angewandte Mathematik» Bd. 37 bewiesen, dass für Eisen bei der Scheidungskraft X das magnetische Moment des Ellipsoids durch den Ausdruck

$$\frac{kvX}{1+4\pi kS}$$

dargestellt werde, wo v des Volumen des Ellipsoids und S eine durch das Verhältniss der Axen gegebene Grösse bezeichnet. Es ist nämlich

$$S=\sigma(\sigma\sigma-1)\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}-\frac{1}{\sigma}\right\}$$

und

$$\sigma=\sqrt{\left(1-\frac{rr}{\lambda\lambda}\right)}.$$

r und $\sqrt{(rr-\lambda\lambda)}$ sind die Axen des Ellipsoids. k endlich soll darin für Eisen einen constanten, von seiner Natur abhängigen Werth haben, welchen Neumann mit dem Namen der magnetischen Constante des Eisens bezeichnet, und zwar ist dieser Werth bei Eisen und allen magnetischen Körpern nothwendig positiv.

Der Werth von S ergiebt sich für ein unendlich gestrecktes Ellipsoid $S=0$; folglich das magnetische Moment

$$=kvX,$$

also ist für $v=1$ und $X=1$ das magnetische Moment $=k$. Die magnetische Constante k lässt sich hiernach als der Grenzwerth

definiren, dem sich das magnetische Moment der Volumeneinheit unter dem Einflusse der Einheit der magnetischen Scheidungskraft desto mehr nähert, ein je gestreckteres Ellipsoid aus der Volumeneinheit gebildet wird. Da die Constante k bei allen magnetischen Körpern einen positiven Werth hat, so ist das magnetische Moment positiv oder negativ, jenachdem die Scheidungskraft positiv oder negativ ist.

Für eine Kugel ergiebt sich der Werth von $S = \frac{1}{3}$, folglich das magnetische Moment

$$= \frac{kvX}{1 + \frac{4}{3}\pi k}.$$

Man sieht hieraus, dass bei der Kugelform des Eisens, weil k einen positiven Werth hat, auf die Volumeneinheit weniger Magnetismus kommt, als bei gestreckter Ellipsoidenform.

Der Werth von S ergiebt sich endlich für ein zu einer unendlich dünnen Kreisscheibe abgeplattetes Ellipsoid $S = 1$, folglich das magnetische Moment

$$= \frac{kvX}{1 + 4\pi k}.$$

Die Grösse k dient nun als Unterscheidungsmerkmal verschiedener magnetischer Stoffe, indem ihr Werth nach Verschiedenheit der Stoffe bis Null abnehmen kann, nur aber der Natur des Magnetismus gemäss stets positiv sein muss. Man kann aber den Gebrauch der Grösse k als Unterscheidungsmerkmal verallgemeinern und ihn, statt auf magnetische Körper zu beschränken, auf alle Körper ausdehnen, indem man negative Werthe von k zulässt und die physische Bedeutung daran knüpft, dass ein Körper, dem ein solcher negativer Werth von k zugehöre, kein magnetischer, sondern ein diamagnetischer sei. Statt negative Werthe von k einzuführen, wollen wir bei diamagnetischen Körpern $-k$ schreiben. Das diamagnetische Moment eines Wismuthellipsoids, dessen Volumen $= v$ ist, und auf welches die elektromagnetische Scheidungskraft X der Hauptaxe parallel wirkt, wird alsdann ausgedrückt durch

$$- \frac{kvX}{1 - 4\pi kS},$$

wo S dieselbe Bedeutung wie oben hat. Für unendlich gestreckte Ellipsoide, wo $S = 0$, ist also das diamagnetische Moment

$$= - kvX;$$

für eine Kugel, wo $S = \frac{1}{3}$, ist dasselbe

$$= - \frac{kvX}{1 - \frac{4}{3}\pi k};$$

für ein unendlich abgeplattetes Ellipsoid, wo $S = 1$, ist es

$$= -\frac{kvX}{1-4\pi k}.$$

Bei der gestrecktesten Form kommt also auf die Volumeneinheit am wenigsten, bei der abgeplattetsten Form am meisten Diamagnetismus, gerade umgekehrt, als es mit dem Magnetismus der Fall war, wie schon im vorigen Artikel bewiesen worden ist.

Da aber $-k$ einen sehr kleinen negativen Werth auch beim Wismuth hat, welches am stärksten diamagnetisch wird, so ergiebt sich, dass der Diamagnetismus des Wismuths immer sehr nahe dem Producte des Volumens und der Scheidungskraft proportional ist und von der Form als fast unabhängig betrachtet werden kann. Es kann daher die Bedeutung von $-k$ unmittelbar mit derjenigen diamagnetischen Constante verglichen werden, von welcher am Ende des 19. Artikels die Rede war. Auch dort wurde das diamagnetische Moment dargestellt durch das Product des Volumens in die Scheidungskraft multiplicirt mit einem constanten Coefficienten, welcher in zwei Factoren zerfiel, nämlich in einen aus der allgemeinen Elektricitätslehre zu entnehmenden $\frac{8\pi}{3cc\varepsilon}$, und in einen von der Beschaffenheit des Wismuths abhängigen Factor $-\frac{\theta}{\varkappa^2}$, welcher dort die diamagnetische Constante des Wismuths genannt worden ist. Man sieht leicht, dass diese beiden Factoren hier in $-k$ nicht geschieden sind und dass $-k$ also keine andere Bedeutung hat als die des Products jener beiden constanten Factoren*).

---

*) Es möge hierbei noch bemerkt werden, dass der magnetische Coefficient k sich nur nach der Theorie scheidbarer magnetischer Fluida (Art. 15, Nr. 1) constant ergiebt; dass er aber nach der Theorie drehbarer Molecularmagnete (Art. 15, Nr. 2) eine Function der Scheidungskraft X sein muss. Der diamagnetische Coefficient $-k$ ist dagegen nach der Theorie der diamagnetelektrischen Induction (Art. 15, Nr. 4) seiner Natur nach constant, wie Art. 19 gezeigt worden ist. Es wird in den folgenden Art. 23—26 bewiesen werden, dass in Beziehung auf den Magnetismus die Erfahrung mit der Theorie scheidbarer magnetischer Fluida in Widerspruch steht und zu Gunsten drehbarer Molecularmagnete (oder Molecularströme Art. 15, Nr. 3) entscheidet, weil nämlich der Werth von k beim Eisen wirklich nicht constant, sondern mit der Grösse der Scheidungskraft X veränderlich ist.

22.

Ueber die Existenz magnetischer Fluida.

Wenn eine gewisse Classe von Wirkungen eines Körpers auf andere Körper so beschaffen ist, dass sie aus einer idealen Vertheilung magnetischer Fluida auf seiner Oberfläche erklärt werden kann, so lassen sich für die wahren Ursachen aller jener Wirkungen, welche im Innern des Körpers liegen, verschiedene Möglichkeiten denken und darnach 4 verschiedene Fälle unterscheiden, welche Art. 14 angegeben und in den darauf folgenden Artikeln näher erörtert worden sind. Zwei dieser Fälle beruhten auf der Voraussetzung, dass zwei magnetische Fluida existiren, denen in den Moleculen des Körpers entweder eine constante oder eine variable Scheidung zugeschrieben wird; die beiden anderen Fälle beruhten auf der Voraussetzung, dass die beiden nach der Elektricitätslehre vorhandenen elektrischen Fluida in einer bestimmten Kreisbahn um jedes Molecule des Körpers entweder in einer constanten oder in einer variablen Strombewegung sich befänden. Diese 4 verschiedenen Fälle schliessen nun, wie man leicht einsieht, keineswegs einander wechselseitig aus; denn es kann ein Theil der magnetischen Fluida in den Moleculen constant geschieden bleiben, während die Scheidung eines anderen Theils variabel ist; und ebenso kann ein Theil der elektrischen Strömung in der für jedes Molecule gegebenen Kreisbahn constant sein, während ein anderer Theil seiner Intensität nach variirt. In letzterer Beziehung liesse sich sogar die Existenz von constanten Strömungen ohne das Hinzukommen eines variablen Theils bei den vielen vorhandenen elektromotorischen Kräften gar nicht begreifen, weil die elektrischen Fluida, wenn sie wirklich in bestimmten Kreisbahnen um die Molecule frei beweglich sind, wie die Existenz beharrlicher Strömungen beweist, dem Antriebe jener nach der Richtung der Kreisbahnen zerlegten elektromotorischen Kräfte nothwendig folgen müssen. Der erste und zweite Fall können daher entweder einzeln oder zugleich stattfinden; der dritte und vierte stehen aber unter einander in einem nothwendigen Zusammenhange, so dass entweder keiner von beiden oder beide zusammen stattfinden müssen. Jene 4 Fälle lassen sich hiernach paarweise verbunden unter 2 Hauptfälle bringen, nämlich 1) dass zwei geschiedene oder scheidbare magnetische Fluida in

den Moleculen des Körpers existiren, 2) dass die nach der Elektricitätslehre überall vorhandenen elektrischen Fluida in bestimmten Kreisbahnen um die Molecule des Körpers frei beweglich sind. Diese beiden Hauptfälle können aber als einander wechselseitig ausschliessend in sofern betrachtet werden, als die wirkliche Nachweisung eines von beiden den andern als überflüssige Hypothese erscheinen lassen würde.

Nun lässt sich für jeden von diesen beiden Hauptfällen eine Theorie entwickeln, und jede von diesen Theorien in zwei Theile theilen, nämlich in einen solchen, worin beide Theorien in ihren Resultaten übereinstimmen, und in einen solchen, wo sie in ihren Resultaten einander widersprechen. Denn es verhält sich hier gerade so wie in der Optik mit der Emissionstheorie und Wellentheorie, die in ihren Resultaten ebenfalls in sehr vielen Beziehungen mit einander übereinstimmten, bis die Entdeckung der Interferenzerscheinungen zu einer näheren Erörterung desjenigen Theils führte, in welchem beide Theorien in ihren Resultaten einander widersprechen. Haben nun auch bis jetzt die beiden auf der Existenz magnetischer Fluida und auf der Existenz elektrischer Molecularströme beruhenden Theorien in sehr vielen Beziehungen eine bewundernswürdige Uebereinstimmung in den Resultaten ergeben; so durfte man doch auch hier, wie in der Optik, erwarten, dass endlich die Entdeckung irgend einer neuen Classe von Erscheinungen ebenfalls zu einer näheren Erörterung desjenigen Theils führen würde, wo beide Theorien in ihren Resultaten einander widersprächen, und dass alsdann die neuentdeckten Erscheinungen die bisherige Alternative zwischen beiden Theorien entscheiden würden*).

---

*) Ich habe früher in den «Resultaten aus den Beob. d. magn. V. im Jahre 1839» die Vermuthung zu begründen gesucht, dass die daselbst unter dem Namen der «Unipolaren Polarität» beschriebenen Erscheinungen zu einer solchen Entscheidung führen könnten. Dies ist aber nicht der Fall, weil eine andere Erklärung von den dort beschriebenen Erscheinungen sich geben lässt, sobald zwischen den im Innern der Conductoren sich bewegenden elektrischen Fluidis und den ponderablen Theilen der Conductoren eine solche Verbindung stattfindet, dass jede auf die elektrischen Fluida wirkende Kraft ganz oder fast ganz auf die ponderablen Theile übertragen wird, wie ich dies in den «Elektrodynamischen Maassbestimmungen» (Abhandl. bei Begründung der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. v. d. F. Jabl. Ges. Art. 19, S. 309) näher erörtert habe.



Die beiden optischen Theorien trennten sich in den Folgerungen, welche sich aus ihnen für das Zusammentreffen zweier homogenen Lichtstrahlen ergaben; denn nach der einen sollte immer Verstärkung, nach der andern bald Verstärkung bald Aufhebung stattfinden: die Interferenzerscheinungen bestätigten die Resultate der Wellentheorie. Auf ähnliche Weise kann auch der Scheideweg unserer Theorien bestimmt werden. Beide stimmen zwar 1) in allen, die Erscheinungen beharrlicher Magnete betreffenden Resultaten überein; 2) auch in Betreff der veränderlichen Magnete, darin, dass jede eine Eintheilung derselben in zwei Classen gestattet, nämlich in solche, die ihren Magnetismus der blossen Orientirung fertig vorhandener drehbarer Molecule (Molecularmagnete oder Molecularströme) verdanken, und in solche, die ihren Magnetismus der Scheidung oder Bewegung imponderabler Fluida in ruhenden Moleculen (der Scheidung magnetischer Fluida in den Moleculen, oder der Erregung elektrischer Ströme in bestimmten Kreisbahnen um die Molecule) verdanken; 3) endlich stimmen beide Theorien auch noch in ihren Resultaten über die erste Classe der veränderlichen Magnete mit einander überein; aber sie widersprechen einander in ihren Resultaten über die zweite Classe; denn für diese zweite Classe ergiebt sich aus den beiden Theorien eine entgegengesetzte Lage der Pole: nach der einen soll die Lage der Pole für die zweite Classe gleich der für die erste Classe sein; nach der andern soll die Lage der Pole für die zweite Classe entgegengesetzt der für die erste Classe sein.

So lange man also nur solche veränderliche Magnete kannte, wo die Lage der Pole (für gleichgerichtete Scheidungskräfte) gleich war, so liessen sie sich nach beiden Theorien erklären, und es bedurfte nur nach der zweiten Theorie der Annahme, dass Magnete der zweiten Classe entweder gar nicht vorkämen oder nur mit Magneten der ersteren Classe so verbunden, dass die Wirkung der letzteren immer vorherrsche. Weil die erste Theorie einer solchen Annahme nicht bedurfte, konnte sie sogar den Vorzug zu verdienen scheinen, so lange man nur Magnete mit gleicher Lage der Pole für gleichgerichtete Scheidungskräfte kannte. Sobald man aber veränderliche Magnete (Diamagnete) entdeckte, wo die Lage der Pole (bei gleichgerichteten Scheidungskräften) entgegengesetzt war, so blieb keine Wahl mehr zwischen beiden Theorien, denn



es konnte dann nur die zweite Theorie gebraucht werden, weil sie allein von der Entstehung zweier Classen von Magneten mit entgegengesetzter Lage der Pole bei gleichgerichteten Scheidungskräften Rechenschaft giebt.

Die von Faraday entdeckten diamagnetischen Erscheinungen dienen daher zur Entscheidung der Alternative zwischen diesen beiden Theorien, gerade so, wie die Interferenzerscheinungen zur Entscheidung der Alternative zwischen Emissions- und Wellentheorie in der Optik gedient haben, und dies ist die wesentlichste und wichtigste Bedeutung, welche dieser Entdeckung gegeben werden kann. Durch die Entdeckung des Diamagnetismus wird also die Hypothese der elektrischen Molecularströme im Innern der Körper bestätigt; die Hypothese der magnetischen Fluida im Innern der Körper widerlegt.

Alle unsere Hypothesen oder Vorstellungen von den Körpern finden immer nur innerhalb eines begrenzten Bereichs von Erscheinungen Geltung, und unterscheiden sich von einander durch die grössere Beschränkung oder Ausdehnung dieses Bereichs. Wir schreiben ihnen Realität zu, so lange wir keine Erscheinungen kennen, die ausserhalb des Bereichs, für welches sie gelten, lägen; im entgegengesetzten Falle bezeichnen wir sie als ideal. Wenn nun auch die magnetischen Fluida künftig in die Reihe der idealen Vorstellungen gesetzt werden müssen, so behalten sie doch die nämliche Wichtigkeit und Bedeutung, die sie bisher besassen, so oft man Betrachtungen auf denjenigen Kreis beschränkt, für welchen sie gelten. — Und wenn wir auch für jetzt den elektrischen Molecularströmen im Innern der Körper Realität zuschreiben, gleichwie dem Wellen fortpflanzenden Lichtäther in der Optik, so kann es doch geschehen, dass auch sie künftig, bei weiterer Ausbildung der Wissenschaft, in die Reihe der idealen Vorstellungen versetzt werden müssen.

Ueber die Abhängigkeit des magnetischen und diamagnetischen Moments von der Grösse der Scheidungskraft.

23.

Die Richtigkeit des gewonnenen Resultats, dass keine magnetischen, sondern nur elektrische Fluida wirklich existiren, für welche aber in

den ponderablen Körpern zwei verschiedene Arten von Bahnen vorhanden sind, in denen sie sich bewegen können, nämlich theils solche, in welchen ihre Bewegung einen mit ihrer Geschwindigkeit proportionalen Widerstand findet, theils solche, in welchen ihre Bewegung gar keinen Widerstand findet (Molecularbahnen), beruht, den vorhergehenden Erörterungen gemäss, hauptsächlich auf der Betrachtung der entgegengesetzten Lage der Pole oder der entgegengesetzten Richtung, nach welcher bei gleicher magnetischer oder elektromagnetischer Scheidungskraft die ideale Scheidung der magnetischen Fluida in magnetischen und diamagnetischen Körpern erfolgt; es kann aber die Richtigkeit dieses Resultats noch einer weiteren Prüfung unterworfen werden, wenn man ausser der Richtung, nach welcher bei einer gegebenen magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft die ideale Scheidung der magnetischen Fluida erfolgt, ferner die Stärke dieser Scheidung genauer erforscht. Es findet nämlich zwar in Beziehung auf die Stärke dieser Scheidung kein solcher Gegensatz zwischen beiden Theorien statt, wie in Beziehung auf die Richtung; doch ergiebt sich auch in ersterer Beziehung keine volle Uebereinstimmung. Eine vollständige Entscheidung der Alternative fordert daher noch die Entwickelung derjenigen Differenzen, welche zwischen beiden Theorien in Beziehung auf die Stärke jener idealen Scheidung stattfinden, und deren Prüfung an der Erfahrung.

Ergäbe sich von der einen Seite, wie in der Note am Ende des 21. Artikels bemerkt worden ist, dass nach der Theorie wirklich existirender magnetischer Fluida Proportionalität der magnetischen Momente mit den Scheidungskräften stattfinden sollte, dass aber diese Proportionalität (nach den Müller'schen Versuchen) der Erfahrung widerspreche, und liesse sich von der anderen Seite nachweisen, dass die Theorie der Molecularströme in keinem solchen Widerspruche mit der Erfahrung stände, so könnte die Richtigkeit der letzteren Theorie auf diesem Wege bewiesen werden, ohne dass es dazu nöthig wäre, die diamagnetischen Erscheinungen und die verkehrte Lage der Pole, welche sich dabei zeigt, zu Hülfe zu nehmen, wie es in den vorhergehenden Artikeln geschehen ist. Indessen kommt dabei ein wesentlicher Umstand in Betracht, welcher macht, dass dieser bloss auf magnetische Versuche gegründete Beweis, wozu die diamagnetischen Versuche gar nicht zu Hülfe genommen zu werden brauchten, für sich

allein betrachtet, nicht völlig entscheidend ist. Es giebt nämlich, wie schon Art. 14 auseinander gesetzt worden ist, unter der Voraussetzung von der wirklichen Existenz magnetischer Fluida, zwei Arten der Entstehung von Magneten, nämlich entweder durch Scheidung der magnetischen Fluida in ruhenden Moleculen, oder durch Drehung der Molecule, in denen die magnetischen Fluida beharrlich geschieden sind. Die schon erwähnte von Poisson und Neumann entwickelte Theorie, nach welcher Proportionalität der magnetischen Momente mit den Scheidungskräften stattfinden soll, betrifft aber nur die Gesetze zur Bestimmung des Magnetismus der auf die erste Art entstandenen Magnete, und es bedarf einer näheren Prüfung, ob dieselben Gesetze ganz unverändert auch auf die Bestimmung des Magnetismus der auf die zweite Art entstandenen Magnete Anwendung finden können. Dies ist nicht der Fall, sondern es gelten für die auf die zweite Art entstandenen Magnete andere Gesetze, und zwar die nämlichen, wie für Magnete, die ihren Magnetismus der Existenz drehbarer Molecularströme verdanken. Wenn also die Gesetze dieser letzten Magnete mit der Erfahrung übereinstimmen, so folgt daraus von selbst, dass die Erfahrung auch mit den Gesetzen der Magnete, deren Magnetismus von drehbaren Moleculen mit beharrlich geschiedenen magnetischen Fluidis herrührt, übereinstimmen müsse. Folglich kann auf diese Gesetze allein keine allgemeine Widerlegung von der wirklichen Existenz der magnetischen Fluida gegründet werden, sondern nur eine Widerlegung der Entstehung der Magnete durch Scheidung der magnetischen Fluida, wie sie in der von Poisson und Neumann entwickelten Theorie angenommen wird.

Aber auch diese partielle Widerlegung gewinnt eine allgemeinere Bedeutung, wenn man die Gründe beachtet, durch die Poisson und Neumann sich berechtigt halten durften, eine Scheidung der magnetischen Fluida in ruhenden Moleculen und keine Drehung der Molecule mit beharrlich geschiedenen magnetischen Fluidis anzunehmen. Betrachtet man nämlich näher, wie man zur Aufstellung der Hypothese von der Existenz magnetischer Fluida überhaupt gekommen ist, so wird man sich leicht überzeugen, dass sie hauptsächlich auf der Analogie mit der statischen Elektricitätslehre beruht, und dass diese Analogie im Wesentlichen darin besteht, dass bei der Magnetisirung des Eisens eine ähnliche Scheidung der magnetischen Fluida in den Eisen-

moleculen stattfinde, wie die der elektrischen Fluida bei der Elektrisirung eines Systems kleiner Conductoren. Diese Analogie würde aber ganz verloren gehen, wenn die Magnetisirung des Eisens auf keiner Scheidung der magnetischen Fluida in den Eisenmoleculen, sondern auf einer Drehung der Eisenmolecule selbst beruhte. Es geht hieraus hervor, dass die Hypothese von der Existenz zweier magnetischen Fluida ihr ursprüngliches, auf der Analogie mit der Elektricitätslehre beruhendes, Fundament durch Widerlegung der von Poisson und Neumann entwickelten Theorie verlieren und fast wie eine ganz neue Hypothese zu betrachten sein würde. Es leuchtet dies auch daraus ein, dass alsdann selbst der Name der magnetischen Fluida gar nicht mehr passen würde, weil, wenn diese Stoffe in den Eisenmoleculen beharrlich geschieden und stets auf gleiche Weise fest mit den Eisentheilchen verbunden wären und nur mit den Eisentheilchen sich bewegen könnten, von einem flüssigen Aggregatzustande dieser Stoffe gar nicht die Rede sein könnte. Es würde alsdann sogar das Recht bezweifelt werden müssen, diese Stoffe als gesondert vom Eisen zu betrachten, wenn sie in der Wirklichkeit immer und in unveränderter Weise mit den Eisentheilchen verbunden blieben; denn es würde alsdann genügen, blos zwei Arten von Eisentheilchen zu unterscheiden.

Die erwähnte partielle Widerlegung gewinnt also dadurch eine allgemeinere Bedeutung, dass sie alle Analogie zerstört, welche man früher zwischen den Hypothesen von den magnetischen und elektrischen Fluidis herzustellen gesucht hatte. Eine solche Analogie gab der Hypothese eine gewisse Wahrscheinlichkeit, deren wahrer Werth sich nicht genau bestimmen liess, und daher leicht zu hoch angeschlagen werden konnte, nun aber durch die oben erwähnte Widerlegung der Scheidungstheorie ganz wegfällt.

In demselben Verhältnisse aber, in welchem die eine Theorie, nämlich die auf der wirklichen Existenz magnetischer Fluida gebaute, an Wahrscheinlichkeit verliert, gewinnt die andere, nämlich die auf der Existenz von Molecularströmen begründete Theorie, zumal wenn sich beweisen lässt, dass die Stärke der magnetischen Momente für verschiedene Scheidungskräfte sich genau dieser Theorie gemäss verhalte. Die bisher blos an der beobachteten Richtung der Scheidung geprüfte Theorie würde dann auch durch die beobachtete Stärke der Scheidung geprüft und bestätigt werden. Es ergiebt sich

hieraus, dass diese zweite Prüfung eine wesentliche Ergänzung und Vervollständigung der ersteren bildet, welche daher in den folgenden Artikeln ausführlich gegeben werden soll.

24.

Zusammenhang des Vorhandenseins eines Maximumwerths des magnetischen Moments mit der Annahme von der Drehbarkeit der Molecule.

Die Annahme von drehbaren Molecularmagneten stimmt zwar, wie schon Art. 16 angeführt worden ist, in der Bestimmung der Lage der Pole mit der Annahme von scheidbaren magnetischen Fluidis in unbeweglichen Moleculen überein; beide aber unterscheiden sich nach dem vorigen Artikel wesentlich von einander in Beziehung auf das Gesetz, nach welchem die Stärke des Magnetismus eines Eisenstabs sich mit der Grösse der magnetischen Kraft, welche auf das Eisen wirkt, ändern soll. Es leuchtet nämlich ein, dass, nach der ersteren Annahme, der Stärke des Magnetismus eine Grenze gesetzt ist, die sie nicht überschreiten kann, welche nämlich dem Falle entspricht, wo die Axen aller Molecularmagnete durch Drehung eine parallele Lage angenommen haben. Eine solche Grenze ist für die Stärke des Magnetismus nach der zweiten Annahme, so wie sie nach Coulomb, Poisson und Neumann der Theorie zum Grunde gelegt zu werden pflegt, nicht vorhanden, weil nämlich darnach in den Moleculen eine unerschöpfliche Menge von scheidbarem neutralen magnetischen Fluidum (nach Analogie mit der Elektricitätslehre) vorausgesetzt wird*). Aber wenn man auch diese letztere Annahme etwas modificiren und voraussetzen wollte, dass durch Verstärkung der auf das Eisen wirkenden Kraft nach und nach das ganze in den Moleculen vorhandene neutrale magnetische Fluidum geschieden werde, so ergäbe sich doch auch dann noch eine wesentliche Verschiedenheit zwischen

*) Nach dieser Annahme wird nämlich der magnetische Gleichgewichtszustand dadurch definirt, dass an der Oberfläche aller Molecularconductoren eine Vertheilung der beiden magnetischen Fluida stattfindet, welche auf alle Punkte im Innern der Molecule solche Kräfte ausüben, dass dadurch die Wirkung aller äussern Scheidungskräfte aufgehoben wird. Hieraus folgt leicht, dass bei Verdoppelung der äusseren Scheidungskräfte auch die Menge des magnetischen Fluidums an der Oberfläche aller Molecule verdoppelt werden müsse u. s. w.



beiden Annahmen, welche darin besteht, dass das Wachsthum des Magnetismus bei immer zunehmender Kraft, welche auf das Eisen wirkt, nach der letzteren Annahme einem ganz anderen Gesetze vor der Erschöpfung des neutralen magnetischen Fluidums unterworfen sein muss, wie nachher, dass nämlich bis zu dem Augenblicke, wo der letzte Rest von neutralem Fluidum geschieden wäre, das Verhältniss der Stärke des Eisenmagnetismus zu der Grösse der Kraft, welche auf das Eisen wirkt, constant bleiben müsse (weshalb auch dieses Verhältniss mit dem Namen der magnetischen Constante des Eisens bezeichnet zu werden pflegt); dass aber von jenem Augenblicke an dieses Verhältniss schnell abnehmen müsse. Nach der ersteren Annahme ergiebt sich dagegen, dass jenes Verhältniss stets veränderlich sei und von Anfang bis zu Ende nach einem und demselben Gesetze stetig abnehmen müsse.

Hierdurch wird die Möglichkeit gegeben, unmittelbar aus den Erscheinungen des Eisenmagnetismus zu entscheiden, ob die Magnetisirung des Eisens, nach der Hypothese wirklich existirender magnetischer Fluida, entweder einer Drehung seiner Molecule oder der Scheidung der magnetischen Fluida in seinen Moleculen zugeschrieben werden müsse. Im ersteren Falle können aber die drehbaren Molecule ebensowohl Träger von Molecularströmen wie von beharrlich geschiedenen magnetischen Fluidis sein, während in dem letzteren Falle die Existenz der magnetischen Fluida als erwiesen angesehen werden müsste, weil nur bei der Drehung der Molecule, aber nicht bei der Scheidung der magnetischen Fluida in den Moleculen (durch eine gegebene magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft) eine Stellvertretung für die magnetischen Fluida durch elektrische Ströme möglich ist.

Durch die schon angeführten Müller'schen Versuche müsste nun die letztere Annahme von scheidbaren magnetischen Fluidis in undrehbaren Moleculen als widerlegt angesehen werden, und es bliebe nur noch zu prüfen übrig, ob die stetige Abnahme des Verhältnisses der Stärke des Eisenmagnetismus zur Grösse der auf das Eisen wirkenden Scheidungskraft, wie sie Müller durch seine Versuche bestimmt hat, mit dem nach der ersteren Annahme aus einer bestimmten Drehbarkeit der Molecule abzuleitenden Gesetze übereinstimme oder nicht, wobei es unbestimmt gelassen werden kann, ob diese Molecule die

Träger von geschiedenen magnetischen Fluidis oder von Molecularströmen sind. Indessen sind die Müller'schen Versuche von Buff und Zamminer (Annalen der Chemie und Pharmacie von Liebig, Wöhler und Kopp Bd. 75, S. 83) wiederholt und die von Müller gefundenen Resultate dadurch nicht bestätigt worden. Vielmehr glauben Buff und Zamminer durch ihre Versuche bewiesen zu haben, dass das Verhältniss der Stärke des Eisenmagnetismus zu der Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft (abgesehen von dem Einflusse der Coercitivkraft, wenn das Eisen nicht vollkommen weich ist) wirklich constant sei, so weit als es mit den jetzt vorhandenen Hülfsmitteln geprüft werden könne, was nur nach der Annahme scheidbarer magnetischer Fluida in undrehbaren Moleculen möglich sein würde. Die Annahme drehbarer Molecularmagnete, und folglich auch die drehbarer Molecularströme, müsste hiernach verworfen werden und die wirkliche Existenz der magnetischen Fluida würde also dadurch als wirklich begründet erscheinen.

Es schien hiernach vor Allem nöthig, dieselben Versuche nochmals zu dem Zwecke zu wiederholen, um den vorliegenden Widerspruch zu entscheiden. Ich werde daher im folgenden Artikel die von mir gemachten Versuche und die besonderen Einrichtungen, welche ich getroffen habe, um ein sicheres Resultat zu gewinnen, beschreiben, woraus sich eine Bestätigung des Müller'schen Resultats ergeben hat, ein Resultat, was auch nach einigen, schon vor Müller, von Joule angestellten und in *The Annals of Electricity etc. by W. Sturgeon* Vol. V, p. 472 mitgetheilten Versuchen erwartet werden konnte.

25.

Versuche zum Beweise des Vorhandenseins eines Maximumwerths des magnetischen Moments.

Aus den von Müller gemachten Versuchen hatte sich ergeben, dass bei gleichen Kräften, welche auf das Eisen wirken, die Abnahme des Verhältnisses der Stärke des Eisenmagnetismus zur Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft bei dünnen Eisenstäben leichter als bei dicken wahrgenommen werden könnte. Es kommt daher bei der Vergleichung der von Müller mit den von Buff und Zamminer gemachten Versuchen wesentlich in Betracht, dass der dünnste von Müller gebrauchte Stab nur 6, der dünnste von Buff und Zamminer

gebrauchte Stab aber 9 Millimeter dick war, und diese Verschiedenheit der Dicke wird durch ihr Verhältniss zur Länge noch einflussreicher, indem der dünnere Stab von Müller 330, der dickere von Buff und Zamminer nur 200 Millimeter lang war. Ich habe mich zu den folgenden Versuchen eines noch dünneren Stabs als Müller bedient, nämlich von 3,6 Millimeter Dicke bei 100,2 Millimeter Länge und 8190 Milligramm Masse. Es ergab sich, dass sich der Magnetismus eines solchen dünnen Stabs durch die aus der Ferne hervorgebrachte Ablenkung eines kleinen Spiegelmagnetometers noch mit grosser Genauigkeit messen liess. Die einzige Schwierigkeit, welche die Anwendung eines so dünnen Stabs bietet, besteht in der genauen Scheidung der vom Eisenmagnetismus und der vom galvanischen Strome herrührenden Wirkungen auf das Magnetometer. Es leuchtet nämlich ein, dass wenn man dieselbe galvanische Spirale zur Magnetisirung sowohl dicker als auch dünner Stäbe gebraucht, wie es von Müller, Buff und Zamminer geschehen ist, diese Scheidung bei den dünnen Stäben weniger Genauigkeit gestattet, weil die Wirkung der Spirale dieselbe bleibt und daher für dünnere Stäbe verhältnissmässig grösser als für dickere ist. Zu den folgenden Versuchen wurde daher eine Spirale gebraucht, welche nicht weiter war, als zum Hineinlegen des dünnen Stabs nöthig war. Auch hiermit habe ich mich noch nicht begnügt, sondern habe das Ende des Spiraldrahts noch zweimal in umgekehrter Richtung um die Mitte der Spirale in einem viel weiteren Kreise herumgewunden, so dass der von diesen beiden Windungen begrenzte Flächenraum dem von allen Windungen der engen Spirale begrenzten Flächenraume gleich war. Dadurch wird nach den bekannten Gesetzen des Elektromagnetismus bewirkt, dass der Strom unmittelbar gar keine Wirkung auf das entfernte Magnetometer ausübt, was sich leicht durch Versuche prüfen und bestätigen lässt. Die ganze am Magnetometer beobachtete Wirkung rührt dann blos von dem Eisenmagnetismus her, der sich dann mit gleicher Schärfe und Genauigkeit wie der Magnetismus harter Stahlmagnete nach der von Gauss in der Intensitas etc. gegebenen Anleitung durch Ablenkungsversuche aus der bekannten Intensität des Erdmagnetismus nach absolutem Maasse bestimmen lässt.

Als ein wesentlicher Umstand ist noch hervorzuheben, dass die von Müller, Buff und Zamminer gebrauchten Spiralen kürzer als die dadurch magnetisirten Eisenstäbe waren. Bei Müller war dieser

Unterschied nur gering, indem die Eisenstäbe nur 15 Millimeter zu beiden Seiten aus der Spirale hervorragten; bei Buff und Zamminer war er aber viel grösser, indem die Enden des längsten und dünnsten Stabes 45 Millimeter zu beiden Seiten aus der Spirale hervorragten. Ausserdem wurde der davon herrührende Einfluss bei Buff's und Zamminer's Versuchen verhältnissmässig dadurch noch verstärkt, dass die Länge des in der Spirale eingeschlossenen Theils nur 110 Millimeter betrug, bei Müller dagegen 300 Millimeter. Dieser Umstand dürfte der Hauptgrund von der scheinbaren Differenz der Resultate sein, zu denen diese Beobachter gelangt sind; denn es leuchtet ein, dass die Wirkung der Spirale auf das Eisen in der Mitte der Spirale am stärksten ist, nach den Enden aber abnimmt, und dass diese Abnahme ausserhalb der Spirale ausserordentlich gross ist. Daraus folgt, dass wenn auch bei wachsender Stromstärke die in dem mittleren Theile des Stabs hervorgebrachte Wirkung einem Grenzwerthe sich näherte, eine solche Annäherung bei den ausserhalb der Spirale befindlichen Theilen noch keineswegs merklich sein konnte. Bei den folgenden Versuchen wurde eine Spirale gebraucht, welche bedeutend länger als der Eisenstab war, so dass nach den Art. 18 entwickelten Gesetzen die von der Spirale auf die Enden des Stabs ausgeübte Kraft von der auf die Mitte nicht merklich verschieden war, wodurch allein ein sicheres Resultat erhalten werden konnte.

Ich begnüge mich hier, ohne auf eine Beschreibung der Versuche im Einzelnen einzugehen, welche nicht nöthig erscheint, weil sie bis auf die eben angegebenen Verschiedenheiten mit der von Müller, Buff und Zamminer gegebenen Beschreibung nahe übereinstimmen würde, die auf diese Weise gewonnenen Resultate in der folgenden Tafel kurz zusammen zu stellen. Ich bemerke nur, dass jede einzelne Bestimmung auf 4maligem Wechsel der Stromrichtung beruht, wobei sich stets die grösste Uebereinstimmung ergab, zum Beweise, dass die Coercitivkraft des Eisens der Genauigkeit der Resultate keinen Eintrag that. Ferner wäre es leicht gewesen, den Einfluss der Temperatur des Eisenstabs zu berücksichtigen, indem diese Temperatur durch einen Wasserstrom constant erhalten worden wäre; doch ergab sich, dass der Einfluss mässiger Temperaturänderungen so gering war, dass zu seiner genaueren Bestimmung die Messungen mit einer noch viel grösseren Feinheit hätten ausgeführt werden müssen, wozu besondere neue Einrichtungen hätten

getroffen werden müssen, welche sogleich zu beschaffen nicht möglich war. Die nach bekannten Regeln in der Tafel gemachte Zurückführung des Eisenmagnetismus auf absolutes Maass bedarf hier keiner weiteren Erläuterung. Auch die Stromstärke ist mit Hülfe einer Tangentenboussole nach absolutem Masse bestimmt worden und es ist dabei die von Müller schon erwähnte, zu grösserer Genauigkeit nothwendige Correction, welche von dem Verhältnisse der Nadellänge zum Durchmesser des galvanischen Rings abhängt, da sie leicht auszuführen war, genau ermittelt und berücksichtigt worden. Diese Kenntniss der Stromstärke nach absolutem Maasse ist aber ferner dazu benutzt worden, um mit Hülfe der Zahl der Windungen der Spirale, durch welche der Strom ging, und ihrer Dimensionen, die Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft nach demselben absoluten Maasse zu bestimmen, nach welchem der Erdmagnetismus ausgedrückt wird, um dadurch jene Kraft mit der bekannten Intensität der erdmagnetischen Kraft vergleichbar zu machen. In der folgenden Tafel ist in der Columnenüberschrift diese Kraft mit X bezeichnet. Der gefundene Eisenmagnetismus M ist mit der in Milligrammen ausgedrückten Masse des Eisens $p = 8190$ dividirt, und der so auf die Masseneinheit reducirte Magnetismus ist in der Columnenüberschrift mit m bezeichnet worden.

Nr.	X	m
1.	658,9	911,1
2.	1381,5	1424,0
3.	1792,0	1547,9
4.	2151,0	1627,3
5.	2432,8	1680,7
6.	2757,0	1722,7
7.	3090,6	1767,3
8.	3186,0	1787,7
9.	2645,6	1707,9
10.	2232,1	1654,0
11.	1918,7	1584,1
12.	1551,2	1488,9
13.	1133,1	1327,9
14.	670,3	952,0

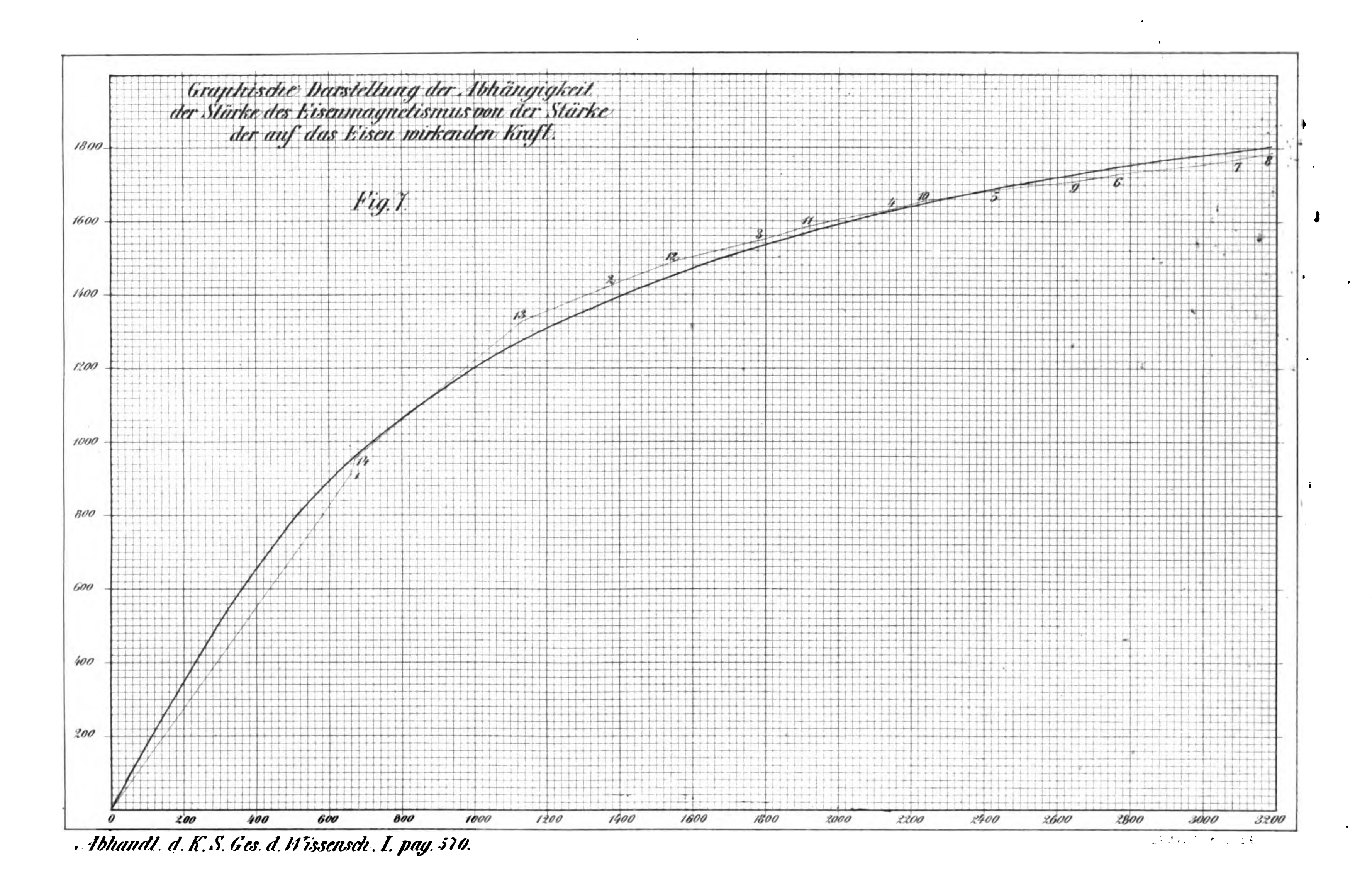
Diese Tafel zerfällt, wie man sieht, in zwei Abtheilungen, nämlich in eine, wo die Grösse der Kraft, welche auf das Eisen wirkt, zunimmt, und in eine andere, wo sie abnimmt. Man sieht aber aus der Fig. 7 gegebenen graphischen Darstellung, dass die Versuche der letzteren Abtheilung, welche darin mit Nr. 8 bis 14 bezeichnet sind, sehr gut zu den Versuchen der ersten, welche mit Nr. 1 bis 7 bezeichnet sind, passen. Bei dem letzten Versuche der ersten Abtheilung hatte der Eisenstab eine höhere Temperatur erreicht und es wurde vor dem Beginne der folgenden Versuche so lange gewartet, bis er wieder abgekühlt war. Dessenungeachtet sieht man, dass beide Versuche den übrigen sich gleich gut anreihen, ein Beweis also, dass der Einfluss dieser Temperaturdifferenz sehr gering gewesen sein müsse.

Es geht also aus diesen Versuchen offenbar das Resultat hervor, dass das Verhältniss der Stärke des Eisenmagnetismus zur Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft veränderlich ist, und es ist darnach höchst wahrscheinlich, dass der Eisenmagnetismus sich einem Grenzwerthe nähert, den er nie überschreiten kann. Es leuchtet ein, dass es unmöglich ist, die Versuche so weit fortzusetzen, dass dieser Grenzwerth unmittelbar durch die Beobachtungen erhalten und bestimmt würde. Eine solche unmittelbare Bestimmung des Grenzwerths ist aber nicht nothwendig, weil es im Grunde genügt, dass die stetige Veränderung jenes Verhältnisses bewiesen ist. Dieselben Versuche sind noch von andern Beobachtern mit ganz gleichem Erfolge wiederholt worden und ich glaube, dass die daraus gezogenen Resultate keinem Zweifel unterliegen. Es wird dadurch also das von Müller gefundene Resultat im Wesentlichen bestätigt.

26.

Das Gesetz der Abhängigkeit des magnetischen Moments von der Grösse der Scheidungskraft nach der Annahme von der Drehbarkeit der Molecule, und Vergleichung mit den Versuchen.

Es bleibt nun näher zu erörtern übrig, ob die durch obige Versuche gefundene Veränderlichkeit der Stärke des Eisenmagnetismus bei verschiedener Grösse der auf das Eisen wirkenden Kräfte mit demjenigen Gesetze übereinstimme, welches sich aus der Annahme einer bestimmten Drehbarkeit der Molecule folgern lässt. Findet dieses Statt, so leuchtet von selbst ein, dass man mit Ampère auch annehmen kann,



Abhandl. d. K. S. Ges. d. Wissensch. I. pag. 570.

dass diese Molecule die Träger von Molecularströmen sind, wodurch die Erklärung der Entstehung und der Veränderungen des Eisenmagnetismus, ebenso wie die seiner Wirkungen, von der Annahme magnetischer Fluida ganz unabhängig gemacht und blos auf die Annahme elektrischer Fluida zurückgeführt werden könnte.

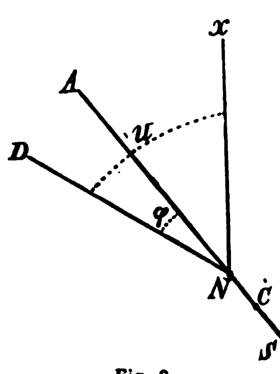


Fig. 8.

Es sei Fig. 8 NS ein Molecularmagnet, welcher sich um seinen Mittelpunkt C drehen kann; ND sei die Richtung, mit welcher seine magnetische Axe beim Gleichgewicht parallel ist, wenn die äussere Kraft $X = 0$ ist. Die Thatsache, dass beim weichen Eisen der durch eine äussere auf das Eisen wirkende Kraft hervorgebrachte Magnetismus von selbst wieder verschwindet, sobald die äussere Kraft zu wirken aufhört, beweist, dass der Molecularmagnet, auf dessen Drehung der hervorgebrachte Magnetismus beruhte, von selbst wieder in seine ursprüngliche mit ND parallele Lage zurückgetrieben werde. Diese in der Wechselwirkung der Molecule begründete zurücktreibende Kraft muss aber mit der Grösse der Ablenkung $AND = \varphi$ wachsen und kann durch

$$D \sin \varphi$$

dargestellt werden, wo D eine constante Grösse bezeichnet, welche man die moleculare Directionskraft nennen kann. Wirkt nun ausser dieser molecularen Directionskraft auf den Molecularmagnet nach der Richtung NX die äussere Kraft X, welche mit der Richtung der Directionskraft den Winkel $XND = u$ einschliesst, so wird der Molecularmagnet dadurch um den Winkel $AND = \varphi$ gedreht oder abgelenkt, und man hat dann zur Bestimmung der neuen Gleichgewichtslage folgende Gleichung:

$$X \sin u \cos \varphi = (D + X \cos u) \sin \varphi$$

oder

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{X \sin u}{D + X \cos u}.$$

Aus dieser Ablenkung φ lässt sich nun die Zunahme des nach der Richtung der Kraft X zerlegten magnetischen Moments des Molecules bestimmen. Wird nämlich das ganze magnetische Moment des Molecules mit μ bezeichnet, so war das nach der Richtung der Kraft X zerlegte vor der Ablenkung

$$= \mu \cos u,$$

nach der Ablenkung

$$= \mu \cos(u - \varphi),$$

folglich die gesuchte Zunahme x

$$x = \mu (\cos(u - \varphi) - \cos u).$$

Substituirt man hierin für φ den durch obige Gleichung $\tang \varphi = \frac{X \sin u}{D + X \cos u}$ gegebenen Werth, so erhält man

$$x = \mu \left\{ \frac{X + D \cos u}{\sqrt{(XX + DD + 2XD \cos u)}} - \cos u \right\}.$$

Für ein System von Moleculen, deren magnetische Axen beim ursprünglichen Gleichgewichte nach allen Richtungen des Raums ohne Unterschied gerichtet sind, ist die Zahl der Molecule, deren magnetische Axen mit der Richtung NX der Kraft X den Winkel u bilden, mit $\sin u$ proportional zu setzen. Es soll nun das magnetische Moment y bestimmt werden, welches aus der Drehung aller Molecule des Systems durch die Kraft X resultirt.

Man multiplicire zu diesem Zwecke den oben gefundenen Werth von x mit $\sin u \, du$ und nehme dann den Integralwerth von $u = 0$ bis $u = \pi$. Dieser Integralwerth, mit der Anzahl der Molecule n multiplicirt und mit $\int_0^\pi \sin u \, du = 2$ dividirt, giebt das gesuchte Moment y

$$y = \frac{n}{2} \int_0^\pi x \sin u \, du.$$

Durch Ausführung der Integration erhält man hiernach für y folgenden Ausdruck:

$$y = n\mu \frac{X}{\sqrt{(XX + DD)}} \cdot \frac{X^4 + \frac{7}{6} XXDD + \frac{2}{3} D^4}{X^4 + XXDD + D^4}.$$

Die Kraft, welche auf das Eisen wirkte, und durch welche dieses Moment hervorgebracht wurde, war $= X$. Bezeichnet n die Zahl der Molecule in der Volumeneinheit, so hat das Verhältniss des Moments y zu der Kraft X, durch die es hervorgebracht wird, in der Drehungstheorie dieselbe Bedeutung, welche in der Scheidungstheorie die Grösse hat, welche Neumann, in Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 37, bei der Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotationsellipsoids, welcher durch vertheilende Kräfte erregt ist, mit k bezeichnet. Substituirt man daher in Neumann's Rechnung für den von ihm als constant betrachteten Werth von k den eben gefundenen variablen Werth $\frac{y}{X}$, so ergiebt sich, wenn n die Zahl der

Molecule in der Volumen- oder Masseneinheit angiebt, der auf die Volumen- oder Masseneinheit reducirte Magnetismus des Eisens m durch folgende Gleichung:

$$m = \frac{y}{1 + 4\pi S \frac{y}{X}} \text{ für die Volumeneinheit,}$$

$$m = \frac{y}{1 + 4\pi S\varrho \frac{y}{X}} \text{ für die Masseneinheit,}$$

wo ϱ die Dichtigkeit des Eisens und S einen von der Gestalt abhängigen Faktor bezeichnet (siehe Art. 21).

Hiernach lässt sich nun die Stärke des Eisenmagnetismus m aus der Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft X berechnen, wenn die Werthe der beiden dem Eisen eigenthümlichen Constanten $n\mu$ und D, und, zur Reduction auf die Masseneinheit, seine Dichtigkeit ϱ gegeben sind. Setzt man

$$n\mu = 2324{,}68$$
$$D = 276{,}39,$$

so erhält man, da die Dichtigkeit des Eisens $\varrho = 7{,}78$ ist, folgende Vergleichung der Rechnung mit der Beobachtung, wobei jedoch bemerkt werden muss, dass zur Bestimmung des Zahlenfaktors S statt der cylindrischen Form des Eisens eine ihr möglich nahe kommende ellipsoidische Form substituirt werden musste, wonach $S = \frac{1}{249}$ erhalten wurde.

Nr.	X	m beobachtet	m berechnet	Unterschied.
1.	658,9	911,1	948,4	— 37,3
2.	1381,5	1424,0	1387,0	+ 37,0
3.	1792,0	1547,9	1533,0	+ 14,9
4.	2151,0	1627,3	1623,5	+ 3,8
5.	2432,8	1680,7	1685,0	— 4,3
6.	2757,0	1722,7	1742,2	— 19,5
7.	3090,6	1767,3	1791,2	— 23,9
8.	3186,0	1787,7	1803,4	— 15,7
9.	2645,6	1707,9	1723,6	— 15,7
10.	2232,1	1654,0	1644,8	+ 9,2
11.	1918,7	1584,1	1568,9	+ 15,2
12.	1551,2	1488,9	1452,9	+ 36,0
13.	1133,1	1327,9	1276,8	+ 51,1
14.	670,3	952,0	957,5	— 5,5

Beachtet man, dass bei diesen Versuchen zur Messung der Intensität der Ströme als Tangentenboussole eine gewöhnliche auf einer Spitze drehbare Boussole, die blos 60 Millimeter lang war, gebraucht wurde, wo die Bruchtheile eines Grads nicht mit Sicherheit beobachtet werden konnten und daher die Intensität leicht um 1 Procent zu klein oder zu gross gefunden werden konnte, so leuchtet ein, dass man keine vollkommnere Uebereinstimmung der Rechnung mit der Beobachtung erwarten durfte, als die, welche obige Tafel wirklich zeigt. In der graphischen Darstellung Fig. 7 sind die berechneten Werthe durch eine stärkere Linie, die beobachteten durch eine feinere Linie verbunden. Es scheint hierdurch die Drehbarkeit der Eisenmolecule ausser Zweifel gesetzt. Und da man nun diese Eisenmolecule nach Ampère als die Träger von Molecularströmen betrachten kann, so ist dadurch eine vollständige Uebereinstimmung aller magnetischen Erscheinungen, auch derjenigen, welche an veränderlichen Magneten beobachtet werden, mit der Theorie der Molecularströme bewiesen und es ist dadurch eine wichtige Bestätigung dieser Theorie durch die magnetischen Erscheinungen gewonnen worden, als Gewähr der vorher gegebenen Begründung derselben durch die diamagnetischen Erscheinungen.

27.

Anwendung auf die Art. 10 gemachte Vergleichung.

Das im vorigen Artikel aus der Theorie drehbarer Molecule abgeleitete Gesetz zur Bestimmung der Stärke des Eisenmagnetismus nach seiner Abhängigkeit von der magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft findet seine wichtigste Anwendung auf die Construction starker Elektromagnete, wie überhaupt aller elektromagnetischen Instrumente, deren Wirkung von der Stärke des Eisenmagnetismus abhängt. Da aber diese Anwendung, auf welche Joule und Müller besonders aufmerksam gemacht haben, mit dem hier erörterten Gegenstande (Diamagnetismus) nicht unmittelbar zusammenhängt, so beschränke ich mich darauf, hier bloss die Anwendung obigen Gesetzes auf die Art. 10 gemachte Vergleichung der Stärke eines Elektrodiamagnets aus seinen magnetischen und magnetelektrischen Wirkungen beizufügen, weil darauf Art. 10, S. 530 verwiesen worden ist.

Es ist nämlich Art. 10 der Wismuthdiamagnetismus mit dem Eisenmagnetismus auf doppelte Weise verglichen worden, erstens

durch die von beiden hervorgebrachten Ablenkungen einer Magnetnadel, zweitens durch die von beiden, bei gleicher Bewegung in einem geschlossenen Leiter, inducirten elektrischen Ströme. Aus beiden Vergleichungen lässt sich die Stärke des Wismuthdiamagnetismus nach absolutem Maasse bestimmen, wenn die Stärke des Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse bekannt ist: Es kommt also nur darauf an, obiges Gesetz unter den bei jener Vergleichung gegebenen Verhältnissen auf die Bestimmung des Eisenmagnetismus anzuwenden, um für den Wismuthdiamagnetismus zwei von einander unabhängige Bestimmungen zu erhalten, welche durch ihre Uebereinstimmung das Gesetz der diamagnetischen Polarität bestätigen. Nun ist zwar schon Art. 10 das aus den Müller'schen Versuchen abgeleitete Gesetz unter den dort angegebenen Verhältnissen auf diese Bestimmung des Eisenmagnetismus angewendet, jedoch dabei bemerkt worden, dass das daraus gefundene Resultat keineswegs als ganz sicher und genau gelten könne, und es wird daher zu grösserer Sicherheit und Genauigkeit gereichen, das im vorigen Artikel schärfer bestimmte Gesetz darauf anzuwenden.

Es war nämlich Art. 10 der, nach der Note S. 527, durch eine elektromagnetische Kraft $X = 629{,}9$ im Wismuth hervorgebrachte Diamagnetismus mit dem durch dieselbe Kraft im Eisen hervorgebrachten Magnetismus durch die von beiden auf eine Magnetnadel ausgeübten Drehungsmomente verglichen und ihr Verhältniss wie

$$1 : 1470000$$

gefunden worden. Nach diesem Verhältnisse kann der Diamagnetismus nach absolutem Maasse bestimmt werden, wenn der Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse bekannt ist. Nun ist aber nach dem vorigen Artikel für $X = 629{,}9$

$$\frac{y}{X} = 3{,}3959\,.$$

Substituirt man ferner, wie im vorigen Artikel, der cylindrischen Form des Eisenstäbchens, welches 92 Millimeter lang und 0,1016 Millimeter dick war, eine möglich nahe kommende ellipsoidische Form, so erhält man nach Neumann

$$S = \frac{1}{138780}$$

und man findet damit, wenn $\varrho = 7{,}78$ gesetzt wird,

$$\log m = \log \frac{yT}{X} - \log\left(1 + 4\pi S\varrho\,\frac{y}{X}\right) = 3{,}32919,$$

also den Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse

$$m = 2134.$$

Für diesen Werth des Eisenmagnetismus erhält man aber nach dem angeführten Verhältnisse den derselben Kraft $X = 629{,}9$ entsprechenden Diamagnetismus des Wismuths, nach absolutem Maasse

$$= \frac{1}{1470000} \cdot 2134 = \frac{1}{689}.$$

Es war ferner nach Art. 10 der nach Note S. 527 durch eine elektromagnetische Kraft $X = 3012$ im Wismuth hervorgebrachte Diamagnetismus mit dem durch dieselbe Kraft im Eisen hervorgebrachten Magnetismus durch die Intensität der von ihnen bei ihrer Bewegung in einem geschlossenen Leiter erregten elektrischen Ströme verglichen und ihr Verhältniss wie 1 : 456700 oder, nach der Art. 10 S. 526 für das Wismuth angegebenen Reduction, wie

$$1 : 360740$$

gefunden worden. Nach diesem Verhältnisse kann nun ebenfalls der Diamagnetismus nach absolutem Maasse bestimmt werden, wenn der Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse bekannt ist. Nun ist aber nach dem vorigen Artikel für $X = 3012$

$$\frac{y}{X} = 0{,}77133.$$

Substituirt man nun auch hier der cylindrischen Form des Eisenstäbchens, welches 186 Millimeter lang und 0,8342 Millimeter dick war, eine möglich nahe kommende ellipsoidische Form, so erhält man nach Neumann $\quad S = \frac{1}{9747},$

und hiermit, für $\varrho = 7{,}78$,

$$\log m = \log \frac{yT}{X} - \log \left(1 + 4\pi S\varrho \frac{y}{X}\right) = 3{,}36274,$$

also den Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse

$$m = 2305{,}4.$$

Für diesen Werth des Eisenmagnetismus erhält man aber nach dem angeführten Verhältnisse den derselben Kraft $X = 3012$ entsprechenden Diamagnetismus des Wismuths nach absolutem Maasse

$$= \frac{1}{360740} \cdot 2305{,}4 = \frac{1}{156{,}5}.$$

Reducirt man endlich diese für verschiedene Werthe der Kraft X bestimmte Stärke des Diamagnetismus durch Division mit X auf denjenigen Werth, welcher der Einheit der Kraft X entspricht so erhält man nach der ersteren Vergleichung (durch magnetische Wirkungen) für die Stärke des durch die Einheit der Kraft in der Massen-

einheit des Wismuths hervorgebrachten Diamagnetismus nach absolutem Maasse den Werth

$$\frac{1}{629{,}9} \cdot \frac{1}{689} = \frac{1}{434000};$$

aus der letzteren Vergleichung (durch elektrische Wirkungen) erhält man dagegen

$$\frac{1}{2301} \cdot \frac{1}{156{,}5} = \frac{1}{471300} \text{*)}.$$

Im Mittel also aus beiden, nach Verhältniss der Art. 10 schon näher erörterten Umstände wohl übereinstimmenden, Vergleichungen ergiebt sich die Stärke des durch die Einheit der Kraft in der Masseneinheit des Wismuths hervorgebrachten Diamagnetismus nach absolutem Maasse

$$= \frac{1}{452000}.$$

Aus den im vorigen Artikel angeführten Formeln findet man aber den Grenzwerth des durch die Einheit der Kraft in der Masseneinheit des Eisens hervorgebrachten Magnetismus nach demselben absoluten Maasse ausgedrückt

$$= 5{,}6074,$$

d. i. 2540000 Mal grösser als den Diamagnetismus.

Für kleine Scheidungskräfte und dünne Eisenstäbe, für welche der Eisenmagnetismus zum Wismuthdiamagnetismus nahe in einem constanten Verhältnisse steht, ergiebt sich also der Wismuthdiamagnetismus etwa $2\frac{1}{2}$ Millionen Mal kleiner als der Eisenmagnetismus. Je grösser aber die Scheidungskräfte und je dicker die Eisenstäbe werden, desto mehr wächst der Diamagnetismus des Wismuths im Vergleiche zum Magnetismus des Eisens, so dass er z. B. in dem Art. 10 angeführten Falle bis zu dem 360740sten Theile des Eisenmagnetismus stieg, welches der grösste Werth desselben ist, der in obigen Versuchen vorkommt.

---

*) Nach diesem Verhältnisse ergiebt sich leicht, wenn das aus der magnetischen Wirkung des Wismuths gefundene Resultat nach S. 524. $= \frac{1}{1470000}$ angenommen wird, das aus der magnetelektrischen Wirkung abgeleitete $= \frac{1840}{1718} \cdot \frac{1}{1470000} = \frac{1}{1596000}$, was also statt des S. 530 angegebenen Werths $= \frac{1}{1781560}$, welcher gefunden worden war, indem die Müller'schen Versuche bei der Reduction des Eisenmagnetismus zum Grunde gelegt wurden, zu setzen ist. Das hier gefundene genauere Resultat ist übrigens a. a. O. unter Verweisung auf diese Note schon angeführt worden.



Inhalt.

